

Faites tourner les triangles

L. Gerin et N. Jacquet

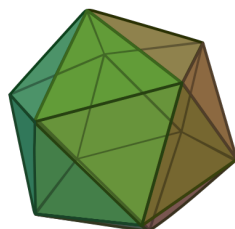
Niveau : DE LA TERMINALE AUX MATHS DU SUPÉRIEUR

Difficulté : facile au début, plus difficile à partir de l'Exercice 4

Durée : 2h

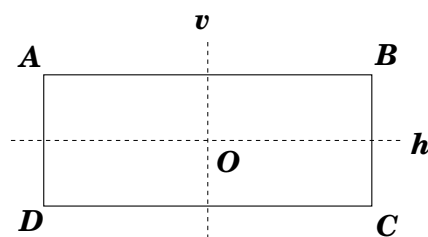
Rubrique(s) : Algèbre (Structures - initiation aux groupes)
Géométrie (Géométrie plane)

La petite histoire...Au XIX^{ème} siècle (et même avant en réalité), on s'est rendu compte que plutôt qu'étudier directement certaines figures géométriques, comme par exemple celle-ci (image tirée de Wikipedia) :



il pouvait être intéressant d'étudier les transformations qui laissent cette figure inchangée. Plus concrètement, il s'agit de déterminer de combien de façons on peut la tourner ou la réfléchir dans un miroir si on veut retomber exactement sur la même figure. Ça n'a l'air de rien, mais cette idée a donné naissance à un domaine entier des mathématiques que l'on a appelé la *théorie des groupes*, et qui a maintenant de nombreuses applications : en cryptographie, en chimie, etc.

Exercice 1. Pour commencer, on va considérer le rectangle \mathcal{R} suivant, de sommets A, B, C, D et de centre O :



On rappelle que les isométries sont les transformations du plan qui préservent les distances : les rotations, symétries axiales et symétries centrales sont des isométries. Il y a quatre isométries qui laissent inchangé le rectangle \mathcal{R} :

$$\text{Id}, R_{O,\pi}, S_h, S_v,$$

où

- Id est la transformation "Identité", c'est-à-dire celle qui ne modifie rien,
- $R_{P,\theta}$ la rotation de centre P et d'angle θ ,
- S_Δ la symétrie axiale d'axe Δ .

On rappelle qu'une rotation d'angle π est aussi une symétrie centrale.

Par ailleurs, si l'on a deux isométries F et G , on note $G \circ F$ l'isométrie obtenue en appliquant **d'abord** F puis G . On dit que l'on *compose* F et G .

1) Qu'obtient-on en faisant $S_h \circ S_h$? En faisant $S_h \circ S_v$? (ne pas hésiter à faire des dessins)

2) Remplir le tableau suivant :

	$R_{O,\pi}$	S_h	S_v
$R_{O,\pi}$	$R_{O,\pi} \circ R_{O,\pi} =$	$R_{O,\pi} \circ S_h =$	$R_{O,\pi} \circ S_v =$
S_h			
S_v			

Indications et Commentaires :

1) Pour commencer, on peut calculer $S_h(A)$ puis $S_h(S_h(A))$. On verra ainsi où est "envoyé" A .

2) On applique la même stratégie : on prend n'importe lequel des quatre points et on regarde où il est envoyé, par exemple par $R_{O,\pi}$ puis par S_h .

Corrections.

1) On commence par regarder ce qu'il se passe pour le point A : on lui applique la symétrie S_h , il se retrouve donc envoyé sur $S_h(A) = D$. Ensuite on applique à nouveau S_h qui envoie D sur A . Au final :

$$A \xrightarrow{S_h} D \xrightarrow{S_h} A$$

et donc $S_h \circ S_h(A) = A$. On peut vérifier qu'il en est de même pour tous les points, qui reviennent tous au point de départ. Donc $S_h \circ S_h = \text{Id}$.

On utilise ensuite la même stratégie pour $S_h \circ S_v$:

$$A \xrightarrow{S_v} B \xrightarrow{S_h} C$$

Pour B cela donne

$$B \xrightarrow{S_v} A \xrightarrow{S_h} D$$

Pour C :

$$C \xrightarrow{S_v} D \xrightarrow{S_h} A$$

Pour D :

$$D \xrightarrow{S_v} C \xrightarrow{S_h} B$$

Finalement, tous les points se sont retrouvés sur le sommet opposé et on a effectué la symétrie centrale de centre O , qui est aussi la rotation de centre O et d'angle π . Finalement ¹, on a obtenu que $S_h \circ S_v = R_{O,\pi}$.

2) Avec la stratégie des questions précédentes, on trouve les valeurs suivantes :

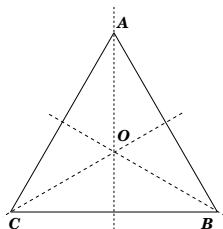
	$R_{O,\pi}$	S_h	S_v
$R_{O,\pi}$	Id	S_v	S_h
S_h	S_v	Id	$R_{O,\pi}$
S_v	S_h	$R_{O,\pi}$	Id

1. Ne pas oublier que $G \circ F$ signifie que l'on a commencé par F !

□

Remarque. On retrouve dans d'autres contextes en Mathématiques cet ensemble de quatre objets, avec cette règle de calcul. On appelle cet ensemble le *groupe de Klein*, en référence au mathématicien allemand Felix Klein (1849-1958), l'un des fondateurs de la géométrie moderne.

Exercice 2. On considère maintenant un triangle équilatéral ABC de centre O .



1) Donner la liste des isométries qui laissent le triangle inchangé.

2)

a) Que donne $S_{OA} \circ S_{OB}$? Que donne $S_{OB} \circ S_{OA}$? Vous êtes sûr(e)?

b) Que donne $S_{OA} \circ R_{O,2\pi/3}$?

c) Quelle est l'isométrie obtenue en faisant

$$\overbrace{S_{OA} \circ S_{OA} \cdots \circ S_{OA}}^{44 \text{ fois}} \circ \overbrace{R_{O,2\pi/3} \circ R_{O,2\pi/3} \cdots \circ R_{O,2\pi/3}}^{37 \text{ fois}}$$

(on compose 37 fois de suite $R_{O,2\pi/3}$ puis 44 fois de suite S_{OA})?

d) Quelle est l'isométrie obtenue en faisant

$$S_{OA} \circ R_{O,2\pi/3} \circ S_{OB} \circ S_{OA} \circ R_{O,2\pi/3} \circ S_{OB} \circ \dots \circ S_{OA} \circ R_{O,2\pi/3} \circ S_{OB}$$

(on compose 127 fois de suite la séquence $S_{OA} \circ R_{O,2\pi/3} \circ S_{OB}$)?

3) On note F^{-1} l'isométrie *inverse* de F , c'est-à-dire l'isométrie telle que

$$F^{-1} \circ F = \text{Id.}$$

Quelle est l'inverse de S_{OA} ? L'inverse de $R_{O,2\pi/3}$?

4) En s'inspirant de l'exemple du triangle, pouvez-vous déterminer combien il y a d'isométries qui laissent inchangé le polygone régulier à n côtés (on peut commencer par regarder ce qui se passe pour le carré ou l'hexagone régulier)?

Indications et Commentaires :

1) Il y a des symétries axiales et des rotations.

2)

a) On peut commencer par déterminer $S_{OB}(A)$, puis $S_{OA} \circ S_{OB}(A)$ pour voir où est "envoyé" A . Puis on fait la même chose pour B et C .

c) Que se passe-t-il quand on fait 37 fois un tiers de tour? Que se passe-t-il si ensuite on applique 44 fois un retournement de la figure?

3) Il faut chercher une transformation (très simple!) qui "annule" S_{OA} . Pour $R_{O,2\pi/3}$, qu'est-ce qui peut bien annuler deux tiers de tours dans le sens trigonométrique?

Corrections.

1) Le triangle a trois axes de symétries (les trois hauteurs), on trouve donc trois symétries qui le laissent inchangé. On peut aussi le faire tourner d'1/3 de tour dans le sens trigonométrique (soit $2\pi/3$) ou de 2/3 de tour (soit $4\pi/3$). On remarque qu'on pourrait le faire tourner d'1/3 de tour dans le sens anti-trigonométrique, mais ça revient à faire une rotation de $4\pi/3$ dans le sens trigonométrique. On trouve donc en plus de l'identité 3 symétries et 2 rotations :

$$\text{Id}, S_{OA}, S_{OB}, S_{OC}, R_{O,2\pi/3}, R_{O,4\pi/3}.$$

Vous avez déterminé ce qui s'appelle le **groupe du triangle**, il a 6 éléments.

2)

a) Pour A , on obtient

$$A \xrightarrow{S_{OB}} C \xrightarrow{S_{OA}} B$$

Pour B on obtient

$$B \xrightarrow{S_{OB}} B \xrightarrow{S_{OA}} C$$

Et pour C :

$$C \xrightarrow{S_{OB}} A \xrightarrow{S_{OA}} A$$

On a tourné le triangle d'1/3 de tour, soit $S_{OA} \circ S_{OB} = R_{O,2\pi/3}$. Pour $S_{OB} \circ S_{OA}$, le même raisonnement donne 2/3 de tour : $S_{OB} \circ S_{OA} = R_{O,4\pi/3}$.

b) Pour A , on obtient

$$A \xrightarrow{R_{O,2\pi/3}} C \xrightarrow{S_{OA}} B$$

Pour B , on obtient

$$B \xrightarrow{R_{O,2\pi/3}} A \xrightarrow{S_{OA}} A$$

Et pour C :

$$C \xrightarrow{R_{O,2\pi/3}} B \xrightarrow{S_{OA}} C$$

Finalement : A et B sont permutés entre eux alors que C est envoyé sur lui-même, c'est la symétrie d'axe OC . Donc $S_{OA} \circ R_{O,2\pi/3} = S_{OC}$.

c) On commence par composer 37 fois de suite $R_{O,2\pi/3}$, c'est-à-dire que l'on fait faire 37 fois un tiers de tour au triangle, soit 12 tours complets et un tiers de tour, cela revient à un seul tiers de tour :

$$\overbrace{R_{O,2\pi/3} \circ R_{O,2\pi/3} \dots R_{O,2\pi/3}}^{37 \text{ fois}} = R_{O,2\pi/3}.$$

Ensuite on fait 44 fois de suite la symétrie S_{OA} , mais on a vu que $S_{OA} \circ S_{OA} = \text{Id}$. Donc ces 44 symétries s'annulent deux à deux :

$$\overbrace{S_{OA} \circ S_{OA} \dots S_{OA}}^{44 \text{ fois}} = \text{Id}.$$

Finalement,

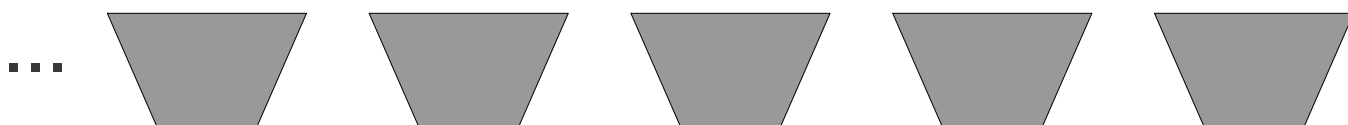
$$\overbrace{S_{OA} \circ S_{OA} \dots S_{OA}}^{44 \text{ fois}} \circ \overbrace{R_{O,2\pi/3} \circ R_{O,2\pi/3} \dots R_{O,2\pi/3}}^{37 \text{ fois}} = \text{Id} \circ R_{O,2\pi/3} = R_{O,2\pi/3}.$$

d) On vérifie que $S_{OA} \circ R_{O,2\pi/3} \circ S_{OB} = R_{O,2\pi/3}$. Puisque l'on effectue 127 fois cette séquence, on fait 126 tours et un tiers de tour. Finalement, on obtient $R_{O,2\pi/3}$.

3) On cherche une isométrie F qui "annule" S_{OA} , c'est-à-dire $F \circ S_{OA} = \text{Id}$. Or on sait que si on compose deux fois S_{OA} , on obtient l'identité : $S_{OA} \circ S_{OA} = \text{Id}$. On a donc $S_{OA}^{-1} = S_{OA}$, elle est sa propre inverse. Pour "annuler" $R_{O,2\pi/3}$ qui représente 1/3 de tour, il faut faire ensuite 2/3 de tour : $R_{O,4\pi/3} \circ R_{O,2\pi/3} = \text{Id}$. On a donc $R_{O,2\pi/3}^{-1} = R_{O,4\pi/3}$. \square

Remarque. Sur cet exemple, on voit qu'il est finalement plus simple d'utiliser de façon automatique les règles de calcul sur les éléments du groupe, plutôt que de toujours revenir à la figure (notamment pour 127 séquences de $S_{OA} \circ R_{O,2\pi/3} \circ S_{OB}$!). On imagine aussi que ce genre de calcul est plus facile à automatiser avec l'aide d'un ordinateur, plutôt que de lui faire retourner l'image, puis tourner de 120, puis retourner, puis retourner, puis tourner de 120, puis retourner, puis...

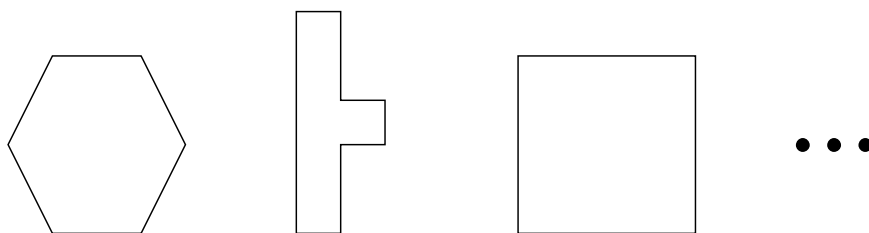
Exercice 3. On considère la frise suivante, constituée d'une infinité de trapèzes disposés à intervalles réguliers :



Déterminer le groupe des isométries qui laissent cette frise inchangée.

Indications et Commentaires : Il y a des symétries axiales et des translations.

Conclusion. Vous pourriez maintenant facilement déterminer pour chacune des figures suivantes



le *groupe* des isométries qui la laisse inchangée. Vous pourriez composer chacune de ces isométries, chercher leurs inverses, etc. Vous venez de faire de la **théorie des groupes**. En trois dimensions, c'est aussi possible (mais un peu plus compliqué à dessiner...) et c'est très utile notamment en chimie. Connaître les isométries qui laissent inchangée une molécule permet de deviner comment elle va se comporter en spectroscopie : on bombarde un matériau pour savoir de quoi il est composé (voir par exemple http://fr.wikipedia.org/wiki/Spectroscopie_infrarouge pour plus de détails).

Nous allons maintenant voir les groupes sous un autre point de vue : non plus comme un ensemble d'isométries mais comme un ensemble abstrait d'éléments que l'on peut "combiner" entre eux.

Définition. Un groupe est un ensemble G (fini ou infini) muni d'une loi interne $*$, c'est-à-dire une application $G \times G \rightarrow G$ (on note $a * b$ le résultat de cette application prise en (a, b)), et vérifiant les propriétés suivantes :

- Pour tous éléments a, b, c de G , $a * (b * c) = (a * b) * c$ (c'est la propriété d'associativité) ;

- Il y a un élément neutre : un élément e tel que, pour tout a dans G , $a * e = e * a = a$.
- Tout élément a de G a un inverse, c'est-à-dire un élément b tel que $a * b = b * a = e$. Cet inverse b est noté alors a^{-1} .

Nous avons ainsi vu que l'ensemble des isométries du triangle, muni de la loi \circ , est un groupe.

Si, pour tous éléments a, b du groupe, on a $a * b = b * a$, on dit que le groupe est *commutatif*. Le groupe de Klein, présenté à l'Exercice 1 est commutatif, alors que le groupe du triangle ne l'est pas (nous avons vu que $S_{OA} \circ S_{OB} \neq S_{OB} \circ S_{OA}$).

Exercice 4.

1) Compléter le tableau suivant par oui ou par non. Lorsqu'il y a un élément neutre, le préciser et lorsque tout élément x a inverse, le préciser.

	stable par opération	élément neutre	inverse	loi associative
$(\mathbb{R}, +)$				
$(\mathbb{N}, +)$				
$(\mathbb{Z}, +)$				
$(\mathbb{Q}, +)$				
$(\mathbb{R}^*, +)$				
(\mathbb{R}, \times)				
(\mathbb{Z}^*, \times)				
(\mathbb{Q}^*, \times)				
(\mathbb{R}^*, \times)				

2) Les groupes du tableau ont un point commun, lequel ?

3) Pourquoi \mathbb{R}, \mathbb{Q} et \mathbb{Z} munis de la loi " - " ne sont pas des groupes ? Même question pour \mathbb{R}^* et \mathbb{Q}^* munis de la loi " ÷ ".

Corrections.

1)

	stable par opération	élément neutre	inverse	loi associative
$(\mathbb{R}, +)$	oui	oui 0	oui $-x$	oui
$(\mathbb{N}, +)$	oui	oui 0	non	oui
$(\mathbb{Z}, +)$	oui	oui 0	oui $-x$	oui
$(\mathbb{Q}, +)$	oui	oui 0	oui $-x$	oui
$(\mathbb{R}^*, +)$	non	non	oui $-x$	oui
(\mathbb{R}, \times)	oui	oui 1	non	oui
(\mathbb{Z}^*, \times)	oui	oui 1	non	oui
(\mathbb{Q}^*, \times)	oui	oui 1	oui $1/x$	oui
(\mathbb{R}^*, \times)	oui	oui 1	oui $1/x$	oui

Stabilité par opération : \mathbb{R}^* n'est pas stable par $+$, car $4 + (-4)$ n'est pas dans \mathbb{R}^* bien que 4 et -4 le soient.

inverse : Tout élément x non nul de \mathbb{N} n'a pas d'inverse car $-x$ n'est pas dans \mathbb{N} .

Tous les éléments de \mathbb{R} ne sont pas inversibles pour \times . Par exemple 0 : il n'existe pas de réel x tel que $x \times 0 = 0 \times x = 1$. Zéro est d'ailleurs le seul élément non inversible de (\mathbb{R}, \times) , mais c'est suffisant pour contredire le fait que tout élément de (\mathbb{R}, \times) est inversible.

Tout élément de (\mathbb{Z}^*, \times) n'est pas inversible. Par exemple 2 n'a pas d'inverse car $1/2$ n'est pas dans

\mathbb{Z} . D'ailleurs les seuls éléments inversibles sont 1 et -1 .

loi associative : $+$ et \times sont associatives.

On a un groupe lorsqu'il n'y a que des « oui » sur toute la ligne.

2) Tous ces groupes sont commutatifs.

3) \mathbb{R}, \mathbb{Q} et \mathbb{Z} sont bien stables par " $-$ ", 0 est l'élément neutre et chaque élément est son propre inverse, mais " $-$ " n'est pas associative. Par exemple $1 - (5 - 7) = 3$ qui est différent de $(1 - 5) - 7 = -11$. De même la loi " \div " n'est pas associative, car par exemple $(48 \div 6) \div 2 = 8 \div 2 = 4$ qui est différent de $48 \div (6 \div 2) = 48 \div 3 = 16$. \square

Exercice 5. Soit G l'ensemble des fonctions affines définies sur \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R} , ayant un coefficient directeur non nul.

Ainsi pour tout f de G , il existe a dans \mathbb{R}^* et b dans \mathbb{R} tel que l'on ait : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$.

1) Soient $f : x \mapsto ax + b$ et $g : x \mapsto cx + d$ deux éléments de G (a et c sont donc des réels non nuls et b et d sont des réels quelconques). Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. En déduire deux remarques pour la loi \circ sur G .

2) Trouver l'élément neutre de G .

3) Soit $f : x \mapsto ax + b$ un élément de G . Déterminer f^{-1} pour la loi \circ .

4) Déduire des questions précédentes que G est un groupe. Est-il commutatif ?

Corrections.

1) Pour tout x de \mathbb{R} , on a :

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(cx + d) = a(cx + d) + b = acx + ad + b$$

et

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(ax + b) = c(ax + b) + d = acx + cb + d.$$

Nous voyons que G est stable par la loi \circ , car $g \circ f$ est bien une fonction affine, de coefficient directeur ac (qui est bien différent de zéro car a et c le sont).

Si $ad + b \neq cb + d$, alors $f \circ g$ est différent de $g \circ f$, ceci montre que la loi \circ n'est pas commutative sur G .

2) Cherchons une fonction $Id : x \mapsto \alpha x + \beta$ vérifiant pour toute fonction $f : x \mapsto ax + b$ de G la propriété $f \circ Id = f$. Grâce à la question précédente on doit avoir $a\alpha = a$ et $a\beta + b = b$. Ainsi $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ semblent convenir. Vérifions-le. D'une part la fonction $Id : x \mapsto x$ est dans G et d'autre part pour toute fonction $f : x \mapsto ax + b$ de G , on a $f \circ Id = Id \circ f = f$. Donc G possède un élément neutre à savoir la fonction $Id : x \mapsto x$.

3) Cherchons $g : x \mapsto cx + d$ vérifiant $g \circ f = f \circ g = Id$. Si on trouve g alors celui-ci sera f^{-1} . Cherchons c et d pour avoir $f \circ g = Id$, ce qui s'écrit grâce à la première question : $\forall x \in \mathbb{R}, acx + ad + b = x$.

Comme a est non nul, on peut choisir $c = 1/a$ et pour avoir $ad + b = 0$, on pose $d = -b/a$. Ainsi $g : x \mapsto \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ semble être un bon candidat. Celui-ci nous permet déjà d'avoir $f \circ g = Id$. En utilisant de nouveau la première question on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = a \times \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}b - \frac{b}{a} = x.$$

On a bien $g \circ f = Id$. Ainsi on a f^{-1} qui est définie par $x \mapsto \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

4) Pour que G soit un groupe, il reste à vérifier que la loi \circ est bien associative. Écrivons donc, pour tous f, g, h dans G , et x réel,

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = [f \circ (g \circ h)](x).$$

D'après la question 1, ce n'est pas un groupe commutatif. \square

Exercice 6.

1) On note $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ l'ensemble formé des nombres $\{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{6}, \underline{7}, \underline{8}, \underline{9}\}$ (on souligne chaque nombre pour signaler que l'on applique pas exactement la même règle de calcul que d'habitude).

On munit $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ d'une opération $+$ définie de la façon suivante : pour \bar{x} et \bar{y} dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, $\bar{x} + \bar{y}$ est le chiffre des unités de $x + y$. Par exemple on a $\underline{1} + \underline{3} = \underline{4}$ et $\underline{9} + \underline{6} = \underline{5}$ (car on a $6 + 9 = 15$ et le chiffre des unités de 15 est 5).

Montrer que $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble formé des nombres $\{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{n-1}\}$. Nous décidons que \bar{x} et \bar{y} donnent le même élément dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si n divise $x - y$. Par exemple $\dots, \underline{-2n}, \underline{-n}, \underline{0}, \underline{n}, \underline{2n}, \underline{3n}, \dots$ correspondent au même élément à savoir $\underline{0}$. De même $\dots, \underline{-2n+7}, \underline{-n+7}, \underline{7}, \underline{n+7}, \underline{2n+7}, \underline{3n+7}, \dots$ correspondent au même élément à savoir $\underline{7}$. On munit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'une opération $+$, où $\bar{x} + \bar{y}$ est défini de la façon suivante : on calcule $x + y$ et on identifie ce résultat avec un élément de $\{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{n-1}\}$.

Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

Corrections.

1) La loi $+$ est associative, car faire $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$ ou faire $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ revient à calculer $x + y + z$ puis de regarder le chiffre des unités de ce résultat.

$+$ laisse $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ stable par construction car après addition, on récupère un nombre entre 0 et 9.

$\underline{0}$ est élément neutre.

Pour \bar{x} quelconque de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, posons $\bar{y} = \underline{10 - x}$. On a $x + y = 10$, donc $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x} = \underline{0}$, donc x possède un inverse pour la loi $+$, à savoir $\underline{10 - x}$.

Ainsi $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$ est un groupe qui est même commutatif, car l'addition toute simple sur \mathbb{R} l'est.

2) La loi $+$ est associative, car faire $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$ ou faire $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ revient à calculer $x + y + z$ puis d'identifier le résultat avec un élément de $\{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{n-1}\}$.

$+$ laisse $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ stable par construction car après addition, on identifie le résultat avec un élément de $\{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{n-1}\}$.

$\underline{0}$ est élément neutre.

Pour \bar{x} quelconque de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, posons $\bar{y} = \underline{-x}$. On a $x + y = 0$, donc $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x} = \underline{0}$, donc x possède un inverse pour la loi $+$, à savoir $\underline{-x}$. On peut remarquer que $\underline{-x}$ s'identifie $\underline{n - x}$, donc on aurait pu prendre $\bar{y} = \underline{n - x}$ et dans ce cas, on aurait eu $x + y = n$ et comme on a $\underline{n} = \underline{0}$, on obtient la même conclusion.

Ainsi $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

□