Utilisation de fonctions

S. Dédé, V. Langlet

Niveau : Aide et approfondissement en première année après le bac

Difficulté : Classique pour les deux premiers exercices, le dernier permet d'aller un peu plus loin

Durée : un peu plus d'une heure si le cours est su

Rubrique(s) : Analyse (Étude de fonctions)

La petite histoire... Cette fiche propose des problèmes classiques liés aux fonctions. Vous pouvez directement commencer à chercher les questions, ou bien vous laisser guider par les exercices.

- Dans l'exercice 1, on cherche à savoir si on peut prolonger en 0 de manière continue puis de manière dérivable la fonction f vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}\right).$$
- Dans l'exercice 2, on cherche à étudier la suite récurrente définie par
$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n^3 + a}{3u_n^2 + 1}, \text{ avec } a > 0.$$
- Dans le dernier exercice, on cherche à montrer que
$$\text{Si } \lim_{x\to\infty} f'(x) = l \text{ alors } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$
Commencer par considérer des fonctions qui vérifient clairement l'hypothèse, par exemple $f'(x) = l$ pour tout $x \geqslant 0$, pour lesquelles le résultat paraît plus simple. Ça marche ? Inspirez vous en pour la preuve, en essayant de vous "ramener" à cette situation particulièrement facile lorsque x tend vers l'infini...

Exercice 1.

1) Soit f la fonction de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}\right).$$

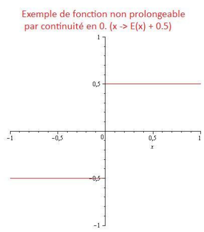
a) Montrer qu'on a l'égalité
$$f(x) = -\tan(x) \times \frac{\sin(x)}{x}.$$

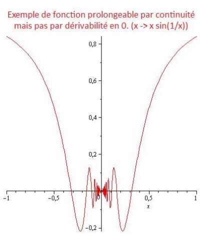
b) En déduire la limite de f en 0.

2.a) Montrer que f admet un prolongement par continuité g en 0 et le déterminer.

2.b) Le prolongement par continuité de f est-il dérivable en 0 ?

Indications et Commentaires : Pour la question 1.b), on utilisera le fait que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
On ne peut pas toujours prolonger par continuité ou dérivabilité :





Corrections.

1.a) En utilisant le fait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on arrive à

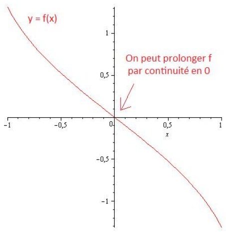
$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}\right) = \frac{1}{x} \times \frac{(\cos^2(x) - 1)}{\cos(x)} = -\frac{1}{x} \times \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \times \frac{\sin(x)}{x}.$$

1.b) Comme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -\tan(x) \times \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} -\tan(x) = 0.$$

2.a) f est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\}$ et admet une limite finie en 0, car $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. On peut donc définir un prolongement par continuité de f en 0 vérifiant

$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\},\ g(x) = f(x).$$



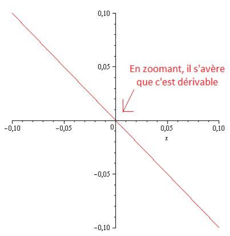
2.b) Montrons d'abord que g est dérivable en 0 en vérifiant que son taux d'accroissement admet une limite en 0.

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{x^2}\left(\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}\right) = -\frac{\sin^2(x)}{x^2} \times \frac{1}{\cos(x)}.$$

Or, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{\cos(x)} = -1.$$

Comme g est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\}$ du fait que f l'est, g est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$.



□

Exercice 2.

1) Étudier la fonction $f : x \mapsto x + x^3$ et montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2.a) Étudier l'application φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \frac{2t^3+a}{3t^2+1}$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

2.b) Rechercher ses points fixes, c'est à dire trouver les points t tels que $\varphi(t) = t$.

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = a, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

Est-elle bornée ? Est-elle monotone ? Est-elle convergente ?

Indications et Commentaires : Pour la question 1), on rappelle qu'une bijection f de A dans B est une application telle que pour tout $y \in B$, l'équation

$$y = f(x) \quad \text{avec } x \in A$$

a une et une seule solution. Le théorème de la bijection assure que si f est strictement monotone et continue sur A, alors f assure une bijection de A dans $f(A)$.
Pour la question 2.a), remarquer que $\varphi'(t) = 6tf(t)/(3t^2+1)^2$.
Pour la question 3), on montrera d'abord par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant f^{-1}(a).$$

Corrections.
1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie $f'(x) = 1 + 3x^2 > 0$, donc f est strictement croissante. Ainsi f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$. Comme f est continue et croissante, $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[$, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même.
2.a) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\varphi'(t) = \frac{6t(t^3+t-a)}{(3t^2+1)^2} = \frac{6t}{(3t^2+1)^2} f(t)$$

est nulle aux points $t = 0$ et $t = f^{-1}(a)$. De plus, f est strictement croissante donc f^{-1} est strictement croissante et $a > 0$ implique $f^{-1}(a) > f^{-1}(0) = 0$.
Pour réaliser le tableau de variations, on note que $\varphi'(t) \to \infty$ quand $t \to \infty$ et $\varphi'(t) \to -\infty$ quand $t \to -\infty$. Enfin, sur $[0, f^{-1}(a)]$, le signe de $\varphi'(t)$ est le signe de $f(t)$ car $6t/(3t^2+1)^2 \geqslant 0$. Or $f'(a) = 3a^2 + a > 0$ donc f est négative sur $[0, f^{-1}(a)]$ et $\varphi'(t)$ l'est également.
Comme $f(0) = 0$, $f'(a) > 0$ et la fonction φ' est négative sur $[0, f^{-1}(a)]$ et positive en dehors.

x	$-\infty$		0		$f^{-1}(a)$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$\varphi(f^{-1}(a))$	$\nearrow$	$+\infty$

2.b) On a $\varphi(t) - t = \frac{a-t-t^3}{3t^2+1}$. Par conséquent,

$$\varphi(t) = t \Leftrightarrow t^3 + t - a = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(t) = a \qquad \Leftrightarrow \qquad t = f^{-1}(a).$$

3) φ décroît sur $[0, f^{-1}(a)]$, donc $\varphi(0) > \varphi(f^{-1}(a))$, i.e. $a > f^{-1}(a)$, d'où $u_0 = a > f^{-1}(a)$.
Comme $\varphi([f^{-1}(a), +\infty[) = [f^{-1}(a), +\infty[$, on a par récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [f^{-1}(a), +\infty[.$$

La fonction $t \mapsto f(t) - a$ est strictement croissante (car f l'est) et s'annule en $f^{-1}(a)$ donc $t \geqslant f^{-1}(a) \Rightarrow t^3 + t - a \geqslant 0$. Ainsi, $\varphi(t) - t = \frac{a-t-t^3}{3t^2+1} \leqslant 0$ sur $[f^{-1}(a), +\infty[$ et donc $\varphi(t) \leqslant t$. Il vient alors $u_{n+1} = \varphi(u_n) \leqslant u_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle converge. Sa limite est un point fixe de la fonction continue φ, donc vaut $f^{-1}(a)$. $\square$

Exercice 3.

1) Soit f fonction dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si pour tout $x \geqslant x_0$ on a $m \leqslant f'(x)$, alors

$$\forall x \geqslant x_0, \qquad m(x - x_0) \leqslant f(x) - f(x_0).$$

b) Montrer que si pour tout $x \geqslant x_0$ on a $f'(x) \leqslant M$, alors

$$\forall x \geqslant x_0, \qquad f(x) - f(x_0) \leqslant M(x - x_0).$$

2.a) Montrer que si $\lim_{x\to\infty} f'(x) = l$, alors il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \geqslant x_0, \quad (l-\varepsilon)(x-x_0) \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant (l+\varepsilon)(x-x_0).$$

2.b) En déduire que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

Indications et Commentaires : Pour la question 1.a), on utilisera $g(x) = f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)$.

Corrections.

1.a) Regardons pour tout $x \geqslant x_0$, la fonction g définie pour tout $x \geqslant x_0$ par

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - m(x - x_0).$$

g est continue et dérivable sur $[x_0, +\infty[$, de dérivée

$$g'(x) = f'(x) - m \geqslant 0 \quad \text{par hypothèse.}$$

Nous en déduisons que g est croissante sur $[x_0, +\infty[$, et donc pour tout $x \geqslant x_0$,

$$g(x_0) \leqslant g(x), \qquad \text{soit encore} \quad f(x) - f(x_0) \geqslant m(x - x_0).$$

1.b) Il suffit d'appliquer la question 1.a) avec $-f$ et $-M$.

2.a) Supposons que $f'(x) \to l$ quand $x \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$x \geqslant x_0 \quad \Rightarrow \quad |f'(x) - l| < \varepsilon.$$

L'inégalité $x \geqslant x_0$ entraîne donc que $l - \varepsilon < f'(x) < l + \varepsilon$. D'après la question 1), on en déduit que pour tout $x \geqslant x_0$,

$$(l-\varepsilon)(x-x_0) \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant (l+\varepsilon)(x-x_0).$$

2.b) Soit $\varepsilon \geqslant 0$. Par la question précédente, il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$,

$$(l-\varepsilon)(x-x_0) + f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant (l+\varepsilon)(x-x_0) + f(x_0).$$

Or, nous avons de manière immédiate les résultats suivants :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(l-\varepsilon)(x-x_0) + f(x_0)}{x} = l - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(l+\varepsilon)(x-x_0) + f(x_0)}{x} = l + \varepsilon. \qquad (*)$$

On a donc envie de passer à la limite pour obtenir

$$l - \varepsilon \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \leqslant l + \varepsilon,$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on ferait tendre ε vers 0 pour en déduire que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

On a envie mais on ne peut pas, car on ne sait pas si la limite de $f(x)/x$ existe en $+\infty$ et on ne peut pas appliquer le théorème des gendarmes. Il faut revenir aux limites obtenues dans (*). En effet, il existe $x_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $x \geqslant x_1$,

$$\frac{(l+\varepsilon)(x-x_0) + f(x_0)}{x} \leqslant l + \varepsilon + \varepsilon$$

et il existe $x_2 \geqslant 0$ tel que pour tout $x \geqslant x_2$,

$$\frac{(l-\varepsilon)(x-x_0) + f(x_0)}{x} \geqslant l - \varepsilon - \varepsilon.$$

Donc on posant $A = \max(x_0, x_1, x_2)$, pour tout $x \geqslant A$ on a

$$l - 2\varepsilon \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant l + 2\varepsilon,$$

ce qui correspond bien à la définition d'une limite et assure que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

□