Sommes de puissances d'entiers

V. Bansaye

Niveau : De la Terminale aux Maths du supérieur

Difficulté : Moyenne

Durée : 1h à 1h30

Rubrique(s) : Analyse (Calcul, Suites, Récurrence)

La petite histoire... Le petit Gauss était (paraît-il) un élève dissipé. Pour avoir un peu la paix, son professeur lui demanda un jour d'effectuer la somme des 100 premiers entiers naturels, c'est-à-dire de calculer la valeur de $1+2+3+\cdots+100$. Mais à sa grande surprise, le petit Gauss lui donna tout de suite une réponse... Et elle était juste ! Il lui demanda alors de calculer la somme des 1000 premiers entiers. La réponse vint presque aussi vite. Il compliqua alors l'exercice et lui demanda de calculer la somme des carrés des 1000 premiers entiers... Au bout de quelques instants, la réponse lui parvint à nouveau. Juste également !
Nous allons ici donner la méthode pour calculer d'un coup la somme d'entiers consécutifs élevés à une certaine puissance.

Exercice 1.

1) Commençons par la première astuce du petit Gauss.

a) Calculer la valeur de $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$ en écrivant cette somme à l'endroit puis à l'envers :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1. \end{array}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Utiliser la méthode ci-dessus pour calculer $S_n = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n$ en fonction de n.

c) On propose une autre méthode, qui a l'avantage de pouvoir se généraliser. Sommer les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} 1^2 & = & (0+1)^2 = 0^2 + 2\cdot 0\cdot 1 + 1^2 \\ 2^2 & = & (1+1)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1^2 \\ 3^2 & = & (2+1)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 1 + 1^2 \\ 4^2 & = & (3+1)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 1 + 1^2 \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-2)^2 & = & (n-3+1)^2 = (n-3)^2 + 2\cdot(n-3)\cdot 1 + 1^2 \\ (n-1)^2 & = & (n-2+1)^2 = (n-2)^2 + 2\cdot(n-2)\cdot 1 + 1^2 \\ n^2 & = & (n-1+1)^2 = (n-1)^2 + 2\cdot(n-1)\cdot 1 + 1^2 \\ (n+1)^2 & = & (n+1)^2 = n^2 + 2\cdot n\cdot 1 + 1^2 \end{array}$$

et justifier que l'on obtient

$$(n+1)^2 = 0^2 + 2.S_n.1 + (n+1).1$$

Retrouver alors la valeur de S_n.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notre but est maintenant de calculer la somme des carrés :

$$V_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2.$$

a) Méthode 1. Calculer V_n en s'inspirant de la méthode précédente.

b) Méthode 2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n = n(n+1)(2n+1)/6.$$

3) On s'intéresse maintenant aux cubes.

a) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4$.

b) Que faut-il faire pour calculer $W_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + (n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3$?

Indications et Commentaires : 1.a) Sommer les deux égalités terme à terme : on voit que chaque colonne vaut 101.

2.a) Sommer les égalités $(k+1)^3 = k^3 + 3 \cdot k^2 \cdot 1 + 3 \cdot k \cdot 1 + 3 \cdot 1$ pour k allant de 0 à n.

3.b) De manière similaire, on somme les égalités $(k+1)^4 = k^4 + 4 \cdot k^3 \cdot 1 + 6 \cdot k^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot k \cdot 1^3 + 1$ pour k allant de 0 à n.

Corrections.

1.a) En sommant les deux égalités, on obient $2S$ à gauche. À droite, on remarque que $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \cdots = 98 + 3 = 99 + 2 = 100 + 1 = 101$. Donc on obtient 100 fois le terme 101, c'est-à-dire 100×101. L'égalité devient $2S = 100 \times 101 = 10100$, d'où $S = 5050$.

b) De même on somme les deux égalités

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\ S_n & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

et on obtient

$$2S_n = (n+1) \ + (n+1) \ + (n+1) \ + \quad \cdots \quad (n+1) \ + (n+1) \ + (n+1) = n \cdot (n+1).$$

D'où $S_n = n(n+1)/2$.

c) En sommant les égalités, beaucoup de termes sont des deux côtés de l'égalité et se simplifient :

$$\begin{array}{rclcccc} 1^2 & = & 0^2 & + & 2 \cdot 0 \cdot 1 & + & 1^2 \\ 2^2 & = & 1^2 & + & 2 \cdot 1 \cdot 1 & + & 1^2 \\ 3^2 & = & 2^2 & + & 2 \cdot 2 \cdot 1 & + & 1^2 \\ 4^2 & = & 3^2 & + & 2 \cdot 3 \cdot 1 & + & 1^2 \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ (n-2)^2 & = & (n-3)^2 & + & 2 \cdot (n-3) \cdot 1 & + & 1^2 \\ (n-1)^2 & = & (n-2)^2 & + & 2 \cdot (n-2) \cdot 1 & + & 1^2 \\ n^2 & = & (n-1)^2 & + & 2 \cdot (n-1) \cdot 1 & + & 1^2 \\ (n+1)^2 & = & n^2 & + & 2 \cdot n \cdot 1 & + & 1^2 \end{array}$$

À gauche, il reste uniquement $(n+1)^2$.

À droite, dans la première colonne, il reste juste 0^2. Dans la colonne du milieu tous les termes sont présents et leur somme vaut $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n) = 2S_n$. Dans la colonne de droite, tous les termes sont également présents et on compte donc $(n+1)$ fois 1. On obtient donc

$$(n+1)^2 = 0 + 2S_n + (n+1),$$

et donc

$$S_n = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

On pourrait également raisonner à l'aide du signe $\sum$, appelé signe somme. En effet, pour tout entier naturel k, $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + 2S_n + \sum_{k=0}^{n} 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k^2 &= 2S_n + (n+1) \\
\Leftrightarrow (n+1)^2 &= 2S_n + (n+1) \\
\Leftrightarrow S_n &= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

2) On utilise le fait que $(k+1)^3 = k^3 + 3\cdot k^2 \cdot 1 + 3 \cdot k \cdot 1 + 3 \cdot 1$ pour écrire :

$$\begin{array}{ccll}
1^3 & = & (0+1)^3 & = 0^3 + 3\cdot 0^2 \cdot 1 + 3\cdot 0 \cdot 1^2 + 1^3 \\
2^3 & = & (1+1)^2 & = 1^3 + 3\cdot 1^2 \cdot 1 + 3\cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3 \\
3^3 & = & (2+1)^3 & = 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot 1 + 3\cdot 2 \cdot 1^3 + 1^3 \\
4^3 & = & (3+1)^3 & = 3^3 + 3\cdot 3^2 \cdot 1 + 3\cdot 3 \cdot 1^3 + 1^3 \\
\ldots & & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n-2)^3 & = & (n-3+1)^3 & = (n-3)^3 + 3\cdot(n-3)^2\cdot 1 + 3\cdot(n-3)\cdot 1^2 + 1^3 \\
(n-1)^3 & = & (n-2+1)^3 & = (n-2)^3 + 3\cdot(n-2)^2\cdot 1 + 3\cdot(n-2)\cdot 1^2 + 1^3 \\
n^3 & = & (n-1+1)^3 & = (n-1)^3 + 3\cdot(n-1)^2\cdot 1 + 3\cdot(n-1)\cdot 1^2 + 1^3 \\
(n+1)^3 & = & (n+1)^3 & = n^3 + 3\cdot n^2 \cdot 1 + 3\cdot n \cdot 1^2 + 1^3 \\
\hline
(n+1)^3 & = & \cdots & = 0^3 + 3(0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2) + 3(0+1+2+\cdots+n) + (1+\cdots+1)
\end{array}$$

La dernière ligne est à nouveau obtenue en sommant les égalités. Elle donne

$$(n+1)^3 = 0 + 3\cdot V_n + 3 \cdot S_n + (n+1).$$

Or d'après la question précédente, on sait que $S_n = (n+1)n/2$, d'où

$$\begin{aligned}
V_n &= \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 3\frac{(n+1)n}{2} - (n+1)\right] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)[2(n+1)^2 - 3n - 2] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)[2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)n(2n+1).
\end{aligned}$$

3.a) On développe et on regroupe les termes identiques :

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= \left[(a+b)^2\right]^2 \\
&= \left[a^2 + 2ab + b^2\right]\left[a^2 + 2ab + b^2\right] \\
&= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 \\
&= a^4 + 4\cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $(a+b)^4 = a^4 + 4\cdot a^3\cdot b + 6\cdot a^2 \cdot b^2 + 4\cdot a\cdot b^3 + b^4$.

b) On somme à nouveau $(k+1)^4 = k^4 + 4\cdot k^3 \cdot 1 + 6 \cdot k^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot k \cdot 1^3 + 1$ pour k allant de 0 à n. En notant $\sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme des u_k pour $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1,n\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 &= \sum_{k=0}^{n}(k^4 + 4\cdot k^3 \cdot 1 + 6\cdot k^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot k \cdot 1^3 + 1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^4 + \sum_{k=0}^{n} 4\cdot k^3 \cdot 1 + \sum_{k=0}^{n} 6 \cdot k^2 \cdot 1^2 + \sum_{k=0}^{n} 4\cdot k \cdot 1^3 + \sum_{k=0}^{n} 1.
\end{aligned}$$

En passant le premier terme à droite du côté gauche de l'égalité, on arrive à

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - \sum_{k=0}^{n} k^4 = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1,$$

et on reconnaît les sommes des puissances d'entiers :

$$(n+1)^4 = 4W_n + 6V_n + 4S_n + (n+1).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{1}{4}\big((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)\big) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)\big((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\big) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)(n^3 + n^2) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2 n^2, \end{aligned}$$

d'où $W_n = n^2(n+1)^2/4$. □