Inégalités de Hölder et Minkowski

Niveau : Approfondir la Terminale S
Difficulté : moyenne
Durée : Un peu moins d'une heure
Rubrique(s) : Fonctions, Inégalités

Exercice 1.

1) Montrer par un calcul simple que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

2) Nous allons généraliser la relation précédente à d'autres puissances. Soient $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Montrer que $p > 1$.

b) On suppose que $p > 1$. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $xy \leqslant \frac{1}{p}\, x^p + \frac{1}{q}\, y^q$.

3) Soient $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels, où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tous réels $t_1, \ldots, t_n$, on a $|t_1 + \ldots + t_n| \leqslant |t_1| + \ldots + |t_n|$.

b) Montrer que $|x_1y_1 + \ldots + x_ny_n| \leqslant \frac{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p}{p} + \frac{|y_1|^q + \ldots + |y_n|^q}{q}$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Que devient l'inégalité précédente si on remplace tous les x_i par λx_i et tous les y_i par $\frac{1}{\lambda} y_i$?

d) Choisir judicieusement λ pour avoir

$$|x_1y_1 + \ldots + x_ny_n| \leqslant (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \, (|y_1|^q + \ldots |y_n|^q)^{\frac{1}{q}} \, .$$

Cette dernière inégalité est appelée inégalité de Hölder.

4) Soient $x_1, \ldots, x_n\,, y_1, \ldots, y_n$ des réels, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]1, +\infty[$.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k + y_k|^p \leqslant |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + |y_k||x_k + y_k|^{p-1}$.

b) Montrer que :

$$|x_1||x_1+y_1|^{p-1}+\ldots+|x_n||x_n+y_n|^{p-1} \leqslant (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \, (|x_1 + y_1|^p + \ldots + |x_n + y_n|^p)^{1-\frac{1}{p}}$$

et

$$|y_1||x_1+y_1|^{p-1}+\ldots+|y_n||x_n+y_n|^{p-1} \leqslant (|y_1|^p + \ldots + |y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \, (|x_1 + y_1|^p + \ldots + |x_n + y_n|^p)^{1-\frac{1}{p}} \, .$$

c) En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$(|x_1 + y_1|^p + \ldots + |x_n + y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (|y_1|^p + \ldots + |y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \, .$$

Indications et Commentaires :

Exercice 2.

1) Utiliser $(x - y)^2 \geqslant 0$.

2)

b) Fixer y et étudier la fonction $x \mapsto \frac{1}{p}\,x^p + \frac{1}{q}\,y^q - xy$ sur $\mathbb{R}_+$.

3.a) Montrer ceci par récurrence.

d) Faire en sorte d'avoir $\lambda^p(|x_1|^p + ... + |x_n|^p) = \frac{1}{\lambda^q}(|y_1|^q + ... + |y_n|^q)$.

4.a) Remarquer que $|x_k + y_k|^p = |x_k + y_k|^{p-1}|x_k + y_k|$.

b) Pour la première inégalité, utiliser l'inégalité de Hölder avec $q = \frac{p}{p-1}$ et les réels $|x_1|, \dots, |x_n|$ et $|x_1 + y_1|^{p-1}, \dots, |x_n + y_n|^{p-1}$.

Corrections.

Exercice 2.

1) On a $(x-y)^2 \geqslant 0$, i.e. $x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0$, soit encore $2xy \leqslant x^2 + y^2$, d'où $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

2.a) On a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Comme q est strictement positif, ceci implique que $\frac{1}{p} < 1$. Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient bien $p > 1$.

b) On fixe $y \in \mathbb{R}_+$ quelconque et on étudie la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{p}\,x^p + \frac{1}{q}\,y^q - xy$ sur $\mathbb{R}_+$. Si y est nul, cette fonction est toujours positive. Supposons que y soit dans $\mathbb{R}_+^*$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = x^{p-1} - y,$$

y étant considéré comme une constante.
Puisque $p > 1$, la fonction $x \mapsto x^{p-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc f' est aussi strictement croissante sur ce même intervalle. f' s'annulant en $y^{\frac{1}{p-1}}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$y^{\frac{1}{p-1}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{y^q}{q}$	$\searrow$	$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Or $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$, donc $q = \frac{p}{p-1}$. Par conséquent, $f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}}y = \frac{y^q}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}+1} = y^q - y^{\frac{p}{p-1}} = y^q - y^q = 0$.
Ainsi, sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f admet un minimum qui vaut zéro, ce qui assure que f est positive sur $\mathbb{R}_+$. On a donc pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\frac{1}{p}\,x^p + \frac{1}{q}\,y^q - xy \geqslant 0$, soit encore $\frac{1}{p}\,x^p + \frac{1}{q}\,y^q \geqslant xy$.

3.a) Montrons ceci par récurrence. Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : pour tous réels $t_1, \dots, t_n$, on a $|t_1 + ... + t_n| \leqslant |t_1| + ... + |t_n|$.

$\mathcal{P}(1)$ est évidente. Montrons $\mathcal{P}(2)$. Soient t_1, t_2 deux réels. On a $t_1t_2 \leqslant |t_1t_2| = |t_1||t_2|$. Par conséquent, $t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2 \leqslant t_1^2 + t_2^2 + |t_1||t_2| = |t_1|^2 + |t_2|^2 + |t_1||t_2|$. On a donc prouvé que $(t_1+t_2)^2 \leqslant (|t_1| + |t_2|)^2$. Par la croissance de la fonction racine, ceci nous donne l'inégalité $\sqrt{(t_1+t_2)^2} \leqslant \sqrt{(|t_1|+|t_2|)^2}$ et donc $|t_1 + t_2| \leqslant ||t_1| + |t_2|| = |t_1| + |t_2|$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est satisfaite. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soient $t_1, \dots, t_{n+1}$ des réels.
On pose $u = t_1 + ... + t_n$. On a $|t_1 + ... + t_n + t_{n+1}| = |u + t_{n+1}| \leqslant |u| + |t_{n+1}|$, grâce à $\mathcal{P}(2)$. Grâce à $\mathcal{P}(n)$, on a $|u| \leqslant |t_1| + ... + |t_n|$. On arrive ainsi à $|t_1 + ... + t_n + t_{n+1}| \leqslant |t_1| + ... + |t_n| + |t_{n+1}|$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

b) On sait que $|x_1y_1 + ... + x_ny_n| \leqslant |x_1y_1| + ... + |x_ny_n| = |x_1||y_1| + ... + |x_n||y_n|$. Par ailleurs, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $|x_k||y_k| \leqslant \frac{|x_k|^p}{p} + \frac{|y_k|^q}{q}$. On obtient donc $|x_1||y_1| + ... + |x_n||y_n| \leqslant \frac{|x_1|^p + ... + |x_n|^p}{p} + \frac{|y_1|^q + ... + |y_n|^q}{q}$, d'où le résultat.

c) On obtient $|x_1y_1 + ... + x_ny_n| = |(\lambda x_1)\left(\frac{1}{\lambda}y_1\right) + ... + (\lambda x_n)\left(\frac{1}{\lambda}y_n\right)| \leqslant \frac{|\lambda x_1|^p + ... + |\lambda x_n|^p}{p} + \frac{|\frac{1}{\lambda}y_1|^q + ... + |\frac{1}{\lambda}y_n|^q}{q} = \lambda^p\frac{|x_1|^p + ... + |x_n|^p}{p} + \frac{1}{\lambda^q}\frac{|y_1|^q + ... + |y_n|^q}{q}$. On peut donc conclure que

$$|x_1y_1 + ... + x_ny_n| \leqslant \lambda^p\frac{|x_1|^p + ... + |x_n|^p}{p} + \frac{1}{\lambda^q}\frac{|y_1|^q + ... + |y_n|^q}{q}.$$

d) Si tous les x_i ou tous les y_i sont nuls, alors l'inégalité de Hölder est immédiate. Supposons que tous les x_i ne sont pas nuls et que tous les y_i ne sont pas nuls.
Pour transformer la somme des deux termes $\lambda^p \frac{|x_1|^p+...+|x_n|^p}{p} + \frac{1}{\lambda^q} \frac{|y_1|^q+...+|y_n|^q}{q}$ en un seul terme, nous allons utiliser la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Mais pour pouvoir utiliser ceci, nous allons choisir λ de sorte que $\lambda^p(|x_1|^p + ... + |x_n|^p) = \frac{1}{\lambda^q}(|y_1|^q + ... + |y_n|^q)$. Autrement dit, on pose $\lambda^{p+q} = \frac{|y_1|^q+...+|y_n|^q}{|x_1|^p+...+|x_n|^p}$, i.e. $\lambda = \frac{(|y_1|^q+...+|y_n|^q)^{\frac{1}{p+q}}}{(|x_1|^p+...+|x_n|^p)^{\frac{1}{p+q}}}$. Vu que l'on a supposé que tous les x_i ne sont pas nuls et que tous les y_i ne sont pas nuls, alors $|x_1|^p + ... + |x_n|^p$ et $|y_1|^p + ... + |y_n|^p$ sont strictement positifs et λ est bien défini et strictement positif. En remplaçant dans l'inégalité, on arrive à

$$\begin{aligned}|x_1y_1 + ... + x_ny_n| \leqslant{} & \frac{1}{p}(|y_1|^q + ... + |y_n|^q)^{\frac{p}{p+q}}(|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{1-\frac{p}{p+q}} \\ & + \frac{1}{q}(|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{q}{p+q}}(|y_1|^q + ... + |y_n|^q)^{1-\frac{q}{p+q}}.\end{aligned}$$

Mais nous savons que $\frac{p}{p+q} = \frac{p}{pq}\frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} = \frac{1}{q}$. De même, on montre facilement que $\frac{q}{p+q} = \frac{1}{p}$. Enfin, on a $1 - \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q} = \frac{1}{q}$ et de même $1 - \frac{p}{p+q} = \frac{1}{p}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}|x_1y_1 + ...x_ny_n| &\leqslant \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)(|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|y_1|^q + ... + |y_n|^q)^{\frac{1}{q}} \\ &= (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|y_1|^q + ... + |y_n|^q)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

4.a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a $|x_k + y_k|^p = |x_k + y_k|^{p-1}|x_k + y_k| \leqslant |x_k + y_k|^{p-1}(|x_k| + |y_k|)$.
b) Soit $q \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ce qui revient à poser $q = \frac{p}{p-1}$. Grâce à l'inégalité de Hölder appliquée à $|x_1|, ..., |x_n|$ et $|x_1 + y_1|^{p-1}, ..., |x_n + y_n|^{p-1}$, on peut écrire

$$|x_1||x_1+y_1|^{p-1}+...+|x_n||x_n+y_n|^{p-1} \leqslant (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}\left(|x_1 + y_1|^{(p-1)q} + ... + |x_n + y_n|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Or, $(p - 1)q = p$ et $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, ce qui nous donne la première inégalité. La deuxième s'obtient de la même manière en échangeant les rôles des x_i et des y_i.
c) En sommant les deux inégalités précédentes et en utilisant la question 4.a), on arrive à

$$\begin{aligned}|x_1 + y_1|^p + ... + |x_n + y_n|^p \leqslant{} & (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|x_1 + y_1|^p + ... + |x_n + y_n|^p)^{1-\frac{1}{p}} \\ & + (|y_1|^p + ... + |y_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|x_1 + y_1|^p + ... + |x_n + y_n|^p)^{1-\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}|x_1 + y_1|^p + ... + |x_n + y_n|^p \leqslant{} & (|x_1 + y_1|^p + ... + |x_n + y_n|^p)^{1-\frac{1}{p}} \\ & \times \left((|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (|y_1|^p + ... + |y_n|^p)^{\frac{1}{p}}\right).\end{aligned}$$

Si $|x_1+y_1|^p+...+|x_n+y_n|^p = 0$, alors l'inégalité voulue est immédiate. Sinon, on peut diviser l'inégalité précédente par $(|x_1 + y_1|^p + ... + |x_n + y_n|^p)^{1-\frac{1}{p}}$ pour obtenir l'inégalité de Minkowski.

□