

Décomposition de fractions en éléments simples

N. Jacquet

Niveau : DE LA TERMINALE AUX MATHS DU SUPÉRIEUR

Difficulté : Moyenne

Durée : 1h à 1h30

Rubrique(s) : Algèbre (fractions rationnelles, systèmes linéaires)

Exercice 1. Nous allons faire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

sous la forme

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1},$$

où a et b sont deux nombres réels à déterminer.

1) Déterminer a et b de deux façons différentes :

– en regroupant au même dénominateur les deux termes de droite de l'égalité puis en identifiant terme à terme.

– en calculant la limite de $f(x) \times x$ en 0 puis la limite de $f(x) \times (x+1)$ en -1

2) En déduire la limite de la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Indications et Commentaires : Plus généralement, considérons la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x-x_i)},$$

où P est un polynôme de degré strictement inférieur à n et x_1, \dots, x_n sont des nombres complexes deux à deux distincts. On dit alors qu'il y a seulement des pôles simples et la fraction se décompose en éléments simples de la façon suivante

$$f(x) = \frac{a_1}{x-x_1} + \frac{a_2}{x-x_2} + \dots + \frac{a_n}{x-x_n}$$

Les valeurs des a_i peuvent être facilement obtenues par la technique de multiplication (la deuxième méthode de l'exercice, plus simple et rapide)

$$a_j = \lim_{x \rightarrow x_j} (x-x_j)f(x) = \frac{P(x_j)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x_j-x_i)}.$$

Ces décompositions en éléments simples sont bien pratiques, par exemple pour trouver des limites comme dans la dernière question, et surtout pour intégrer comme nous le verrons ensuite.

En fait, nous avons supposé pour l'instant qu'une telle décomposition existe, puis nous avons cherché à identifier les valeurs des coefficients. L'existence-même de ces décompositions nécessite de retrousser encore un peu ses manches. Dans le cas de « pôles simples », il suffit de vérifier que ça marche une fois

qu'on a trouvé le résultat, c'est à dire que le terme de droite réduit au même dénominateur coïncide bien avec le terme de gauche. Nous sommes amenés pour cela à montrer que deux polynômes sont égaux, et il suffit de montrer qu'ils sont égaux en un nombre suffisamment grand de points Les points x_i sont tout indiqués : à vous de jouer !

Corrections.

1) Méthode 1. On identifie en réduisant au même dénominateur le membre de droite

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} &= \frac{a(x+1) + bx}{x(x+1)} \\ &= \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)} \end{aligned}$$

Cette fraction rationnelle est égale à $f(x)$ ssi

$$a + b = 0 \quad \text{et} \quad a = 1.$$

En effet deux polynomes sont égaux ssi leur coefficients de même degré sont égaux deux à deux. On obtient donc ici

$$a = 1, \quad b = -1.$$

Méthode 2. On considère

$$f(x)x = \frac{1}{x+1} = a + \frac{bx}{x+1}$$

et en faisant tendre x vers zéro, on obtient

$$1 = a.$$

De manière similaire en faisant tendre x vers -1 dans l'égalité

$$f(x)(x+1) = \frac{1}{x} = \frac{a(x+1)}{x} + b,$$

on obtient

$$-1 = b.$$

2) On utilise la question précédente pour écrire que pour tout $k \geq 1$,

$$f(k) = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

En sommant ces égalités pour $k = 1, \dots, n$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

On a ici une somme télescopique, c'est à dire :

$$u_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \dots + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Or $1/(n+1)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Donc u_n tend vers 1 quand $n \rightarrow \infty$. □

Exercice 2. Nous allons faire la décomposition éléments simples de la fraction rationnelle suivante

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2},$$

où a , b et c sont trois nombres réels à déterminer. Pour cela, nous proposons plusieurs méthodes.

1) Déterminer a , b et c en regroupant au même dénominateur les deux termes de droite de l'égalité puis en identifiant terme à terme.

2.a) Déterminer a et c en calculant la limite de $f(x) \times x$ en 0 puis la limite de $f(x) \times (x+1)^2$ en -1 .

2.b) Déterminer b par deux méthodes différentes :

– en considérant la fraction rationnelle

$$g(x) = f(x) - \frac{a}{x} - \frac{c}{(x+1)^2}.$$

– en considérant

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x).$$

2.c) Quelle méthode vous semble la plus rapide pour calculer a, b, c ?

3) En déduire la valeur de

$$\int_1^2 f(x) dx.$$

Indications et Commentaires : 2.a) Réduire la fraction g au même dénominateur en remplaçant a et c par leurs valeurs et identifier le résultat à $b/(x+1)$.

Corrections.

1) Réduisons au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} &= \frac{a(x+1)^2 + bx(x+1) + cx}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^2 + 2ax + a + bx^2 + bx + cx}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(x+1)^2}. \end{aligned}$$

En identifiant à $f(x)$, les coefficients des polynômes du numérateur sont égaux et donc

$$\begin{cases} a + b = 0, & b = -a = -1 \\ 2a + b + c = 0, & c = -2a - b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Donc $a = 1$, $b = -1$ et $c = -1$.

2.a) Multiplions f par x :

$$xf(x) = \frac{1}{(x+1)^2} = a + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{(x+1)^2}$$

Donc en faisant tendre x vers 0, on obtient $1 = a$. De même, en multipliant f par $(x+1)^2$:

$$(x+1)^2 f(x) = \frac{1}{x} = \frac{a(x+1)^2}{x} + b(x+1) + c.$$

Donc en faisant tendre x vers -1 , on obtient $-1 = c$.

2.b) Première méthode.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \frac{a}{x} - \frac{c}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{x(x+1)^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1 - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1)(1 - (x+1))}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{-1}{x+1}. \end{aligned}$$

Or

$$g(x) = \frac{b}{x+1}$$

et en identifiant (ici, il suffit de considérer $x = 1$), on obtient $b = -1$.

Seconde méthode. En multipliant (encore) par x :

$$xf(x) = \frac{1}{(x+1)^2} = a + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{(x+1)^2}$$

et en faisant tendre x vers l'infini, on obtient

$$0 = a + b, \quad \text{donc } b = -a = -1.$$

2.c) La seconde méthode est ici un peu plus rapide, mais elle ne permet pas toujours de conclure, comme on le voit dans l'exercice suivant.

3) On utilise la décomposition en éléments simples établie précédemment :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

et en intégrant cette identité et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx - \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= [\ln x]_1^2 - [\ln(x+1)]_1^2 - \left[\frac{-1}{x+1} \right]_1^2 \\ &= \ln 2 - \ln 1 - (\ln 3 - \ln 2) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \ln 2 + \ln 3 - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

□

Exercice 3. Pour finir, effectuons la décomposition en éléments simples suivante

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2},$$

où a , b , c et d sont quatre nombres réels à déterminer.

1) Déterminer b et d en utilisant les limites de $f(x) \times x^2$ en 0 puis la limite de $f(x) \times (x-1)^2$ en 1.

2) Déterminer les valeurs de a et c par deux méthodes différentes :

– en décomposant la fraction rationnelle suivante en éléments simples (comme dans le premier exercice)

$$g(x) = \frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{b}{x^2} + \frac{d}{(x+1)^2},$$

– en utilisant

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) \quad \text{et} \quad f(-1).$$

3) En déduire pour tout $t \geq 1$ la valeur de

$$\int_1^t \frac{1}{x^2(x+1)^2} dx.$$

Indications et Commentaires : 2.a) Réduire la fraction rationnelle g au même dénominateur puis la décomposer en éléments simples comme dans le premier exercice (c'est à dire en considérant les limites de $xg(x)$ en 0 puis la limite de $(x-1)g(x)$ en 1). Il ne reste plus alors qu'à identifier avec

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

Dans cet exercice, on voit sur un cas particulier comment on peut décomposer en éléments simples une fraction rationnelle qui n'a pas que des pôles simples comme dans le premier exercice. Soit

$$f(x) = \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x-x_i)^{k_i}},$$

où $\{x_i : i = 1 \dots n\}$ sont des nombres complexes deux à deux distincts et $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$.

Si le degré du numérateur P est strictement inférieur au degré du dénominateur $\sum_{i=1}^n k_i$, alors

$$f(x) = \left[\frac{a_{1,1}}{x-x_1} + \dots + \frac{a_{1,k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} \right] + \left[\frac{a_{2,1}}{x-x_2} + \dots + \frac{a_{2,k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} \right] \\ + \dots + \left[\frac{a_{n,1}}{x-x_n} + \dots + \frac{a_{n,k_n}}{(x-x_n)^{k_n}} \right].$$

Si le degré du numérateur est supérieur ou égal à celui du dénominateur, on peut se ramener à la situation précédente en faisant une division euclidienne du polynôme au numérateur par celui au dénominateur.

Corrections.

1) On commence maintenant à être rompu à cette technique :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)^2} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} ax + b + \frac{cx}{x+1} + \frac{dx}{(x+1)^2} = b$$

donc $b = 1$. De même,

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2} = 1 = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{a(x+1)^2}{x} + \frac{b(x+1)^2}{x^2} + c(x+1) + d = d$$

et donc $d = 1$.

2) Méthode 1. On réduit au même dénominateur :

$$g(x) = \frac{1}{x^2(x+1)^2} - \frac{b}{x^2} - \frac{d}{(x+1)^2} \\ = \frac{1}{x^2(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ = \frac{1 - (x+1)^2 - x^2}{x^2(x+1)^2} \\ = \frac{-2x^2 - 2x}{x^2(x+1)^2} \\ = \frac{-2x(x+1)}{x^2(x+1)^2} \\ = \frac{-2}{x(x+1)}$$

Or, grâce au premier exercice nous savons déjà décomposer

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

et nous obtenons donc

$$g(x) = \frac{-2}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{a}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

Ainsi, les valeurs cherchées sont $a = -2$ et $c = 2$.

Méthode 2. En multipliant par x , nous obtenons

$$xf(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} = a + \frac{b}{x} + \frac{cx}{x+1} + \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

Ensuite, en prenant la limite quand x tend vers l'infini dans cette expression, nous en déduisons

$$0 = a + c.$$

Enfin, en considérant $f(1)$, nous avons

$$f(1) = \frac{1}{4} = a + b + \frac{c}{2} + \frac{d}{4} = a + 1 - \frac{a}{2} + \frac{1}{4}$$

et donc

$$a = -2, \quad c = 2.$$

3) Utilisons la décomposition en éléments simples :

$$f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

En intégrant cette identité et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^t f(x) dx &= -\int_1^t \frac{2}{x} dx + \int_1^t \frac{1}{x^2} dx + \int_1^t \frac{2}{x+1} dx - \int_1^t \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= -2[\ln x]_1^t + \left[\frac{-1}{x}\right]_1^t + 2[\ln(x+1)]_1^t + \left[\frac{1}{x+1}\right]_1^t \\ &= -2 \ln t - \frac{1}{t} + 1 + 2 \ln(t+1) - 2 \ln 2 + \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} \\ &= 2 \ln(t+1) - 2 \ln t - \frac{1}{t(t+1)} - 2 \ln 2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□