Systèmes Binaires

V. Langlet

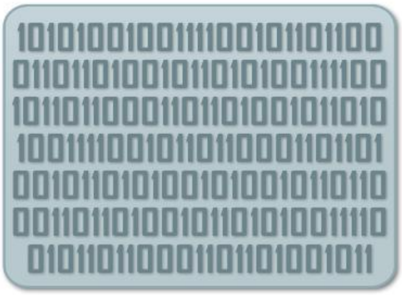
Niveau : De la Terminale aux Maths du supérieur

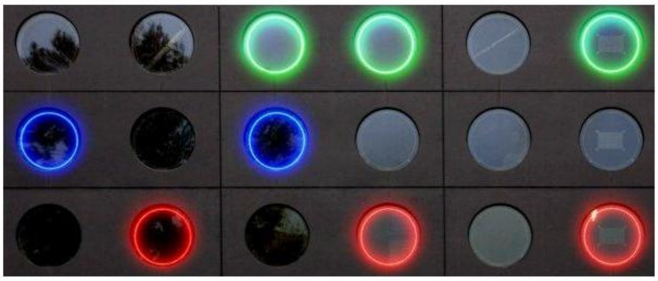
Difficulté : De plus en plus dur au fil des exercices.

Durée : Environ deux heures, suivant la compréhension du sujet.

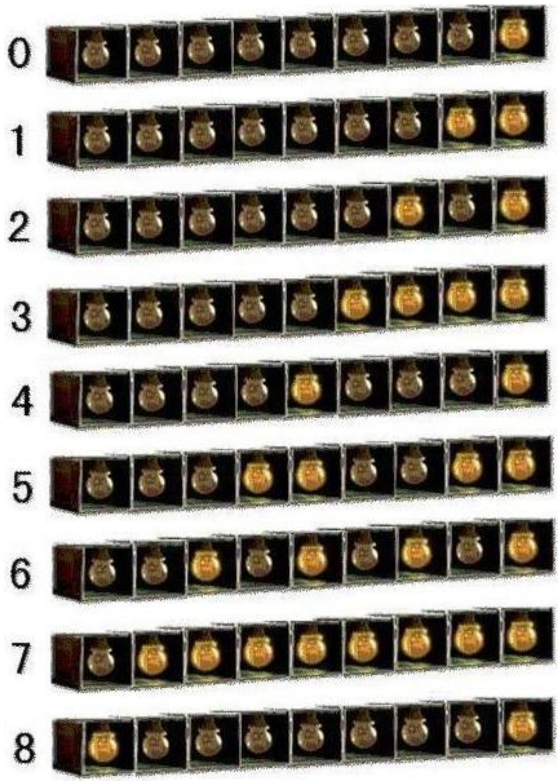
Rubrique(s) : Techniques (Récurrence forte, écriture binaire)
Algèbre (Polynômes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$)

La petite histoire... Le système binaire est un système de numération utilisant la base 2. On nomme couramment bit (de l'anglais “binary digit”, soit “chiffre binaire”) les chiffres de la numération binaire. Ceux-ci ne peuvent prendre que deux valeurs notées par convention 0 et 1. C'est un concept essentiel de l'informatique car les processeurs des ordinateurs sont composés de transistors ne gérant chacun que deux états. Un calcul informatique n'est donc qu'une suite d'opérations sur des paquets de 0 et de 1, appelés octets lorsqu'ils sont regroupés par 8.
Voici un exemple d'information binaire pouvant être transmise par un ordinateur et d'une horloge qui affiche l'heure en binaire, nous verrons par la suite comment la lire correctement.

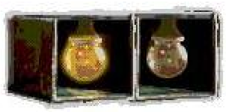




Le premier exercice est directement lié à l'informatique : il permet en effet de compter en binaire et de trouver l'heure de l'horloge ci dessus. Après s'être familiarisé avec cette nouvelle notion, on s'intéressera à la résolution pratique (cf. exercice 2) puis théorique (cf. exercice 3) de l'énigme suivante :
Nous considérons une rangée infinie (à gauche) de lampes toutes éteintes, hormis celle située le plus à droite. À chaque étape, une lampe qui est allumée change l'état de la lampe située exactement à sa gauche, tandis qu'une lampe située juste à gauche d'une lampe éteinte garde le même état à l'étape suivante. Combien y-a-t-il de lampes allumées au bout de 1001 *étapes ? Quelle est la disposition des lampes allumées ?*
Voici, pour illustrer cette énigme, les 8 premières étapes :



On peut voir ici les lampes allumées comme des “agents actifs” changeant l’état de leur voisine de gauche et on s’intéresse au comportement à long terme d’un tel système...
Afin de rendre le problème plus concret et de mettre en avant le lien avec les énigmes, on représente une information binaire sous la forme d’une succession de lampes, chacune d’elle pouvant être allumée ou éteinte. Une lampe allumée est associée au bit 1, tandis qu’une lampe éteinte est associée au bit 0. On peut donc représenter le code 10 de la manière suivante :



De manière similaire à notre système décimal où 0123 et 123 sont les mêmes nombres, les zéros situés à la gauche du code binaire n’ont aucun effet. Ainsi 00100 et 100 représentent la même grandeur en binaire et les deux peuvent être utilisés, la deuxième forme étant plus concise.

Exercice 1 (Langage informatique & Base 2). On part d'un enchaînement de lampes qui sont toutes éteintes à l'étape 0. À chaque nouvelle étape, on change l'état de la lampe située le plus à droite, c'est à dire qu'on l'allume si elle est éteinte et qu'on l'éteint si elle est allumée. D'autre part, à chaque fois qu'on éteint une lampe, celle située juste à sa gauche change automatiquement d'état. On cherche à déterminer l'état des lampes en fonction du nombre d'étapes effectuées. Voici les deux premières étapes :

1.a) Poursuivre l'exemple en déterminant les sept ou huit premières étapes.
1.b) À l'aide des étapes 2, 4 et 8, conjecturer l'état des lampes à l'étape 2^n, $n \in \mathbb{N}$.

2) Dans cette question, nous allons démontrer cette conjecture par récurrence. On note $\mathrm{P}(n)$ la proposition : Pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, à l'étape 2^k, il y a une seule lampe allumée et elle se trouve en position $k+1$. Autrement dit, elle est suivie de k lampes éteintes.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} 2^k$.
b) Justifier que $\mathrm{P}(0)$ est vraie.
c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathrm{P}(n)$ vraie et on veut montrer $\mathrm{P}(n+1)$. Expliquer pourquoi il suffit de montrer qu'à l'étape 2^{n+1}, il y a une lampe allumée suivie de $n+1$ lampes éteintes pour conclure.
d) A l'aide de $\mathrm{P}(n)$, donner l'état des lampes à l'étape 2^n, $2^n + 2^{n-1}$, ..., $\sum_{k=0}^{n} 2^k$.
e) En déduire l'état des lampes à l'étape 2^{n+1} et conclure.

3.a) Donner l'état des lampes au bout de 50, 300 et 1000 étapes. On pourra prendre l'écriture binaire, c'est à dire noter 1 pour 'allumé' et 0 pour 'éteint'. Les configurations de lampes deviennent des suites de bits.
3.b) Déterminer les nombres d'étapes réalisées avant d'obtenir l'écriture 1010 et 1001001.
3.c) Expliquer la méthode pour passer du binaire au système décimal et vice-versa.

4.a) Expliquer comment compter jusqu'à 31 avec une main et 1023 avec deux.
4.b) Sachant que les heures sont affichées en vert, les minutes en bleu et les secondes en rouge, déterminer l'heure affichée sur l'horloge située sur la première page.

Indications et Commentaires : Il s'agit bien dans cet exercice de compter en binaire. Par définition, on part d'un nombre important de 0 et, à chaque étape, on rajoute 1 avec comme règle que l'apparition d'un 2 provoque son remplacement par un 0 et l'ajout de 1 au chiffre suivant. Il en va de même ensuite pour chaque chiffre de la gauche vers la droite, comme lorsque l'on fait des sommes habituelles en base 10, sauf que le motif 0 avec +1 à la rangée suivante se produit lorsque 2 est atteint, au lieu de 10...

Alors que dans le système décimal on utilise une progression géométrique de raison 10 (autrement dit que les dizaines changent toutes les 10 unités, les centaines toutes les 10 dizaines...), dans le système binaire on utilise une progression géométrique de raison 2. Dans tout cet exercice, on a donc passé son temps à compter en binaire, comme le montre ce tableau :

Décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Binaire	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

On pourrait alors conclure ainsi : “Il y a 10 types de personnes, ceux qui savent compter en binaire et ceux qui ne savent pas”. Et vous, dans quelle catégorie vous situez-vous ?

Corrections.

1.a) Voici les sept premières étapes :

1.b) Au vu des étapes 2 et 4 (et l'étape 8 pour ceux qui n'avaient pas encore trouvé), on peut supposer qu'à l'étape 2^n il y a une lampe allumée en position $n+1$, avec à sa droite n lampes éteintes.

2.a) Il s'agit simplement de la somme des termes d'une suite géométrique. De manière générale,

$$\text{Si } a \neq 1, \text{ alors } \quad \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

En effet, si l'on note S cette somme, elle vérifie $a \times S = S + a^{n+1} - 1$ ce qui donne le résultat. Ici, on utilise donc cette formule dans le cas $a = 2$ pour obtenir $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

2.b) P(0) s'écrit “À l'étape 1, il y a une lampe allumée suivie de zéro lampe éteinte”. Ceci est vrai, on peut le vérifier grâce à la première image dans l'énoncé de l'exercice ou grâce à la question 1.a) qui donne les premières étapes.

2.c) Il suffit juste de remarquer que lorsque $k \in \{0, ..., n\}$, la propriété est vraie par P(n). Il suffit donc de s'occuper de $n+1$.

2.d) P(n) assure que pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, à l'étape 2^k on a une lampe allumée suivie de k lampes éteintes. Avec $k = n$, on sait donc qu'à l'étape 2^n, on se retrouve avec une lampe allumée suivie de n lampes éteintes. Puis avec $k = n-1$, on sait qu'à l'étape 2^{n-1}, on se retrouve avec une lampe allumée en position n suivie de $n-1$ lampes éteintes. Donc à l'étape $2^n + 2^{n-1}$, on se retrouve avec 2 lampes allumées suivies de $n-1$ lampes éteintes. En effet, à partir de l'étape 2^n, pour les n premières lampes tout se passe comme si on avait recommencé depuis le début. Et cela pendant 2^{n-1} étapes, jusqu'à allumer la n ème lampe. La $(n+1)$ème lampe est toujours allumée. En continuant ce raisonnement, à l'étape $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$, on se retrouve avec les $n+1$ lampes à droite allumées (et les autres éteintes).

2.e) À l'étape $2^{n+1} - 1$, les $n+1$ premières lampes sont allumées. À l'étape 2^{n+1}, on change l'état de la lampe la plus à droite. Or celle-ci est allumée, donc on l'éteint et cela change l'état de la lampe située à sa gauche. Par réaction en chaîne, toutes les lampes s'éteignent et changent l'état de celle qui est située à leur gauche... On arrive finalement à la $(n+1)$ème lampe allumée qui s'éteint en allumant la $(n+2)$ème. Par conséquent, à l'étape 2^{n+1} il y a bien une lampe allumée suivie de $n+1$ lampes éteintes. P$(n+1)$ est vraie, donc notre récurrence aussi !

3.a) D'après les questions précédentes, il faut décomposer les nombres donnés en sommes de puissances de 2 pour obtenir plus facilement leur représentation en binaire. On a

$$50 = 2^5 + 2^4 + 2^1,\ 300 = 2^8 + 2^5 + 2^3 + 2^2 \text{ et } 1000 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3.$$

Donc on obtient les représentations binaires suivantes : 110010, 100101100 et 1111101000. On pourra reconnaître ici l'algorithme des divisions successives d'Euclide.

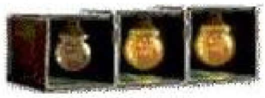
3.b) Inversement, pour la même raison, si l'on veut passer de la représentation binaire à une écriture décimale il suffit de multiplier chaque bit par la puissance de 2 associée. 1010 est obtenu au bout de $2^1 + 2^3 = 2 + 8 = 10$ étapes et 1001001 au bout de $2^0 + 2^3 + 2^6 = 1 + 8 + 64 = 73$ étapes.

3.c) Alors que l'écriture décimale est basée sur les puissances de dix (par exemple $123 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$), le système binaire est lui basé sur les puissances de deux. Il faut donc passer d'une décomposition en base 10 à une décomposition en base 2 pour obtenir l'expression en binaire. En reprenant notre exemple, on a $123 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, donc l'écriture en binaire de 123 est 1111011 (il suffit de recopier les coefficients devant les puissances de 2). On effectue l'inverse pour repasser en décimal (ce qui est plus naturel).

4.a) Il suffit de compter en binaire avec sa/ses main(s). On associe à chacun des doigts une puissance de 2. On lève le pouce pour 1, on le baisse tout en levant l'index pour 2, puis on relève le pouce pour 3, on baisse l'index et le pouce tout en levant le majeur pour 4 et ainsi de suite. En fait, lorsqu'un doigt est levé, on lui associe la valeur 1 et lorsqu'il est baissé, on lui associe la valeur 0 ainsi, une/deux main(s) avec des doigts levés ou baissés représente une séquence binaire et donc un nombre.

4.b) Lorsque la lumière est allumée, le bit associé vaut 1 donc on a $8+4+1$ heures, $32+16+2$ minutes et $16+4+1$ secondes. On lit donc 13h 40min 21s, bientôt l'heure de la sieste ! □

Exercice 2 (Des lampes qui s'allument les unes les autres). Reprenons notre énigme. La lampe la plus à droite est toujours allumée. Maintenant, à chaque nouvelle étape, toutes les lampes allumées changent l'état de celle placée juste à leur gauche. Les lampes éteintes ne changent pas l'état de leur voisine de gauche. On cherche à déterminer l'état des lampes en fonction du nombre d'étapes effectuées. Voici les deux premières étapes :

0  1  2 

Dans l'exercice, nous numérotons à nouveau les lampes de la droite vers la gauche.

1.a) Donner la position de la lampe allumée la plus à gauche.

1.b) Poursuivre l'exemple en déterminant les sept ou huit premières étapes.

1.c) À l'aide des étapes 2, 4 et 8, conjecturer l'état des lampes à l'étape $2^n, n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer par récurrence pour $n \geqslant 1$ la proposition $\mathrm{P}(n)$:

– à l'étape $2^n - 1$, seules les $2^n - 1$ premières lampes sont allumées ;

– à l'étape 2^n, seules la première et la 2^nème lampes sont allumées.

3) Peut-on désormais trouver le nombre de lampes allumées au bout de 1001 étapes ? Quelle est la disposition des lampes allumées au bout de n étapes ?

Indications et Commentaires : Comme un exemple vaut mieux qu'un long discours, nous allons l'expliquer dans le cas $n = 3$. A l'étape 8, on obtient le schéma 100000001 et à l'étape 4 on avait obtenu le schéma 10001, donc à l'étape 12, on obtient le schéma **1000**1000**10001**. Peut on généraliser ? C'est ce qu'il va falloir établir pour répondre à la question 3.

Corrections.

1.a) La lampe allumée la plus à gauche allume la lampe immédiatement à sa gauche à l'étape suivante. Elle se déplace d'une position vers la gauche à chaque étape et à l'étape n, elle est à la position n.

1.b) Étant donné qu'il faut dessiner un grand nombre de lampes pour représenter ces étapes (à titre d'exemple, le deuxième système nécessite huit lampes pour représenter l'étape 7 alors que le premier système, lui, n'en utilise que trois), nous allons les représenter avec des 1 et des 0.

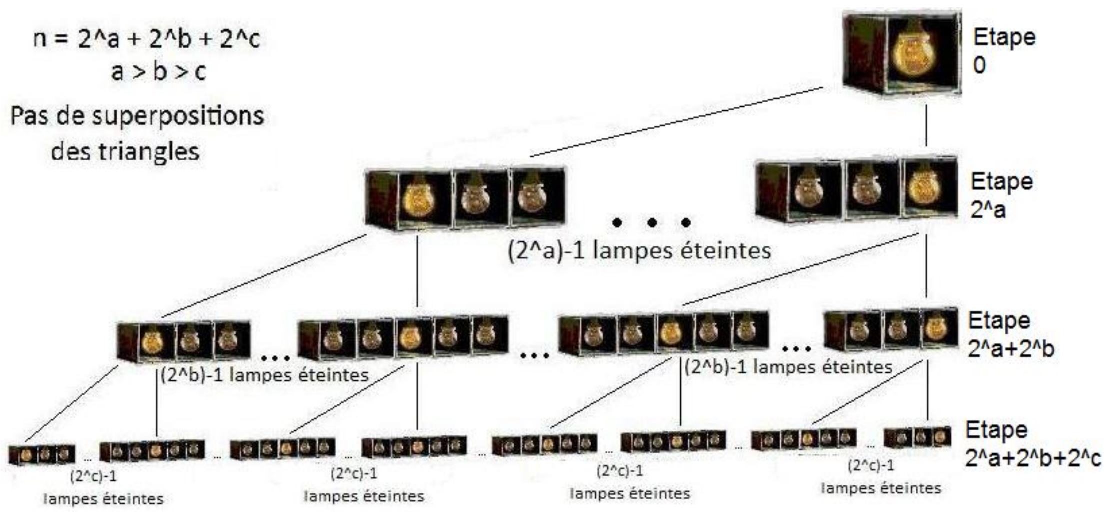
Etape	0	1	2	3	4	5	6	7
Résultat	1	11	101	1111	10001	110011	1010101	11111111

1.c) Au vu des étapes 2 et 4 (et 8), on peut supposer qu'à l'étape 2^n on a une succession de $2^n + 1$ lampes, parmi lesquelles seules la première et la dernière sont allumées.

2) P(0) se réécrit “À l'étape 1, seule la première lampe est allumée. A l'étape 2, seules les 2 premières lampes sont allumées.” On l'a déjà vérifiée en 1.b).
Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\mathrm{P}(n)$ est vraie. Plaçons-nous à l'étape 2^n, où nous avons (seulement) deux lampes allumées : la première lampe et celle en position 2^n.
Ces deux lampes ne vont pas interférer durant les $2^n - 1$ étapes suivantes et tout se passe comme si les deux lampes évoluaient séparément et qu'on mettait côte à côte les deux dispositions de lampes allumées obtenues. En effet, d'après la première question, si on part d'une lampe allumée alors la lampe allumée la plus à gauche à l'étape k se situe en position k. Par conséquent, pendant les $2^n - 1$ étapes qui nous intéressent, les lampes allumées à partir de la première lampe n'ont pas encore pu affecter ce qui se passe pour la 2^nème lampe et les suivantes.
Ainsi, à l'étape $2^n + 2^n - 1$, par hypothèse de récurrence les $2^n - 1$ premières lampes sont allumées (grâce à la première), et les lampes entre la position 2^n et $2^n + 2^n - 1$ sont également allumées (grâce à la 2^nème). En fait, toutes les lampes sont allumées entre la position 1 et $2^{n+1} - 1$. Ceci prouve la première partie de $\mathrm{P}(n+1)$. Pour la seconde, il suffit de remarquer que toutes ces lampes allumées éteignent leur voisine de gauche allumée à l'étape suivante. A part bien sûr la première lampe qui reste toujours allumée, toutes les lampes s'éteignent donc à l'étape 2^{n+1}. Mais au cours de cette dernière, la lampe allumée la plus à droite (la $(2^{n+1} - 1)$ème lampe) allume sa voisine de gauche (la 2^{n+1}ème lampe) qui était éteinte. Ceci achève la récurrence.

3) De manière générale, si l'on veut connaître l'étape n, il faut :
- Décomposer le nombre n en sommes de puissances de 2, c'est à dire écrire $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + ... + 2^{k_N}$.
- Combiner ensuite les N passages constitués d'un nombre d'étapes étant une puissance de 2.

En effet, l'idée de la question 2) peut être reproduite. Pour deux entiers $k_1 > k_2$, à l'étape 2^{k_1} les deux lampes allumées sont trop éloignées pour qu'il y ait des “interférences” lorsque l'on passe à l'étape $2^{k_1} + 2^{k_2}$ donc le résultat s'obtient en écrivant deux fois, bout à bout, l'étape 2^{k_2}. Il suffit ensuite de continuer avec les autres puissances...
Voici l'illustration de cette méthode :



Appliquons donc cette méthode à notre exemple : 1001 étapes.
On commence par décomposer 1001 en somme de puissances de 2. Pour cela il faut lui soustraire la plus grande puissance de 2 possible, ici $2^9 = 512$ puisque $2^{10} = 1024 > 1001$. Il reste $1001 - 512 = 489$ à décomposer. En recommençant ainsi de suite, on a alors la décomposition $1001 = 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 8 + 1 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^0$.
Si on applique la méthode de la question précédente, on a donc 2 lampes allumées au bout de 512 étapes et ces 2 lampes, qui sont séparées par 511 lampes éteintes, n'interfèreront plus entre elles : elles allument chacune deux lampes et au bout de $512 + 256$, il y a 2×2 lampes allumées qui n'interfèreront plus non plus. On continue ainsi et au bout de $512 + 256 + 128$ étapes, on obtient $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ lampes allumées,

puis 2^4 au bout de $512+256+128+64$ étapes, 2^5 au bout de $512+256+128+64+32$ étapes, 2^6 au bout de $512+256+128+64+32+8$ étapes et enfin $2^7 = 128$ au bout de $1001 = 512+256+128+64+32+8+1$ étapes. Il y a donc 128 lampes allumées au bout de 1001 étapes. □

Petite transition... Ce problème d'ampoules fait apparaître une suite finie de 0 et de 1. Elle peut être représentée par un polynôme. L'avantage réside dans le fait que l'on peut multiplier des polynômes et on va voir que notre problème devient alors un simple calcul. Les coefficients du polynôme ici sont particuliers, car $1+1=0$ avec les lampes (allumées ou éteintes) et on travaille avec des coefficients modulo 2.
Nous avons donc besoin de quelques notions supplémentaires sur les polynômes :

$$P \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré } n \quad \Leftrightarrow \quad P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \text{ où } \forall k \in \{0,...,n\}, a_k \in \mathbb{R} \text{ et } a_n \neq 0.$$

Exercice 3 (Utilisation de polynômes particuliers). Dans cet exercice, nous allons nous placer dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$. Expliquons concrètement ce que cela veut dire. Les règles d'addition et de multiplication des polynômes sont les mêmes que d'habitude, mais maintenant tous les coefficients sont entiers. Mieux encore, ces coefficients peuvent être remplacés par des 1 ou des 0 selon leur parité (on remplace les entiers pairs par des 0 et les impairs par des 1). Par exemple,

$$X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = X^3 + X^2 + 1, \quad \text{mais} \quad X^3 \neq X, \quad 2X \neq X.$$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ représente donc l'espace des polynômes dont les coefficients valent soit 1, soit 0 (tous les autres chiffres sont bannis). Autrement dit, nous avons désormais :

$$P \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X] \text{ de degré } n \quad \Leftrightarrow \quad P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

où pour tout $k \in \{0,...,n\}$, $a_k \in \{0,1\}$ et $a_n \neq 0$.

1.a) Calculer $(X^2+X+1)+(X^2+1)$ et $(X^3+X)+(X^4+X^2+X)$.
1.b) Calculer $(X^2+X+1)\times(X^2+1)$ et $(X^3+X)\times(X^4+X^2+X)$.

2) On s'intéresse par la suite aux polynômes $P_n = (X+1)^n$.
  a) Calculer P_k pour $0 \leqslant k \leqslant 8$.
  b) Déterminer le degré de P_n.
  c) Déterminer également le coefficient dominant et le coefficient constant de P_n.
  d) Calculer par récurrence P_{2^k} pour tout $k \in \mathbb{N}$.
  e) En déduire P_n de manière générale.

3) Reprenons l'énigme des lampes de l'exercice précédent, mais avec une approche différente et plus efficace : nous allons utiliser des polynômes.
  a) Comment coder une succession de lampes allumées ou éteintes avec un polynôme ?
  b) Si le polynôme Q_n code la disposition des lampes allumées à l'étape n, comment obtenir le polynôme Q_{n+1} codant la disposition à l'étape $n+1$?
  c) En déduire une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ codant les différentes étapes.

4.a) En déduire la configuration des lampes à l'étape n.
4.b) Combien y aura-t-il de lampes allumées au bout de 1000 étapes ?

5.a) Développer P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

5.b) En déduire la parité de C_n^k pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.

Indications et Commentaires : 1) Les deux premières questions sont simples, elles servent juste à vérifier votre compréhension de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$. Vient ensuite un nouveau polynôme, l'étude est standard, d'autant plus que c'est la troisième récurrence de ce genre. La seule difficulté de l'exercice est dans le développement de P_n, l'élaboration du polynôme Q_n et son utilisation.
2)Pour calculer P_n, il faut penser au développement en base 2 (dit développement dyadique). On utilisera ensuite les cas particuliers où n est une puissance de 2. La fin du développement est difficile, il n'est pas honteux de jeter un œil à la correction...
3) En calculant les P_n pour $n = 0, 1, 2, ..., 8$, on se rend compte que tout marche comme pour les lampes. C'est le même mécanisme qui agit et on retrouve les dispositions de lampes allumées montrées dans les images du début de la fiche.
Ensuite, il faut déterminer une méthode pour coder une succession de lampes allumées ou éteintes avec un polynôme. Quoi de plus simple que de s'inspirer du binaire ? En effet, une lampe possède deux états (allumée ou éteinte), tout comme un bit (0 ou 1). Voilà donc comment l'idée apparaît d'elle-même : le coefficient représente l'état de la lampe, tandis que le monôme représente la position de la lampe. On coderait donc par 1, $X + 1$ et $X^2 + 1$ les positions suivantes :

Pour les questions 5.a) et 5.b), on se servira du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times a^k \times b^{n-k}$.

Corrections.

1.a) $(X^2 + X + 1) + (X^2 + 1) = 2X^2 + X + 2 = X$.
$(X^3 + X) + (X^4 + X^2 + X) = X^4 + X^3 + X^2 + 2X = X^4 + X^3 + X^2$.

1.b) $(X^2 + X + 1) \times (X^2 + 1) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 = X^4 + X^3 + X + 1$.
$(X^3 + X) \times (X^4 + X^2 + X) = X^7 + 2X^5 + X^4 + X^3 + X^2 = X^7 + X^4 + X^3 + X^2$.

2.a) On a $P_0 = 1$, $P_1 = X + 1$, $P_2 = X^2 + 2X + +1 = X^2 + 1$, $P_3 = (X+1)(X^2+1) = X^3 + X^2 + X + 1$, $P_4 = X^4 + 1$, $P_5 = X^5 + X^4 + X + 1$, $P_6 = X^6 + X^5 + X^2 + X + X^5 + X^4 + X + 1 = X^6 + X^4 + X^2 + 1$,$P_7 = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $P_8 = X^8 + 1$.

2.b) Notons d(P) le degré de P. On a $(1+X)^n = (1+X)(1+X)^{n-1} = X(1+X)^{n-1} + (1+X)^{n-1}$ et donc $d(P_n) = 1 + d(P_{n-1}) = ... = n$.

2.c) Notons c(P) le coefficient dominant du polynôme P et cc(P) son coefficient constant. On a ici, $c(P_n) = c((1+X)^n) = 1$ et $cc(P_n) = P_n(0) = (1+0)^n = 1^n = 1$.

2.d) On conjecture grâce à P_1, P_2 et P_4 que $\forall k \in \mathbb{N}, P_{2^k} = X^{2^k} + 1$. On le montre par récurrence .
- Énoncé : Soit P(n) la proposition $P_{2^n} = X^{2^n} + 1$.
- Initialisation : Par la question 2.a), P(0) est vraie.
- Hérédité : Supposons P(n) vraie pour n $\in \mathbb{N}$ alors on sait que $(1+X)^{2^n} = X^{2^n} + 1$ donc

$$\begin{aligned}(1+X)^{2^{(n+1)}} &= (1+X)^{2^n} \times (1+X)^{2^n} = (X^{2^n}+1) \times (X^{2^n}+1) \\ &= X^{2^{(n+1)}} + 2X^{2^n} + 1 = X^{2^{(n+1)}} + 1.\end{aligned}$$

P($n+1$) est donc vraie et on conclut par l'axiome de récurrence.

2.e) Pour utiliser ce que l'on vient de démontrer, il faut écrire le développement dyadique de n. On écrit donc $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + ... + 2^{k_i}$ avec $i \in \mathbb{N}$ et $k_1 < k_2 < ... < k_i$. Il vient alors

$$\begin{aligned}P_n = (1+X)^n &= (1+X)^{2^{k_1}}(1+X)^{2^{k_2}} \times ... \times (1+X)^{2^{k_i}} \\ &= (X^{2^{k_1}}+1)(X^{2^{k_2}}+1) \times ... \times (X^{2^{k_i}}+1).\end{aligned}$$

On peut finir avec l'expression

$$P_n = \sum_{p=0}^{i} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_p \leqslant i} X^{2^{k_{i_1}} + 2^{k_{i_2}} + ... + 2^{k_{i_p}}}.$$

En effet, en développant, le même degré n'apparaît jamais deux fois par unicité du développement dyadique. Rappelons au passage cette unicité : si

$$2^{k_1}+2^{k_2}+...+2^{k_N}=2^{k'_1}+2^{k'_2}+...2^{k'_{N'}}$$

avec $k_1>k_2>...>k_N$ et $k'_1>k'_2>...>k'_N$, alors

$$N=N',\quad k_1=k'_1,\quad k_2=k'_2,\quad ...\quad k_N=k'_{N'}.$$

Le nombre de termes du polynôme P_n est ainsi égal à 2^i (il y a deux choix possibles pour les i facteurs successifs en développant). Les degrés qui apparaissent sont des sommes de puissances de deux et appartiennent tous à l'ensemble suivant :

$$\{2^{k_{i_1}}+2^{k_{i_2}}+...+2^{k_{i_p}},\ \text{avec } p\in\{0,...,i\} \text{ et } i_1<i_2<...<i_p\}.$$

3.a) Le terme de degré n du polynôme correspond à la $(n+1)$ième lampe : il vaut 1 si la lampe est allumée et 0 sinon. Autrement dit, les degrés qui apparaissent correspondent au rang des lampes allumées. (Lire les indications pour plus d'informations et des exemples).
3.b) On remarque d'abord que décaler toutes les lampes allumées d'une position vers la gauche revient à multiplier le polynôme qui les représente par X, comme le montre cet exemple :

Une étape consiste à changer de position si et seulement si sa voisine est allumée, c'est à dire que le coefficient du polynôme change si et seulement si il y a un 1 comme coefficient à sa droite. Le coefficient de degré p de Q_{n+1} est donc la valeur du coefficient de degré p de Q_n plus la valeur du coefficient de degré $p-1$ de Q_n. Ce dernier coefficient est le coefficient de degré p de XQ_n par la remarque précédente. Comme cela est vrai pour tous les coefficients, on obtient que Q_{n+1} est la somme de Q_n et de XQ_n, d'où la formule de récurrence $Q_{n+1}=(1+X)Q_n$.
3.c) Par une récurrence simple et évidente, $Q_n=(1+X)^nQ_0=(1+X)^n=P_n$.
4.a) La question 2.e) donne le résultat : si $n=2^{k_1}+2^{k_2}+...+2^{k_N}$ avec $N\in\mathbb{N}$ et $k_1<...<k_N$, alors le nombre de termes du polynôme Q_n est égal à 2^N et les degrés apparaissant appartiennent à l'ensemble :

$$\left\{2^{k_{i_1}}+2^{k_{i_2}}+...+2^{k_{i_p}}\ :\ p\in\{0,...,N\} \text{ et } i_1<i_2<...<i_p\right\}.$$

En reformulant ces résultats, on obtient donc qu'il y a 2^N lampes allumées et que leurs positions sont données justement par l'ensemble ci-dessus (conséquence directe de la définition du polynôme Q_n).
4.b) Il suffit d'utiliser la question 2.e) pour obtenir la réponse. En effet, on a le développement dyadique suivant, $1000=512+256+128+64+32+8=2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^3$. Puisque 1000 s'écrit comme une somme de 6 puissances de 2, le polynôme P_{1000} possède 2^6 termes. Autrement dit, il y a $2^6=64$ lampes allumées. On pourrait même déterminer leurs positions, toujours grâce à la même question, mais le correcteur en a fait bien assez...
5.a) Par le binôme de Newton, on obtient : $P_n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}X^k$.
5.b) Il faut désormais jongler entre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. En effet, si $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\{0,...,n\}$, on sait grâce à la 5.a) que le coefficient de P_n dans $\mathbb{R}[X]$ devant le terme X^k n'est autre que $\binom{n}{k}$. Il ne reste plus qu'à connaître ce même coefficient dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ pour conclure : s'il vaut 1, $\binom{n}{k}$ est impair, s'il vaut 0, $\binom{n}{k}$ est pair. Pour déterminer ce coefficient, on utilise la question 2.e), qui nous dit que si $n=2^{k_1}+2^{k_2}+...+2^{k_i}$, les termes non nuls du polynôme P_n sont ceux dont les degrés appartiennent à l'ensemble $\{2^{k_{i_1}}+2^{k_{i_2}}+...+2^{k_{i_p}}$ avec $p\in\{0,...,i\}$ et $i_1<i_2<...<i_p\}$. Autrement dit, le terme de degré k est nul si et seulement si le développement dyadique de k possède des puissances de 2 que

ne possède pas celui de n. On peut donc conclure que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est pair si et seulement si le développement dyadique de n ne contient pas tous les termes de celui de k. Malheureusement, ce n'est pas très simple... Peut-on faire mieux ?
Voir aussi http ://nte-serveur.univ-lyon1.fr/immediato/Math/Enseignement/01 .

FIN

$\square$