Limites finies

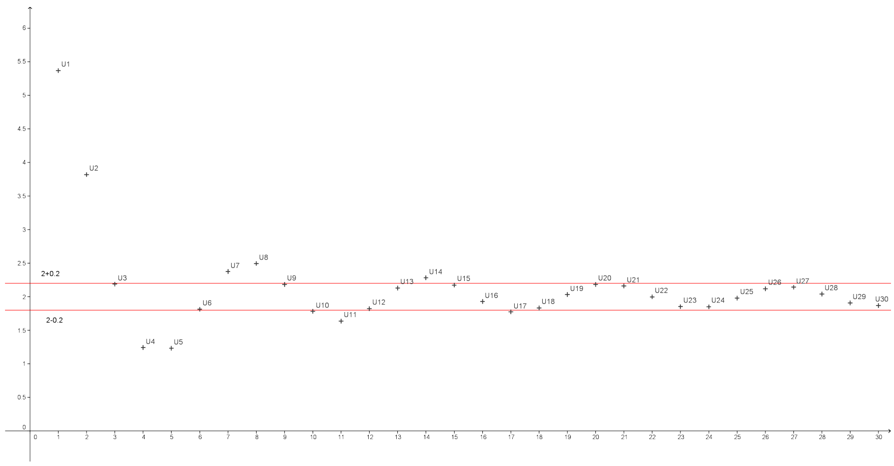
N. Jacquet

Niveau : De la Terminale aux Maths du supérieur
Difficulté : Difficile
Durée : 2 à 3 heures
Rubrique(s) : Suites, avec un peu de formalisme

La petite histoire...
Dans ce problème, nous allons donner une définition de la limite un peu plus rigoureuse que celle que vous avez vue en classe. Dans un premier temps, nous manipulerons cette nouvelle définition sur des exemples. Ensuite nous verrons comment résoudre certains problèmes de limite que vous ne pouviez pas vraiment résoudre avant.

Intuitivement, dire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$ signifie que lorsque n est de plus en plus grand, les réels u_n correspondants viennent s'accumuler autour de l.

Plus rigoureusement, $\lim_{n\to+\infty} \cdots = l$ signifie que tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, pour tout intervalle de la forme $I =]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ (avec ε strictement positif), il existe un rang N_0 tel que pour n plus grand que N_0, u_n se trouve dans I. Ainsi, lorsque ε devient de plus en plus petit, les termes de la suite « se collent » de plus en plus au réel l.
Par exemple pour la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \frac{4}{n}\sin(n)$, que l'on a représentée ci-dessous, on a pris $\varepsilon = 0.2$ et on peut constater que tous les termes à partir du rang 18 sont dans l'intervalle $]2-0.2, 2+0.2[=]1.8, 2.2[$.



Attention dans l'exemple précédent, on a pris une valeur particulière de ε, mais pour prouver que $\lim_{n\to+\infty} \cdots = 2$, il faudra avoir la propriété de l'exemple précédent pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$. De plus, il faut bien noter que le rang N_0 dépend de ε, car plus on est proche de la limite (c'est-à-dire plus ε est petit), et plus il faudra chercher loin les termes de la suite situés dans l'intervalle $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$. Si on reprend l'exemple précédent, pour $\varepsilon = 0.1$, N_0 sera au moins égal à 28.

Exercice 1 (Travail sur la définition).

1.a) Reprenons la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \frac{4}{n}\sin(n)$. Montrer par le calcul qu'à partir d'un certain rang, on a $1.9 < u_n < 2.1$ et donner ce rang (on ne cherche pas forcément le plus petit rang, nous voulons juste un rang N_0 tel que l'on soit sûr d'avoir u_n dans $]1.9, 2.1[$, pour $n \geqslant N_0$).

b) Avec cette même suite, montrer que pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$, il existe un rang N_0 à partir duquel $u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$.

c) Que vient-on de prouver ?

2) Voici un exemple dans lequel on montre que la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Nous voulons trouver un N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$ on a la propriété $1 + \frac{1}{n} \in]1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon[$. Ceci revient à avoir pour tout $n \geqslant N_0$

$$1 - \varepsilon < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon, \qquad \text{i.e.} \qquad -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon, \qquad \text{i.e.} \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

car $\frac{1}{n}$ est toujours strictement positif. On veut donc trouver N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $\frac{1}{\varepsilon} < n$, puisque la fonction inverse est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, il suffit de choisir un entier N_0 strictement plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$. En utilisant la décroissance de la fonction inverse, on a alors pour tout $n \geqslant N_0$, $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N_0} < \varepsilon$ et donc pour tout $n \geqslant N_0$,

$$-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{soit encore} \quad 1 - \varepsilon < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$1 + \frac{1}{n} \in]1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon[.$$

Ceci prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$.

Copier cet exemple pour prouver que l'on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(13 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 13$.

Indications et Commentaires : 1.a) Montrer d'abord que l'on cherche N_0 à partir duquel on a : $\left|\frac{4}{n}\sin(n)\right| < 0.1$. Puis montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $\left|\frac{4}{n}\sin(n)\right| \leqslant \frac{4}{n}$ et choisir N_0 en conséquence.
1.b) Reprendre les calculs précédents en remplaçant 0.1 par ε.

Corrections.

1.a) Nous devons chercher un N_0 tel que pour tout n plus grand que N_0, on ait : $1.9 < 2 + \frac{4}{n}\sin(n) < 2.1$ soit $-0.1 < \frac{4}{n}\sin(n) < 0.1$, soit encore $\left|\frac{4}{n}\sin(n)\right| < 0.1$.
Cherchons d'autre part un encadrement de $\frac{4}{n}\sin(n)$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ et comme $\frac{4}{n}$ est positif, on a $-\frac{4}{n} \leqslant \frac{4}{n}\sin(n) \leqslant \frac{4}{n}$ et donc $\left|\frac{4}{n}\sin(n)\right| \leqslant \frac{4}{n}$. On veut donc avoir $\frac{4}{n} < 0.1$, soit $\frac{n}{4} > \frac{1}{0.1} = 10$, i.e. $n > 40$. On pose donc $N_0 = 41$. Soit n plus grand que N_0. On a $n > 40$, donc $\frac{n}{4} > 10$ et donc $\frac{4}{n} < 0.1$, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, $\left|\frac{4}{n}\sin(n)\right| \leqslant \frac{4}{n} < 0.1$ et pour tout n plus grand que 41, on a bien $u_n \in]1.9, 2.1[$.

b) On reprend les calculs précédents en remplaçant 0.1 par ε quelconque. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On veut trouver les entiers n tels que $\left|\frac{4}{n}\sin(n)\right| < \varepsilon$. Il est suffisant d'avoir $\frac{4}{n} < \varepsilon$, soit $\frac{n}{4} > \frac{1}{\varepsilon}$, autrement dit $n > \frac{4}{\varepsilon}$. Soit N_0 un entier strictement supérieur à $\frac{4}{\varepsilon}$. Si n plus grand que N_0, $n \geqslant N_0 > \frac{4}{\varepsilon}$ et donc $\frac{4}{n} < \varepsilon$. Ceci nous donne $\left|\frac{4}{n}\sin(n)\right| \leqslant \frac{4}{n} < \varepsilon$ et donc pour tout n plus grand que N_0, on a la propriété $u_n \in]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[$.

c) On vient de prouver que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

2) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Nous voulons trouver un N_0 tel que l'on ait pour tout $n \geqslant N_0$ la propriété $13 + \frac{1}{\sqrt{n}} \in]13 - \varepsilon; 13 + \varepsilon[$. Ceci revient à avoir pour tout $n \geqslant N_0$

$$13 - \varepsilon < 13 + \frac{1}{\sqrt{n}} < 13 + \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad -\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

puisque $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est toujours strictement positif. On veut donc que pour tout $n \geqslant N_0$, $\frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n}$ (la fonction inverse est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$), ou de manière équivalente $\frac{1}{\varepsilon^2} < n$, puisque la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour que cette propriété soit vérifiée, il suffit donc de choisir un entier N_0 strictement plus grand que $1/\varepsilon^2$. Prenons-en un, par exemple le plus petit entier strictement supérieur à $1/\varepsilon^2$. Alors, pour tout $n \geqslant N_0$, on a bien $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N_0} < \varepsilon^2$, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. En invoquant pour finir la stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, on arrive à $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Par conséquent, pour tout $n \geqslant N_0$, on a $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, d'où $13 - \varepsilon < 13 + \frac{1}{\sqrt{n}} < 13 + \varepsilon$, ce qui équivaut encore à

$$\forall n \geqslant N_0, \qquad 13 + \frac{1}{\sqrt{n}} \in]13 - \varepsilon; 13 + \varepsilon[.$$

Ceci prouve que $\lim_{n \to +\infty} \left(13 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 13$. □

Exercice 2 (Divergence de la série harmonique).

On pose (S_n), la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Nous allons montrer que cette suite diverge, ce qui signifie qu'elle n'admet pas de limite finie (en fait, elle tend vers $+\infty$).

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S'_n = S_{2n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

Nous allons montrer que la suite (S_n) diverge par un raisonnement par l'absurde. Nous supposons donc qu'elle converge, à savoir qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \to +\infty} S_n = l$.

a) Montrer que l'on peut trouver $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $l - \frac{1}{4} < S_p < l + \frac{1}{4}$ et $l - \frac{1}{4} < S'_p < l + \frac{1}{4}$.

b) Montrer que $S'_p - S_p$ est la somme de p termes tous plus grands que $\frac{1}{2p}$. En déduire que l'on a $S'_p - S_p \geqslant \frac{1}{2}$.

c) Montrer que l'on obtient une contradiction et conclure.

Indications et Commentaires : a) Utiliser la définition de la limite pour la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$. On note N_0 le rang associé à ce ε. Remarquer que si n est plus grand que N_0, alors $2n$ l'est aussi.
b) Pour la minoration de chaque terme de la somme, remarquer que $p+1,\ p+2,\ \ldots,2p$ sont plus petits que $2p$. Pour la minoration de $S'_p - S_p$, se rappeler qu'on a la somme de p termes tous plus grands que $\frac{1}{2p}$.
c) Grâce à la première question, montrer qu'on a $S'_p - S_p < \frac{1}{2}$. En déduire une contradiction.

Corrections.

a) En prenant la définition de la limite pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$, il existe N_0 tel que pour $n \geqslant N_0$, on a $S_n \in]l - \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4}[$. On pose $p = N_0$. On a bien $p \geqslant N_0$ et $2p \geqslant 2N_0 \geqslant N_0$ et par conséquent S_p et $S_{2p} = S'_p$ sont dans $]l - \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4}[$. On a donc $l - \frac{1}{4} < S_p < l + \frac{1}{4}$ et $l - \frac{1}{4} < S'_p < l + \frac{1}{4}$.

b) On a

$$S'_p - S_p = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \cdots + \frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \cdots + \frac{1}{p+p}.$$

Cette dernière écriture permet de voir que la somme est composée d'exactement p termes.

Or, $p+1,\ p+2,\ \dots, 2p$ sont tous des entiers inférieurs à $2p$. Donc en passant à l'inverse, on obtient par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{p+1},\ \frac{1}{p+2}, \dots, \frac{1}{2p} \geqslant \frac{1}{2p}.$$

Ainsi, $S'_p - S_p$ est la somme de p termes plus grands que $\frac{1}{2p}$, cette somme est donc minorée par $p \times \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}$. Au final, $S'_p - S_p \geqslant \frac{1}{2}$.

c) Grâce à la première question, on sait que

$$-l - \frac{1}{4} < -S_p < -l + \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad l - \frac{1}{4} < S'_p < l + \frac{1}{4}.$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient $-\frac{1}{2} < S'_p - S_p < \frac{1}{2}$ et donc $S'_p - S_p < \frac{1}{2}$. Ceci est en contradiction avec le résultat de la question précédente. Par conséquent, la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ n'admet pas de limite.

□

Exercice 3 (Quelques propriétés).

1) Nous allons montrer qu'une suite admet au plus une limite. Le fait que l'on ait besoin de le montrer peut paraître surprenant, vu le caractère intuitif de cette propriété, mais chose prouvée, chose vraie ...
Nous allons raisonner par l'absurde. Nous supposons qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ admette deux limites différentes l et l'. On peut supposer que $l < l'$, quitte à intervertir le rôle de l et l'.

a) On pose $d = \frac{l'-l}{2}$. Montrer que l'on peut trouver un terme u_p de la suite se trouvant à la fois dans $]l-d; l+d[$ et $]l'-d; l'+d[$ et faire un dessin de la situation.

b) La propriété précédente est-elle vraiment possible ? Le prouver. Qu'en conclut-on ?

2) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite. Soient $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous voulons montrer que les suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ ont pour limite l si et seulement si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ admet l pour limite.

a) Écrire les premiers termes des suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$.

b) On suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ admet l pour limite. Montrer que les suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ ont pour limite l, à l'aide de notre définition de la limite.

c) Réciproquement, on suppose que les suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ ont pour limite l. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ a pour limite l, à l'aide de notre définition de la limite.

3) Nous allons appliquer le résultat précédent pour trouver de manière simple des limites.

a) Montrer que la suite $((-1)^n)_{n\geqslant 1}$ n'admet pas de limite.

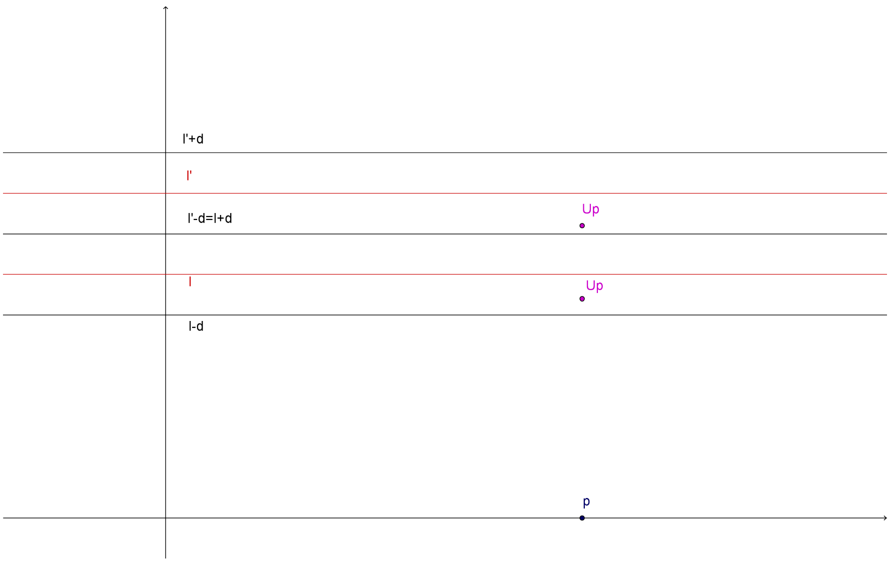
b) Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n+(-1)^n}\right)_{n\geqslant 1}$ admet une limite, puis montrer que la suite $\left(\frac{1}{n+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}\right)_{n\geqslant 1}$ admet aussi une limite.

Indications et Commentaires : 1.a) Reprendre la définition de la limite pour l et l', avec $\varepsilon = d$.
1.b) Montrer que $u_p < l + d = l' - d < u_p$.
2.b) Reprendre la définition de la limite pour $(u_n)_{n\geqslant 1}$. On note N_0 le rang associé à un ε. Montrer à l'aide de notre définition de la limite que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$. Remarquer que pour ces deux suites, un rang convenable pour avoir v_n et w_n dans $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ est N_0, car pour n plus grand que

N_0, on a toujours $2n$ et $2n+1$ plus grands que N_0.
2.c) Reprendre la définition de la limite pour $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$. On note N_1 (respectivement N_2) le rang associé à un ε pour $(v_n)_{n\geqslant 1}$ (respectivement pour $(w_n)_{n\geqslant 1}$). Considérer un entier N_0 plus grand que $2N_1$ et $2N_2+1$ et montrer que u_n est dans $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$, dès lors que $n \geqslant N_0$. Il faudra faire une distinction de cas suivant la partité de n.
3.a) Utiliser la question 2.b).
3.b) Utiliser la question 2.c).

Corrections.

1.a) On remarque pour commencer que $d > 0$. On peut donc utiliser la définition de la limite pour l et l' avec $\varepsilon = d$. Ainsi, il existe un rang N_0 tel que pour $n \geqslant N_0$, on a $u_n \in]l-d, l+d[$. De même, il existe un rang N_0' tel que pour $n \geqslant N_0'$ on a $u_n \in]l'-d, l'+d[$. Il suffit alors de choisir p plus grand que N_0 et N_0' pour conclure que $u_p \in]l-d, l+d[\cap]l'-d, l'+d[$.
Graphiquement, on peut représenter ceci de la manière suivante :



b) Comme u_p est dans $]l-d, l+d[$, on a $u_p < l+d = l + \frac{l'-l}{2} = \frac{l'+l}{2}$. De plus, u_p' est dans $]l'-d, l'+d[$ et donc $u_p > l'-d = l' - \frac{l'-l}{2} = \frac{l'+l}{2}$. Ceci nous donne $u_p < \frac{l'+l}{2} < u_p$, ce qui est impossible.
Finalement, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne peut avoir deux limites distinctes, ce qui est rassurant !

2.a) On a $v_0 = u_0,\ v_1 = u_2,\ v_2 = u_4,\ v_3 = u_6, \ldots$ et $w_0 = u_1,\ w_1 = u_3,\ w_2 = u_5,\ w_3 = u_7, \ldots$.

b) Montrons d'abord que $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un rang N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Or, si n est plus grand que N_0, on a aussi $2n \geqslant 2N_0 \geqslant N_0$ et donc $u_{2n} \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$, soit encore $v_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$.
On a donc montré que pour tout intervalle de la forme $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$, on peut trouver un rang N_0 à partir duquel tous les termes de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont dans $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$, d'où on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Montrons ensuite que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un rang N_0 tel que pour $n \geqslant N_0$, $u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Une fois de plus, si $n \geqslant N_0$ on a également $2n+1 \geqslant 2n \geqslant 2N_0 \geqslant N_0$ et donc $u_{2n+1} \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Autrement dit, $w_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$.
On a donc montré que pour tout intervalle de la forme $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$, on peut trouver un rang N_0 à partir duquel tous les termes de la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ sont dans $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$.

c) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un rang N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$, $v_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Par ailleurs, il existe aussi un rang N_2 tel que pour $n \geqslant N_2$, $w_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$.
Choisissons un entier N_0 plus grand que $2N_1$ et $2N_2+1$. Pour tout $n \geqslant N_0$, on a deux cas possibles :
Premier cas : n est pair.
Alors $u_n = u_{2\frac{n}{2}} = v_{\frac{n}{2}}$. L'inégalité $n \geqslant N_0$ implique l'inégalité $\frac{n}{2} \geqslant \frac{N_0}{2} \geqslant \frac{2N_1}{2} = N_1$, donc $v_{\frac{n}{2}}$ se trouve

dans $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ et par conséquent u_n est dans ce même intervalle.

Deuxième cas : n est impair

On a $u_n = u_{2\frac{n-1}{2}+1} = w_{\frac{n-1}{2}}$ ($n-1$ est pair). L'inégalité $n \geqslant N_0$ implique l'inégalité $\frac{n-1}{2} \geqslant \frac{N_0-1}{2} \geqslant \frac{2N_2+1-1}{2} = N_2$, donc $w_{\frac{n-1}{2}}$ appartient à $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ et finalement u_n est dans ce même intervalle.

Dans les deux cas, et donc dans tous les cas, on a l'implication : $n \geqslant N_0 \Rightarrow u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. En utilisant la définition de la limite, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

3.a) Considérons $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$. Or, grâce à la question 2.b) on sait que si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ avait une limite, alors les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ auraient la même limite, ce qui n'est pas le cas. Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'admet pas de limite.

b) On pose $v_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$, pour $n \geqslant 2$. On a $v_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ et $v_{2n+1} = \frac{1}{2n+1-1} = \frac{1}{2n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1} = 0$, ce qui permet de conclure grâce à 2.c) que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Ensuite, pour tout $n \geqslant 1$ on pose $w_n = \frac{1}{n+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$. On a cette fois

$$w_{2n} = \frac{1}{2n+\cos\left(\frac{2n\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2n+\cos(n\pi)} = \frac{1}{2n+(-1)^n}.$$

En utilisant la même méthode que pour $(v_n)_{n\geqslant 1}$, on montre que alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n} = 0$.

Par ailleurs,

$$w_{2n+1} = \frac{1}{2n+1+\cos\left(\frac{2n+1\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2n+1+\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2n+1}.$$

On a donc immédiatemment $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n+1} = 0$.

En utilisant encore la question 2.c), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. $\square$