

Intégration

V. Langlet

Niveau : DE LA TERMINALE AUX MATHS DU SUPÉRIEUR

Difficulté : Assez classique, pas de grosse difficulté

Durée : Une heure environ

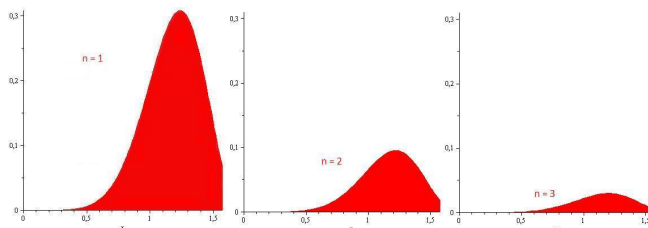
Rubrique(s) : Analyse (Calcul d'intégrales)

Exercice 1. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(t^2)}{(2+t)^n} dt.$$

Indications et Commentaires : Majorer la valeur absolue de cette intégrale.

Nous prouvons ici qu'une suite d'intégrales tend vers zéro. C'est quelque chose qui se dessine bien : une intégrale est l'aire sous une courbe. Ici, la fonction que l'on intègre dépend de n et elle s'écrase sur l'axe des abscisses quand n devient grand. En s'écrasant, l'aire sous cette courbe disparaît et l'intégrale tend vers zéro. Ce résultat du type "si la fonction tend vers zéro, alors son intégrale tend vers zéro" peut se généraliser, en prenant quelques précautions (convergence uniforme sur un segment ou théorème de convergence dominée, niveau L2).



Corrections. Comme la valeur absolue de l'intégrale d'une fonction est toujours inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue de cette fonction, nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(t^2)}{(2+t)^n} dt \right| &\leq \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\sin^3(t^2)}{(2+t)^n} \right| dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(2+t)^n} dt \\ &\leq \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{(2+t)^{n-1}} \right]_0^{\pi/2} \\ &\leq \frac{1}{n-1} \left[\frac{-1}{(2+\pi/2)^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} \right] \leq \frac{1}{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

En effet, la deuxième inégalité utilise le fait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \leq 1$ et la troisième que $t \mapsto (2+t)^n$ est une fonction positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Maintenant,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = 0,$$

ce dont nous pouvons déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(t^2)}{(2+t)^n} dt = 0.$$

□

Exercice 2. Soient $\alpha < \beta$. Calculer $I_{n,m}$, définie pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$ par

$$I_{n,m} = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^n (x - \beta)^m dx.$$

Indications et Commentaires : Trouver une relation de récurrence en utilisant une intégration par parties. On rappelle que si u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Corrections. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$. En posant $u(x) = (x - \alpha)^n$ et $v(x) = \frac{1}{m+1}(x - \beta)^{m+1}$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, on a bien u et v dérivables, $u'(x) = n(x - \alpha)^{n-1}$ et $v'(x) = (x - \beta)^m$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^n (x - \beta)^m dx &= \left[\frac{(x - \alpha)^n (x - \beta)^{m+1}}{m+1} \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} n(x - \alpha)^{n-1} \frac{(x - \beta)^{m+1}}{m+1} dx \\ &= -\frac{n}{m+1} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^{n-1} (x - \beta)^{m+1} dx \end{aligned}$$

Ceci nous donne pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n,m} = -\frac{n}{m+1} I_{n-1,m+1}.$$

En itérant le procédé, on arrive à

$$I_{n,m} = (-1)^n \frac{n! m!}{(n+m)!} I_{0,n+m}.$$

De plus, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$I_{0,n+m} = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \beta)^{n+m} dx = \left[\frac{(x - \beta)^{n+m+1}}{n+m+1} \right]_{\alpha}^{\beta} = (-1)^{n+m} \frac{(\beta - \alpha)^{n+m+1}}{n+m+1},$$

d'où

$$I_{n,m} = (-1)^m \frac{n! m!}{(n+m+1)!} (\beta - \alpha)^{n+m+1}.$$

□

Exercice 3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1) Montrer que $I_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

2) Montrer que $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

3) En déduire que $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Indications et Commentaires : Pour la question 1), trouver un encadrement simple de I_n .

La question 2) se fait par intégration par parties et la 3) en itérant la relation de récurrence de la question 2).

Corrections.

1) Pour tout $x \in [0, 1]$, nous avons l'encadrement suivant :

$$0 \leq \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \leq \frac{e}{n!}.$$

Par conséquent,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx \leq \frac{e}{n!}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n!} = 0$, le théorème des gendarmes (ou du sandwich) nous donne que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

2) Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx \\ &= \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x dx \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}. \end{aligned}$$

3) Par itération de la formule précédente, nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = I_0 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}.$$

Cette relation se prouve facilement par récurrence. Par ailleurs,

$$I_0 = \int_0^1 \frac{(1-0)^0}{0!} e^x dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

Nous en déduisons donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Ainsi, en utilisant la question 1) on obtient bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e.$$

□