Sous-ensembles de $Gl_n(\mathbb{C})$ compacts et stables par multiplication

Elève ENS Cachan

Niveau : Aide et approfondissement en deuxième année après le bac

Difficulté : Assez difficile
Durée : une heure au moins

Rubrique(s) :
Compacité et réduction

Exercice 1 : Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1. Soient n un entier naturel et K un sous ensemble compact de $Gl_n(\mathbb{C})$ stable par multiplication. Alors K est un sous groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$.

1.a) Montrer que $Gl_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fermé de $Gl_n(\mathbb{C})$.
1.b) Admettant le théorème 1, que peut on dire d'un sous ensemble compact de $Gl_n(\mathbb{R})$ stable par multiplication ?
On fixe maintenant es $n \geq 1$, K un sous ensemble compact de $Gl_n(\mathbb{C})$ et $M \in K$.
2) Soit λ une valeur propre de M.
  a) Montrer que $|\lambda| \leq 1$.
  b) Montrer que $|\lambda| \geq 1$.
3) On rappelle que le tore $\mathbb{T}^n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}^n$ est le produit cartésien de n cercles unité de $\mathbb{C}$.
  a) Commencer par justifier que le tore $\mathbb{T}^n$ est compact.
  b) Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{T}^n$. Montrer qu'il existe une suite d'entiers $(u_k)_k$ telle que $(\lambda_1^{u_k}, \cdots, \lambda_n^{u_k})$ tende vers $(1, \cdots, 1)$.
4) Montrer qu'il existe une matrice $N \in K$, dans l'adhérence de l'ensemble $\{M^n | n \in \mathbb{N}\}$ dont toutes les valeurs propres sont égales à 1. Montrer que de plus, on peut supposer N triangulaire supérieure.
5) On pose $N = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
  a) Montrer que $a_{1,2} = 0$.
  b) Montrer que $a_{1,j} = 0$ pour tout $2 \leq j \leq n$.
  c) Montrer que $a_{i,j} = 0$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$. En déduire que $N = I_n$
6) Exhiber un inverse de M dans K.

Indications et Commentaires : Au début de l'exercice, les possibilités qui nous sont offertes sont maigres : on a à disposition une matrice M dans un ensemble K stable par produit. Une seule chose à faire : itérer la matrice M, c.-à.-d. regarder la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$, et espérer pouvoir exhiber une sous-suite convergeant vers l'inverse de M. On va en fait chercher une sous-suite convergeant vers l'identité, et en déduire facilement une autre convergeant vers M^{-1}. Or l'outil idéal pour l'itération de matrices est la réduction : dans le cadre agréable de $Gl_n(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable. Les valeurs de la matrice sur la diagonale (autrement dit les valeurs propres) sont obtenues par simple multiplication, ce qui nous donne une extraction dont les termes diagonaux convergent tous vers 1. On montre alors que la limite, appartenant à K, est en fait l'identité.

Pour aller un peu plus loin, on a un résultat sur les sous-groupes compacts de $Gl_n(\mathbb{R})$ et $Gl_n(\mathbb{C})$: un sous-groupe compact de $Gl_n(\mathbb{R})$ G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, c.-à.-d. qu'il existe un sous-groupe H de $O_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible M telle que $G = MHM^{-1}$. De la même manière un sous-groupe compact de $Gl_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $U_n(\mathbb{C})$. Pour rappel, $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles inversibles de taille n dont l'inverse est égal à la transposée, et $U_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices complexes inversibles de taille n dont l'inverse est égal au conjugué de la transposée.

Corrections.

Remarque 2. *Lorsqu'on évoquera la continuité d'une application dans $M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$, et donc dans $Gl_n(\mathbb{R})$ ou $Gl_n(\mathbb{C})$, on ne se souciera pas de la norme pour laquelle cette continuité est réalisée : $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$ sont des $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)-espaces vectoriels de dimension finie, donc toutes les normes y sont équivalentes. Ainsi, considérant la norme donnée par le maximum des modules des coefficients de la matrice, il nous suffira pour montrer la continuité d'une telle application de montrer la continuité coefficient par coefficient.*

1.a) Le fait que ce soit un sous-groupe est évident : $Gl_n(\mathbb{R})$ est un groupe inclus dans $Gl_n(\mathbb{C})$. De plus, toute matrice M à coefficients dans $\mathbb{C}$ se décompose en sa partie réelle et sa partie imaginaire : il suffit de décomposer chacun de ses coefficients. On peut alors écrire $M = Re(M) + i\,Im(M)$. Considérant l'application continue :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : Gl_n(\mathbb{C}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & Im(M), \end{array}$$

(elle est continue car continue par rapport à chacun des coefficients ; l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto Im(z)$ est continue car c'est une projection), on remarque que $Gl_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de 0 par l'application φ. Donc $Gl_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fermé de $Gl_n(\mathbb{C})$.

1.b) Soit K un sous-ensemble compact de $Gl_n(\mathbb{R})$ stable par multiplication. Alors K est un sous-ensemble compact de $Gl_n(\mathbb{C})$, en tant que sous-ensemble compact d'un sous-ensemble fermé de $Gl_n(\mathbb{C})$. Donc K est un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$ et puisqu'il est inclus dans $Gl_n(\mathbb{R})$, c'est un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{R})$.

2.a) On sait par théorème que la matrice M est conjuguée à une matrice triangulaire supérieure T (on rappelle que cette propriété est vraie pour toute matrice à coefficients complexes) : il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PTP^{-1}$, avec :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & (*) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \lambda_{n-1} & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice M. Or l'application $Gl_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$ $M \mapsto P^{-1}MP$ est un morphisme de groupes (simple vérification) continu (car la multiplication matricielle est continue : chaque coefficient du produit de deux matrices est une somme de produits de coefficients des matrices que l'on multiplie), donc l'image de K par cette application est un sous-groupe compact de $Gl_n(\mathbb{C})$. Nous venous de nous ramener au cas M est une matrice triangulaire supérieure, ce que l'on suppose désormais.

Observons maintenant les itérés de la matrice M. Un calcul direct montre que

$$M^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & & \\ & \lambda_2^2 & & (*) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \lambda_{n-1}^2 & \\ & & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

Et ainsi de suite, par récurrence,

$$M^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & & \\ & \lambda_2^k & & (*) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \lambda_{n-1}^k & \\ & & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Or K est compact, à fortiori borné ; par conséquent tous les λ_i^k sont bornés uniformément pour k tendant vers l'infini. Il s'en suit que pour tout i, $|\lambda_i| \leq 1$.

2.b) D'autre part, s'il existait i tel que $|\lambda_i| < 1$, alors $|\lambda_i^k|$ tendrait vers 0 quand k tend vers l'infini. Par compacité, on extrairait une sous-suite convergente de la suite $(M^k)_k$, la limite de cette sous-suite possèderait alors au moins une valeur propre nulle, ce qui contredit le fait que K est inclus dans $Gl_n(\mathbb{C})$. Donc pour tout i, $|\lambda_i| \geq 1$ et par conséquent, pour tout i, $|\lambda_i| = 1$.

3.a) Le tore $\mathbb{T}^n$ est compact comme produit de n cercles unité de $\mathbb{R}^2$, eux-même compacts en tant que fermés bornés de $\mathbb{R}^2$.

3.b) Posons $\Lambda^k = (\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)$. Par compaicté du tore, on peut extraire de la suite $(\Lambda^k)_k$ une sous-suite $(\Lambda^{v_k})_k$ convergeant vers $(\lambda_{1,\infty}, \cdots, \lambda_{n,\infty})$. Posant $u_k = v_{k+1} - v_k$, on obtient :

$$\Lambda^{u_k} = (\lambda_1^{u_k}, \cdots, \lambda_n^{u_k}) = \left(\frac{\lambda_1^{v_{k+1}}}{\lambda_1^{v_k}}, \cdots, \frac{\lambda_n^{v_{k+1}}}{\lambda_n^{v_k}}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{\lambda_{1,\infty}}{\lambda_{1,\infty}}, \cdots, \frac{\lambda_{n,\infty}}{\lambda_{n,\infty}}\right) = (1, \cdots, 1)$$

4) Finalement, considérant la suite $(u_n)_n$ obtenue avec la question précédente, on se retrouve avec une suite d'itérés de M, triangulaires supérieurs, dont les coefficients diagonaux tendent tous vers 1. Par compacité de K, quitte à extraire une sous-suite de (u_n), on peut considérer que ces itérés tendent vers une matrice N, qui est dans K, et dont tous les coefficients diagonaux sont eux aussi égaux à 1. Puisque de plus M est supposée triangulaire supérieure, N l'est aussi.

5.a) On a :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & & \\ 0 & 1 & & (*) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a_{1,2} & & \\ 0 & 1 & & (*) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Et par récurrence :

$$N^k = \begin{pmatrix} 1 & ka_{1,2} & & \\ 0 & 1 & & (*) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit, puisque K est borné, que $a_{1,2} = 0$.

5.b) On montre alors par récurrence que $a_{1,i} = 0$ pour tout i. Si la propriété est vraie au rang i, on a :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,i+1} & \cdots \\ 0 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & \\ & (0) & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Si bien que :

$$N^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & ka_{1,i+1} & \cdots \\ 0 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & \\ & (0) & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Et donc, comme précédemment, $a_{1,i+1} = 0$.

5.c) Cette propriété se montre par récurrence sur l'entier $k \leq n$: la propriété « $a_{i,j} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq k$ et $i < j \leq n$ » est vraie (trivialement) pour $k = 0$, l'hérédité est exactement ce qui a été montré à la question précédente.

Finalement, $N = I_n$.

6) On a alors trouvé une suite d'entiers u_k tels que $M^{u_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} I_n$. Par continuité de la multiplication dans $Gl_n(\mathbb{C})$, on en déduit que $M^{u_k-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} M^{-1}$ dans $Gl_n(\mathbb{C})$, et donc dans K compact. Finalement, $M^{-1} \in K$.