# Nombre de chemins sur un cube

N. Jacquet

**Niveau :** De la Terminale aux Maths Supérieures.

**Difficulté :** Assez difficile

**Durée :** 1h, voire plus.

**Rubrique(s) :** Dénombrement (Récurrence, Binôme de Newton)

---

**La petite histoire...**Une fourmi se déplace sur les arêtes d'un cube de côté de longueur 1. Cette fourmi se situe au départ sur l'un des sommets de ce cube et passe de sommet en sommet en parcourant les arêtes du cube. Dans ce problème, nous allons calculer le nombre $N_n$ de chemins différents de longueur $n$ qu'elle peut parcourir en revenant à la fin à sa position initiale.

**Exercice 1.**

**1)** Expliquer pourquoi pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de chemins $N_n$ de longueur $n$ revenant à la position de départ ne dépend pas du sommet de départ. Essayer de le prouver. (Cette propriété, qui paraît naturelle, est en fait difficile à prouver précisément.)

**2)** Quel est le nombre de chemins possibles pour la fourmi de longueur $1,\ 2,\ 3$ et $4$ qui reviennent à la fin à la position de départ ? Autrement dit, calculer $N_1,\ N_2,\ N_3$ et $N_4$.

**3)** Montrer qu'un chemin le long des arêtes du cube qui revient à la position initiale est forcément de longueur paire (c'est-à-dire que $N_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

**4)** Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On veut montrer par deux méthodes différentes que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{n-k}.$$

Nous rappelons la notation somme $\sum$ : $\sum_{k=0}^{p} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{p-1} + a_p$.

**a)** Utiliser une méthode de dénombrement ne faisant intervenir aucun calcul.

**b)** Utiliser une méthode faisant intervenir un raisonnement par récurrence.

**5)** Soient $x \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

**a)** Donner une expression simple de $\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k$.

**b)** En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{2k} x^{2k}$. Que devient cette formule pour $p = 0$ ?

**6)** Soit $q \in \mathbb{N}^*$.

**a)** Montrer que

$$\sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \left( \sum_{l=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2l} \right) = \frac{3^{2q}+3}{4}.$$

**b)** Faire le lien entre la formule précédente et le nombre de chemins que l'on cherche à déterminer. En déduire la solution de notre problème, c'est à dire calculer $N_n$.

**Indications et Commentaires** : 4.a) Développer $(a+b)^p = (a+b)(a+b)...(a+b)$ et regrouper les termes identiques.
4.b) Faire une récurrence sur $p$ grâce à $(a+b)^{p+1} = (a+b)^p(a+b)$.
5.b) Utiliser le développement de $(-x+1)^{2p} + (x+1)^{2p}$.
6.a) Commencer par prouver que

$$\sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \left( \sum_{l=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2l} \right) = 2^{2q-1} \sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}.$$

**Corrections.** 1) On sent bien que le nombre de possibilités qui s'offrent à la fourmi ne va pas dépendre de son sommet de départ. Simplement, les chemins empruntés ne seront pas les mêmes. Il y a des correspondances naturelles entre les chemins issus de sommets différents. Mathématiquement, on parle de bijection et cette propriété permet notamment de montrer comme ici que deux quantités sont égales. Essayons de préciser cela.
Supposons qu'on voit le cube de face. La fourmi peut se déplacer de six manières : droite, gauche, haut, bas, devant et derrière. Ainsi, les mouvements sont effectués suivant trois axes : horizontal (gauche/droite), vertical (bas/haut) et en profondeur (devant/derrière). De plus, en partant de n'importe quel sommet, lorsque la fourmi se déplace suivant un axe, elle n'aura jamais le choix. Par exemple, si elle part d'un sommet à droite du cube, la première fois qu'elle empruntera la direction horizontale, elle se déplacera nécessairement vers la gauche pour ne pas sortir du cube. Ensuite, lorsqu'elle se déplacera de nouveau suivant un axe horizontal, elle devra aller vers la droite. Ainsi un chemin peut être vu comme $n$ choix successifs d'axes. Le nombre de déplacements suivant chaque axe doit être pair pour être sûr de revenir au point de départ. Si on note $v$ l'axe vertical, $h$, l'axe horizontal et $p$ l'axe en profondeur, pour modéliser un chemin de longueur $n$, il faut choisir une succession de $n$ lettres parmi les lettres $v$, $h$ et $p$, chacune d'entre elles devant apparaître un nombre pair de fois. Par exemple, si la fourmi part d'un sommet situé devant en bas à gauche, le chemin de longueur 8 donné par *vhppphvp* se traduit par les déplacements $\uparrow\rightarrow\nearrow\swarrow\nearrow\leftarrow\downarrow\swarrow$. Cette façon de modéliser les chemins nous permet de voir que le nombre de chemins est indépendant du choix du sommet.
*On peut donner un argument plus mathématique. Pour passer d'un sommet $A$ à un sommet $B$, on peut effectuer plusieurs rotations du cube suivant ses diagonales. Ainsi, chaque chemin partant de $A$ et revenant sur $A$ est transformé par ces rotations en un chemin partant de $B$ et revenant sur $B$. En effectuant toutes ces rotations dans l'autre sens, on passe du sommet $B$ au sommet $A$ et on transforme chaque chemin partant de $B$ et revenant sur $B$ en un chemin partant de $A$ et revenant sur $A$. A chaque chemin partant de $A$ et revenant sur $A$ on peut donc faire correspondre un unique chemin partant de $B$ et revenant sur $B$ et le nombre de chemins est bien indépendant du sommet. En employant le vocabulaire qui sera utilisé après le bac, on peut dire que de telles rotations sont des isométries de l'espace laissant le cube invariant. La composition de telles applications permet d'établir une bijection entre l'ensemble des chemins partant de $A$ et revenant sur $A$ avec l'ensemble des chemins partant de $B$ et revenant sur $B$.*
2) On utilise les lettres de la question précédente. Bien sûr il n'existe pas de chemins de longueur 1 qui permet à la fourmi de revenir à la position initiale, puisqu'avec une longueur 1, elle ne peut que quitter sa position initiale pour un sommet voisin. Donc $N_1 = 0$.
Pour les chemins de longueur 2, on a les trois axes comme trajet possible :

$$vv \quad hh \quad pp,$$

c'est-à-dire 3 chemins possibles et $N_2 = 3$.
Il n'y a pas de chemin de longueur 3 qui permette de revenir au point de départ. Donc il y a zéro chemin : $N_3 = 0$.
Pour les chemins de longueur 4, on a

$$vvvv \quad pppp \quad hhhh$$

$$vvpp \quad vvhh \quad vpvp \quad vhvh \quad vppv \quad vhhp$$

$$pvvp \quad hvvh \quad pvpv \quad hvhv \quad ppvv \quad hhvv$$

$$pphh \quad phph \quad phhp \quad hpph \quad hphp \quad hhpp.$$

Il y a donc 21 chemins de longueur 4 : $N_4 = 21$.
3) Comme la fourmi doit revenir au point de départ, on a vu dans la première question que le nombre de déplacements suivant chaque axe doit être pair. Donc la longueur d'un chemin doit elle-même être paire.
4.a) On a $(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b)$, où l'on a $n$ facteurs $(a+b)$ . Quand on développe le produit, on prend dans le premier facteur l'un des deux termes $a$ ou $b$, on le multiplie par l'un des deux termes $a$ ou $b$ du second facteur, et ainsi de suite jusqu'au $n$-ième facteur. Le produit obtenu est égal à $a^k b^{n-k}$ si on a choisi le terme $a$ dans $k$ facteurs et le terme $b$ dans les $n-k$ autres. Le nombre de produits égaux à $a^k b^{n-k}$ est le nombre de choix de $k$ facteurs parmi $n$ , soit $\binom{n}{k}$. Donc le développement de $(a+b)^n$ conduit à la somme de termes de la forme $a^k b^{n-k}$ pour $k$ allant de 0 à $n$ et ce terme apparaît $\binom{n}{k}$ fois dans le développement. Finalement, en regroupant les termes on obtient :

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{n-k}.$$

4.b) Nous prouvons ici la formule par récurrence.
Initialisation. Montrons la formule pour $n = 0$.

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}.$$

Hérédité. Supposons que la formule est vraie pour $n$ et démontrons-la pour $n+1$ :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \quad \text{(grâce à l'hypothèse de récurrence)} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right) \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right) + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k}\right) + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons appliqué la formule du triangle de Pascal : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. Le résultat est démontré au rang $n+1$, ce qui achève la récurrence.
5.a) En utilisant la formule précédente pour $a = x$ et $b = 1$, on obtient

$$(x+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k 1^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k.$$

Pour $p = 0$, on a

$$\sum_{l=0}^{2\times 0} \binom{2\times 0}{l} (-x)^l = \binom{0}{0} (-x)^0 = 1.$$

5.b) En utilisant la formule de la question 4 en prenant $a = -x$ et $b = 1$, on obtient

$$(-x+1)^{2p} = \sum_{l=0}^{2p} \binom{2p}{l} (-x)^l 1^{2p-l} = \sum_{l=0}^{2p} \binom{2p}{l} (-x)^l.$$

Dans la formule obtenue dans la question 5.a), en remplaçant $p$ par $2p$, on obtient

$$(x+1)^{2p} = \sum_{l=0}^{2p} \binom{2p}{l} x^l 1^{2p-l} = \sum_{l=0}^{2p} \binom{2p}{l} x^l.$$

En additionnant ces deux formules, on arrive donc à

$$\begin{aligned}
(x+1)^{2p} + (-x+1)^{2p} &= \sum_{l=0}^{2p} \binom{2p}{l} x^l + \sum_{l=0}^{2p} \binom{2p}{l} (-x)^l \\
&= \sum_{l=0}^{2p} \binom{2p}{l} (x^l + (-x)^l) = \sum_{l=0}^{2p} \binom{2p}{l} (x^l + (-l)^l x^l) \\
&= \sum_{l=0}^{2p} \binom{2p}{l} x^l (1 + (-l)^l).
\end{aligned}$$

Si $l$ est pair alors $(-1)^l = 1$ et donc $1+(-1)^l = 2$. Si $l$ est impair alors $(-1)^l = -1$ et donc $1+(-1)^l = 0$. Ainsi dans la somme $\sum_{l=0}^{2p} \binom{2p}{l} x^l (1+(-l)^l)$, on ne garde que les termes pairs compris entre 0 et $2p$. Les nombres pairs compris entre 0 et $2p$ s'écrivent sous la forme $2k$ pour $k$ variant de 0 à $p$. Par conséquent,

$$(x+1)^{2p} + (-x+1)^{2p} = 2 \sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{2k} x^{2k},$$

soit

$$\frac{(x+1)^{2p} + (-x+1)^{2p}}{2} = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p}{2k} x^{2k}.$$

Pour $p = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{2\times 0}{2k} x^{2k} = \binom{2\times 0}{2\times 0} x^{2\times 0} = 0.$$

6.a) Soit $k \in \{0, ...q-1\}$ fixé. D'après la question 5.a) appliquée à $x = 1$,

$$\sum_{l=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2l} = \frac{(1+1)^{2(q-k)} + (-1+1)^{2p}}{2} = 2^{2(q-k)-1},$$

et pour $k = q$, on a

$$\sum_{l=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2l} = \sum_{l=0}^{0} \binom{2\times 0}{2l} = 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \left( \sum_{l=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2l} \right) &= \sum_{k=0}^{q-1} \binom{2q}{2k} \left( \sum_{l=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2l} \right) + \binom{2q}{2q} \left( \sum_{l=0}^{q-q} \binom{2(q-k)}{2l} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} \binom{2q}{2k} \left( \sum_{l=0}^{q-k} \binom{2(q-k)}{2l} \right) + 1 \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} \binom{2q}{2k} 2^{2(q-k)-1} + 1 \\
&= 2^{2q-1} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{2q}{2k} \frac{1}{2^k} + 1 \\
&= 2^{2q-1} \sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \frac{1}{2^k} - 2^{2q-1} \binom{2q}{2q} \frac{1}{2^q} + 1 \\
&= 2^{2q-1} \sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

En utilisant la question 5.b) en $x = \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} 2^{2q-1}\sum_{k=0}^{q}\binom{2q}{2k}\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2} &= 2^{2q-1}\frac{(\frac{1}{2}+1)^{2p}+(-\frac{1}{2}+1)^{2p}}{2}+\frac{1}{2} \\ &= 2^{2q-2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2q}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2q}\right)+\frac{1}{2} \\ &= \frac{3^{2q}+1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3^{2q}+3}{4}. \end{aligned}$$

6.b) D'après la première question, déterminer le nombre de chemins de longueur $n$ revient à placer les lettres $v$, $h$ et $p$ dans $n$ cases sachant que le nombre d'apparitions de chaque lettre doit être pair. Comme $n$ est pair, on peut écrire $n = 2q$ pour un certain entier $q$. Supposons que la lettre apparaisse $2k$ fois, pour $k \in \{0, ..., q\}$. Il y a $2k$ choix parmi $2q$ façons de placer la lettre $v$, soit $\binom{2q}{2k}$. Ensuite, il reste $2(q-k)$ emplacements libres pour placer les lettres $h$ et $p$. Supposons que la lettre $h$ apparaisse $2l$ fois, avec $l \in \{0, ..., q-k\}$. Il y a donc $2l$ choix parmi $2(q-k)$ façons de placer la lettre $h$, soit $\binom{2(q-k)}{2l}$. Enfin il ne reste plus de choix pour placer la dernière lettre $p$. Finalement, il y a $\binom{2q}{2k}\binom{2(q-k)}{2l}$ possibilités pour que la lettre $v$ apparaisse $2k$ fois et la lettre $h$ $2l$ fois.
On obtient alors tous les chemins possibles lorsque $k$ varie dans $\{0, ..., q\}$ et $l$ varie dans $\{0, ..., q-k\}$. Le nombre de chemins est donc donné par

$$\sum_{k=0}^{q}\sum_{l=0}^{q-k}\binom{2q}{2k}\binom{2(q-k)}{2l}=\sum_{k=0}^{q}\binom{2q}{2k}\left(\sum_{l=0}^{q-k}\binom{2(q-k)}{2l}\right)=\frac{3^{2q}+3}{4}=\frac{3^n+3}{4}.$$

Autrement dit, il y a $\dfrac{3^n+3}{4}$ chemins possibles si $n$ est pair et 0 chemin si $n$ est impair.
*En remplaçant $n$ par 2 dans la formule précédente on trouve 3 et remplaçant $n$ par 4, on trouve $(3^4+3)/4 = (81+3)/4 = 21$, ce qui est cohérent avec le résultat de la question 2 et permet de **vérifier un peu** notre résultat.* $\square$