Raisonnement par analyse-synthèse

N. Jacquet, V. Bansaye

Niveau : De la Terminale aux Maths du supérieur
Difficulté : Moyenne
Durée : Un peu plus d'1h
Rubrique(s) : Analyse (Etude de fonctions, dérivation)
Raisonnement (Analyse-synthèse)

Exercice 1. Deux joueurs s'affrontent sur le jeu suivant. Ils disent chacun leur tour un nombre entre 1 et 7. Les nombres sont additionnés et dès que le cumul des nombres qu'ils ont proposés vaut 100, le jeu est fini. Le joueur qui a atteint 100 et a donc parlé en dernier gagne.
Comment jouer ?

Corrections. Nous allons trouver la réponse de manière naturelle, en partant de l'objectif qui est d'atteindre 100. Si je veux atteindre 100, il faut que mon adversaire ait atteint un nombre entre 93 (auquel cas je dirai 7) et 99 (auquel cas je dirai 1). Pour obtenir cela, il suffit que j'atteigne 92 à l'étape précédente. Mais pour atteindre 92 à coup sûr, j'ai besoin que mon adversaire ait atteint un nombre entre 85 (auquel cas je dirai 7) et 91 (auquel cas je dirai 1). Pour cela, il faudrait que j'atteigne 84 à l'étape précédente.
On reproduit le raisonnement et on réalise que pour gagner, il suffit que j'arrive à atteindre à l'étape précédente $84 - 8 = 76$, donc juste avant $76 - 8 = 68$, et ainsi de suite 60, 52, 44, 36, 28, 20, 12 et 4. On observe ici une suite arithmétique de raison 8.
Nous sommes partis du résultat (la victoire) pour remonter au début de la partie et voir comment la jouer. Nous pouvons maintenant donner la stratégie gagnante, en respectant les règles du jeu.
Conclusion : Si je commence, je dis 4, puis mon adversaire va porter le cumul à un nombre entre 5 et 11, et je dis le chiffre qu'il faut pour atteindre 12, puis 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 74, 82, et enfin 100. Si mon adversaire commence et connaît cette stratégie, je perdrai. Mais sinon, je peux la « rattraper » : dès que je peux, je dirai 4 (s'il joue au plus 3), ou bien 1 puis ce qu'il faut pour atteindre 12, ou 20, 28, 36... □

Exercice 2 (Décomposition d'une fonction réelle.). L'exercice consiste à montrer que toute fonction réelle est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, de manière unique.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On va montrer l'existence puis l'unicité de la décomposition.

1) Montrer qu'il existe deux fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que g soit une fonction paire, h une fonction impaire et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

2) Montrer que si g_1 et g_2 sont deux fonctions paires et h_1 et h_2 deux fonctions impaires telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g_1(x) + h_1(x), \qquad f(x) = g_2(x) + h_2(x),$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_1(x) = g_2(x)$ et $h_1(x) = h_2(x)$.

Indications et Commentaires : 1) Supposer que g et h existent et les exprimer en fonction de f.

Corrections.1) La question revient à « trouver » une fonction paire g et une fonction impaire h telles que $f = g + h$. Pas facile à deviner comme cela ... alors trichons un peu pour les trouver, et ensuite nous ferons vraiment la preuve.

Cette partie est rédigée en italique. C'est l'« analyse » : on peut la faire au brouillon. Notre but est d'identifier g et h. Pour cela, on suppose « qu'on les a », ce qui revient à supposer le résultat, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad g(-x) = g(x), \quad h(-x) = -h(x).$$

Pour utiliser les deux dernières égalités, on écrit la première en $-x$ pour obtenir que

$$f(x) = g(x) + h(x), \qquad f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x).$$

On peut ensuite obtenir l'expression de g et h en sommant ces deux égalités et en faisant leur différence :

$$\begin{array}{lll} & f(x) + f(-x) = 2g(x) & f(x) - f(-x) = 2h(x), \\ \textit{et donc} & g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} & h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}$$

On vient d'identifier g et h en fonction de la seule donnée de l'énoncé : f.
On peut maintenant rédiger la solution de l'exercice.

Introduisons les fonctions réelles g et h définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Ces fonctions ont été trouvées grâce à une analyse (et pas en copiant sur le voisin ; vous pouvez d'ailleurs mettre l'analyse dans la copie pour que le correcteur voie d'où elles sortent). On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = f(x).$$

Donc $f = g + h$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x) \qquad h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x).$$

Donc g est paire et h est impaire et l'on a répondu à la question en montrant que f s'écrivait comme la somme d'une fonction paire g et d'une fonction impaire h.

2) La réponse au problème d'unicité se trouve également dans la partie « analyse » rédigée en italique. Soient g_1 et g_2 deux fonctions paires et h_1 et h_2 deux fonctions impaires telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g_1(x) + h_1(x), \qquad f(x) = g_2(x) + h_2(x).$$

Alors comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_1(x) = g_1(-x)$ et $h_1(x) = -h_1(-x)$, on obtient $f(-x) = g_1(x) - h_1(x)$ et donc

$$f(x) + f(-x) = 2g_1(x), \qquad f(x) - f(-x) = 2h_1(x).$$

D'où

$$g_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Mais le même raisonnement conduit à

$$g_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Ces égalités entraînent que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_1(x) = g_2(x)$ et $h_1(x) = h_2(x)$, ce qui montre bien que $g_1 = g_2$ et $h_1 = h_2$.

Indiquons une deuxième méthode :

$$f(x) - f(x) = g_1(x) - g_2(x) + h_1(x) - h_2(x)$$

et donc la fonction $g_1 - g_2 = h_2 - h_1$ est à la fois paire (comme différence de deux fonctions paires) et impaire (comme différence de deux fonctions impaires). On vérifie facilement alors qu'elle est nulle et donc $g_1 = g_2$, $h_1 = h_2$. $\square$

Exercice 3 (Recherche d'un antécédent.). Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1/2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}. \end{array}$$

Montrer que pour tout $y \neq 1/2$, il existe $x \neq 1/2$ tel que $f(x) = y$.

Indications et Commentaires : Partir de $f(x) = y$ pour trouver x en fonction de y. En fait le problème revient à trouver la réciproque de la fonction f. On montre ici que la fonction f prend toutes les valeurs de $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ et on dit que f est surjective de $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$. En fait, elle est même bijective (les deux méthodes proposées ci-dessous le prouvent).
À nouveau, la preuve proposée est un peu ... longue et redondante. On pourrait être plus rapide mais les erreurs de raisonnement constatées nous poussent à bien détailler les rouages qui mènent à une preuve juste.

Corrections. On se donne $y \neq 1/2$ et on cherche un $x \neq 1/2$ tel que $f(x) = y$.
Deux méthodes possibles pour cela : on trouve x en faisant une analyse, ou bien on prouve l'existence de x grâce aux variations de f et un théorème.

Méthode 1 : raisonnement par analyse. *Comme dans l'exercice précédent, l'analyse est en italique : c'est une aide pour trouver x, pas une preuve.*
On suppose donc que l'on a trouvé x tel que $f(x) = y$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x+1}{2x-1} & = & y \\ x+1 & = & y(2x-1) \\ 1+y & = & x(2y-1) \\ x & = & \dfrac{1+y}{2y-1} \end{array}$$

Maintenant que l'on a identifié x en fonction de la donnée de l'énoncé y, on peut passer à la preuve.
Soit $y \neq 1/2$. Alors $2y - 1 \neq 0$ et nous posons

$$x = \frac{1+y}{2y-1},$$

expression que nous avons trouvée grâce à une analyse (que l'on peut mettre dans la copie).
Commençons par vérifier que $x \neq 1/2$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $x = 1/2$. Alors

$$\frac{1}{2} = \frac{1+y}{2y-1} \Rightarrow 2y-1 = 2+2y \Rightarrow -1 = 2,$$

ce qui est absurde.
Nous savons maintenant que $x \neq 1/2$ et nous pouvons donc calculer $f(x)$:

$$f(x) \quad = \quad \frac{x+1}{2x-1} = \frac{\frac{1+y}{2y-1}+1}{2\frac{1+y}{2y-1}-1} = \frac{1+y+(2y-1)}{2(1+y)-(2y-1)} = \frac{3y}{3} = y.$$

Donc il existe $x \neq 1/2$ tel que $f(x) = y$.

Méthode 2 : tableau de variations. Une autre façon de vérifier que tout point de $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ admet un antécédent par f est de tracer son tableau de variations et de « voir » qu'à toute ordonnée $y \neq 1/2$ on peut faire correspondre (au moins) un antécédent. Pour cela, on calcule la dérivée de f donnée par

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

pour tout $x \neq 1/2$.

$$f'(x) = \frac{(2x-1)-(x+1)2}{(2x-1)^2} = -\frac{3}{(2x-1)^2} \leqslant 0$$

pour tout $x \neq 1/2$, et donc f est décroissante sur $]-\infty, 1/2[$ et également décroissante sur $]1/2, \infty[$.

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$1/2$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$1/2$

On voit donc que pour tout $y \in]-\infty, 1/2[$, il existe $x \in]-\infty, 1/2[$ tel que $f(x) = y$. De même, pour tout $y \in]1/2, \infty[$, il existe $x \in]1/2, \infty[$ tel que $f(x) = y$. En fait, pour faire une preuve rigoureuse il faut préciser que f est <u>continue</u> sur $]-\infty, 1/2[$ et $f(x) \to 1/2$ quand $x \to -\infty$ et $f(x) \to -\infty$ quand $x \to 1/2$.
Le théorème des valeurs intermédiaires (vu en terminale) assure alors que toute valeur de $]-\infty, 1/2[$ admet un antécédent par f. Remarquons que si f n'était pas continue sur $]-\infty, 1/2[$ (ou $]1/2, \infty[$), nous ne pourrions pas conclure car f pourrait « sauter » certaines valeurs. $\square$