

**Fonctions de la variable complexe,
ENS de Cachan,
2006-07.**

0 Introduction

0.1 Formules

Grâce aux fonctions de la variable complexe, on peut obtenir de nombreuses formules, dont voici quelques exemples:

1. des développements en série,

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z},$$

2. des développements en produits infinis,

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}^*,$$

3. des transformées de Fourier,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \frac{dx}{1+x^2} = \pi e^{-|\xi|} \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{R},$$

4. des calculs de rayon de convergence,

$$R_{conv}(\tan) = \frac{\pi}{2}.$$

0.2 Théorèmes

De nombreux théorèmes ont une démonstration (relativement) facile lorsque l'on utilise les fonctions de la variable complexe, alors même que leur énoncé ne fait pas intervenir de manière directe ces fonctions:

1. Le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant de la variable complexe admet au moins une racine (complexe).
2. Le théorème de Riemann : tous les ouverts simplement connexes de \mathbb{R}^2 sont homéomorphes (et même, une fois identifiés à des ouverts de \mathbb{C} , et à l'exception de \mathbb{C} lui-même, ils sont en bijection à travers des applications (bi-)holomorphes).

3. Les théorèmes d'interpolation : les opérateurs linéaires continus de l^1 dans l^1 et de l^∞ dans l^∞ se prolongent en opérateurs continus de l^p dans l^p pour tout $p \in [1, +\infty]$.
4. Le théorème de Wiener : Soit f une fonction 2π -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} qui ne s'annule pas et dont les coefficients de Fourier vérifient $\sum |c_n(f)| < +\infty$. Alors $1/f$ est développable en série de Fourier et ses coefficients vérifient $\sum |c_n(1/f)| < +\infty$.
5. Le théorème des nombres premiers : Si $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à x , alors $\pi(x)$ équivaut à $x/\log x$, lorsque x tend vers $+\infty$.

0.3 Propriétés de structure

La théorie des fonctions holomorphes (\mathbb{C} -dérivables sur un ouvert de \mathbb{C}) jouit de propriétés de structure beaucoup plus agréables que celles des fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . En effet :

1. Toute fonction holomorphe est C^∞ et même analytique.
2. La convergence uniforme sur les compacts d'une suite de fonctions holomorphes entraîne celle de ses dérivées de tout ordre.
3. Pour dériver une intégrale à paramètre d'une variable holomorphe, il n'y a pas besoin d'estimer la dérivée de l'intégrande mais seulement l'intégrande lui-même.

0.4 Fonctions

La théorie des fonctions de la variable complexe permet de mettre en lumière des fonctions aux propriétés remarquables :

1. La fonction Γ d'Euler.
2. La fonction ζ de Riemann.
3. La fonction \mathcal{P} de Weierstrass.

1 Propriétés élémentaires

1.1 Définition

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $z_0 \in \Omega$. On dit que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -dérivable en z_0 (de dérivée complexe $f'(z_0)$) lorsque

$$\lim_{h \rightarrow 0, (h \neq 0, z_0 + h \in \Omega)} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

Si f est \mathbb{C} -dérivable en tout point z_0 de Ω , on dit que f est holomorphe sur Ω et on note $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Lorsque $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, on dit que f est entière.

On remarque immédiatement que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -dérivable en z_0 , alors elle est continue en z_0 .

Proposition : On a les mêmes propriétés algébriques avec la dérivation complexe qu'avec la dérivation usuelle:

1. Si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sont \mathbb{C} -dérivables en z_0 de dérivées $f'(z_0)$ et $g'(z_0)$ respectivement, alors $f + g$ et fg sont encore \mathbb{C} -dérivables en z_0 , de dérivées respectives $f'(z_0) + g'(z_0)$ et $f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$.
2. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -dérivable en z_0 de dérivée $f'(z_0)$ et si $f(z_0) \neq 0$, alors $1/f$ est \mathbb{C} -dérivable en z_0 de dérivée $-\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$.
3. Soit Ω, Ω' deux ouverts de \mathbb{C} , et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) \in \Omega'$. Alors si f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 de dérivée $f'(z_0)$ et si g est \mathbb{C} -dérivable en $f(z_0)$ de dérivée $g'(f(z_0))$, la composée $g \circ f$ est \mathbb{C} -dérivable en z_0 de dérivée $f'(z_0)g'(f(z_0))$.
4. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que $t_0 \in I$ et $\gamma(t_0) \in \Omega$. Alors si γ est dérivable en t_0 de dérivée $\gamma'(t_0)$ et si f est \mathbb{C} -dérivable en $\gamma(t_0)$ de dérivée $f'(\gamma(t_0))$, la composée $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 de dérivée $\gamma'(t_0)f'(\gamma(t_0))$.

Preuve : Les démonstrations sont identiques à celles des propriétés correspondantes dans le cas réel.

Corollaire : Si $P \in \mathbb{C}[X]$, la fonction $z \mapsto P(z)$ est entière et sa dérivée complexe est égale à la fonction $z \mapsto P'(z)$, où P' est la dérivée formelle de P (si un polynôme s'écrit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, sa dérivée formelle est définie par $P'(X) = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$). Si $P, Q \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] - \{0\}$, la fonction $z \mapsto P(z)/Q(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - Q^{-1}(\{0\})$ et sa dérivée complexe est égale à la fonction $z \mapsto \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2}$, où P', Q' sont les dérivées formelles de P et Q .

Preuve : Il suffit d'utiliser les propriétés algébriques de la \mathbb{C} -dérivation et les fonctions $z \mapsto c$ (pour $c \in \mathbb{C}$ donné) et $z \mapsto z$.

Sachant que les polynômes complexes sont holomorphes, il est naturel de voir si les séries entières le sont également. La proposition suivante répond à

cette question. On notera dorénavant $B(z_0, R)$ la boule ouverte de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$.

Proposition : Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$ avec $z_0, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}$. Alors

1. la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ est encore de rayon de convergence R ,
2. la fonction $z \in B(z_0, R) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$ est holomorphe sur $B(z_0, R)$ et sa dérivée complexe en z est $\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n (z - z_0)^{n-1}$. Elle est donc \mathbb{C} -dérivable une infinité de fois.

Preuve : On sait que $R_{\sum a_n (z - z_0)^n} = \sup\{r \in [0, +\infty[, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite bornée}\}$. On en déduit que $R_{\sum n a_n (z - z_0)^{n-1}} \leq R_{\sum a_n (z - z_0)^n}$ d'une part, et que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $R_{\sum n a_n (z - z_0)^{n-1}} \geq R_{\sum a_n (z - z_0)^n} - \varepsilon$ d'autre part. En effet, on a (toujours pour $\varepsilon > 0$ assez petit)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{R_{\sum a_n (z - z_0)^n} - \varepsilon}{R_{\sum a_n (z - z_0)^n} - \varepsilon/2} \right)^n = 0.$$

En appliquant l'argument précédent à la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n (z - z_0)^{n-1}$, on voit que la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (z - z_0)^{n-2}$ a encore R pour rayon de convergence.

On remarque alors que pour tout $w, h \in \mathbb{C}$, on a d'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2:

$$(w + h)^n - w^n - n h w^{n-1} = \int_0^1 (1 - \theta) \frac{d^2}{d\theta^2} (w + \theta h)^n d\theta,$$

d'où l'inégalité

$$\left| (w + h)^n - w^n - n h w^{n-1} \right| \leq |h|^2 n(n-1) (|w| + |h|)^{n-2}.$$

On en déduit le résultat demandé.

Corollaire : La fonction $z \mapsto e^z$ (définie par $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$) est entière, ainsi que les fonctions trigonométriques et hyperboliques qui s'en déduisent:

$$\begin{aligned} z \mapsto \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & z \mapsto \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ z \mapsto \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & z \mapsto \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

Les fonctions de la trigonométrie hyperbolique se notent également \cosh et \sinh .

Remarque : Attention, les propriétés de type “égalité” de ces fonctions (telles que $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$) se conservent en général pour $z \in \mathbb{C}$, mais pas le plus souvent celles de type “inégalité” (telles que $|\cos z| \leq 1$, valable pour $z \in \mathbb{R}$, mais pas pour $z \in \mathbb{C}$), et pas non plus celles qui utilisent les valeurs absolues (qui deviennent des modules dans \mathbb{C}). Le plus sûr est souvent de vérifier une propriété donnée en écrivant $z = x + iy$ pour $x, y \in \mathbb{R}$. Ainsi, par exemple,

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique sur Ω lorsque pour tout $z_0 \in \Omega$, f est développable en série entière autour de z_0 (avec un rayon de convergence strictement positif).

Corollaire : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique sur Ω , alors elle est holomorphe sur Ω .

La réciproque de cette proposition est également vraie, mais nettement plus dure à démontrer. Ce sera l’objet des deux chapitres suivants.

Exercice : La fonction $x \in]0, 1[\mapsto \frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ peut-elle se prolonger en une fonction holomorphe sur \mathbb{C}^* ? et sur \mathbb{C} ?

1.2 Les relations de Cauchy–Riemann

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On note $\tilde{\Omega}$ l’ouvert de \mathbb{R}^2 suivant : $\tilde{\Omega} = \{(x, y) / x + iy \in \Omega\}$. Si f est une application de Ω dans \mathbb{C} , on note \tilde{f} l’application de $\tilde{\Omega}$ dans \mathbb{R}^2 définie par $\tilde{f}(x, y) = (\operatorname{Re} f(x + iy), \operatorname{Im} f(x + iy))$. Réciproquement, si $U \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert, on note $U^* \subset \mathbb{C}$ l’ouvert formé par les $\{x + iy / (x, y) \in U\}$, et pour $g = (g_1, g_2)$ application de U dans \mathbb{R}^2 , on définit $g^* : U^* \rightarrow \mathbb{C}$ par $g^*(x + iy) = g_1(x, y) + i g_2(x, y)$.

La proposition suivante permet de faire le lien entre les propriétés de différentiabilité d’une fonction de deux variables réelles (à valeur dans \mathbb{R}^2) et les propriétés d’holomorphie de la fonction correspondante d’une variable complexe (à valeur dans \mathbb{C}), lorsque l’on identifie \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} .

On rappelle qu’une similitude (vectorielle) directe du plan est une transformation linéaire qui transforme un affixe $z \in \mathbb{C}$ en az , où $a \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe donné. Sa matrice s’écrit sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $z_0 \in \Omega$. On a équivalence entre les propriétés suivantes:

1. f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 (de dérivée $f'(z_0)$),
2. \tilde{f} est différentiable en $(\operatorname{Re}z_0, \operatorname{Im}z_0)$ et sa matrice Jacobienne est une matrice de similitude directe (égale à $\begin{pmatrix} \operatorname{Re}f'(z_0) & -\operatorname{Im}f'(z_0) \\ \operatorname{Im}f'(z_0) & \operatorname{Re}f'(z_0) \end{pmatrix}$),
3. $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ est différentiable en $(\operatorname{Re}z_0, \operatorname{Im}z_0)$ et ses dérivées partielles en ce point vérifient les relations de Cauchy–Riemann

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial 1}(\operatorname{Re}z_0, \operatorname{Im}z_0) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial 2}(\operatorname{Re}z_0, \operatorname{Im}z_0),$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial 2}(\operatorname{Re}z_0, \operatorname{Im}z_0) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial 1}(\operatorname{Re}z_0, \operatorname{Im}z_0)$$

$$(\text{et } f'(z_0) = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial 1}(\operatorname{Re}z_0, \operatorname{Im}z_0) + i \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial 2}(\operatorname{Re}z_0, \operatorname{Im}z_0)).$$

Preuve :

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) - f(z_0) &= f'(z_0)h + o(|h|) \\ \Leftrightarrow f(\operatorname{Re}z_0 + \operatorname{Re}h + i(\operatorname{Im}z_0 + \operatorname{Im}h)) - f(\operatorname{Re}z_0 + i\operatorname{Im}z_0) \\ &= (\operatorname{Re}f'(z_0) + i\operatorname{Im}f'(z_0))(\operatorname{Re}h + i\operatorname{Im}h) + o(|h|) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(\operatorname{Re}z_0 + \operatorname{Re}h, \operatorname{Im}z_0 + \operatorname{Im}h) - \tilde{f}_1(\operatorname{Re}z_0, \operatorname{Im}z_0) \\ \tilde{f}_2(\operatorname{Re}z_0 + \operatorname{Re}h, \operatorname{Im}z_0 + \operatorname{Im}h) - \tilde{f}_2(\operatorname{Re}z_0, \operatorname{Im}z_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}f'(z_0) & -\operatorname{Im}f'(z_0) \\ \operatorname{Im}f'(z_0) & \operatorname{Re}f'(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}h \\ \operatorname{Im}h \end{pmatrix} + o(|h|). \end{aligned}$$

Exemple : Les fonctions $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto |z|^2$ sont différentiables (en tant que fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2) mais pas holomorphes sur \mathbb{C} (chercher les points de \mathbb{C} -dérivabilité).

Lorsque $P \in \mathbb{C}[X]$, on sait que $x + iy \mapsto P(x + iy)$ est holomorphe. Ce n'est par contre pas le cas en général pour $x + iy \mapsto P_1(x, y) + iP_2(x, y)$, quand $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi, $z \mapsto |z|^2$ n'est pas holomorphe sur \mathbb{C} alors que $|z|^2 = x^2 + y^2$ pour $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

On introduit maintenant la détermination principale du logarithme, qui jouera un rôle central dans la suite (avec les déterminations principales des puissances α -ièmes) dans les calculs d'intégrale utilisant le théorème des résidus.

Exemple : La fonction \log^* qui à $x + iy \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ associe

$$\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \arctan(y/x) \quad \text{si } x > 0,$$

$$\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \frac{\pi}{2} - i \arctan(x/y) \quad \text{si } y > 0,$$

$$\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) - i \frac{\pi}{2} - i \arctan(x/y) \quad \text{si} \quad y < 0,$$

est bien définie (on peut vérifier que les formules précédentes donnent le même résultat là où les domaines de définition se recoupent) et holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. En effet, sa matrice Jacobienne (ou plus précisément la matrice Jacobienne de la fonction de $\mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ dans \mathbb{R}^2 qui lui est associée) est

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

La fonction \log^* est appelée détermination principale du logarithme. On voit facilement qu'elle est identique au logarithme usuel sur \mathbb{R}_+^* .

En coordonnées polaires, (et pour $\theta \in]-\pi, \pi[$), sa valeur est $\log^*(r e^{i\theta}) = \log r + i\theta$.

Cette fonction ne peut pas se prolonger continûment sur \mathbb{C}^* car

$$\lim_{y \rightarrow 0^+, x \rightarrow x_0} \log^*(x + iy) = \lim_{y \rightarrow 0^-, x \rightarrow x_0} \log^*(x + iy) + 2i\pi$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

Attention à l'utilisation des formules telles que $\log^*(e^z) = z$ ou $\log^*(z_1 z_2) = \log^* z_1 + \log^* z_2$. Elles ont un domaine de validité qui ne recouvre pas entièrement le domaine où chacun des termes qui les composent peuvent être définis. En pratique, on note souvent \log au lieu de \log^* . Attention donc aux confusions !

En général, pour tout $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ ouvert connexe, on appelle détermination du logarithme (ou simplement logarithme) une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $e^{f(z)} = z$ sur Ω . Un tel logarithme n'existe pas pour tout ouvert Ω de \mathbb{C} . D'autre part si f_1 et f_2 sont deux logarithmes sur un même ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ (toujours supposé connexe), alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f_1 - f_2 = 2ki\pi$.

On définit la détermination principale des puissances α -ièmes sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ par

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}.$$

Ce sont encore des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. Elles peuvent se prolonger en fonctions holomorphes sur \mathbb{C}^* si et seulement si $e^{2i\pi\alpha} = 1$, i.e. si $\alpha \in \mathbb{Z}$. Elles peuvent se prolonger en fonctions holomorphes sur \mathbb{C} si et seulement si $\alpha \in \mathbb{N}$ (ce sont alors des polynômes).

L'exercice suivant (qui nécessite de connaître les propriétés élémentaires de la transformée de Fourier) permet de montrer que si les conditions de Cauchy-Riemann (écrites sous la forme contractée $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$) sont vérifiées au sens des distributions, alors la fonction g considérée est holomorphe, même si du point de vue de la régularité, elle est seulement a priori continue (on pourrait d'ailleurs relaxer cette dernière hypothèse, comme cela est suggéré à la dernière question).

Exercice : On note $C_c^\infty(\mathbb{R}^2, K)$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R}^2 dans K ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) qui sont de classe C^∞ et ont un support compact. Pour $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$, on note \hat{g} sa transformée de Fourier définie par

$$\hat{g}(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi + y\eta)} g(x, y) dy dx.$$

Enfin, on désigne par ∂_1, ∂_2 les dérivées partielles par rapport à la première et la seconde variable.

A. Soit f continue de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} telle que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \Delta \phi = 0.$$

1. On se donne $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Calculer $(1 + \xi^2 + \eta^2) \widehat{f\chi}(\xi, \eta)$ en fonction de $\xi \widehat{f\partial_1\chi}(\xi, \eta)$, $\eta \widehat{f\partial_2\chi}(\xi, \eta)$, et $\widehat{f\Delta\chi}(\xi, \eta)$, $\widehat{f\chi}(\xi, \eta)$.

2. Montrer par récurrence sur k que pour tout $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k(\psi) \geq 0$ tel que

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{f\psi}(\xi, \eta)| \leq \frac{C_k(\psi)}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^{k/2}}.$$

3. Montrer en utilisant la formule d'inversion de Fourier que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

B. Soit g continue de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} telle que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$,

$$\int g (\partial_1 \phi + i \partial_2 \phi) = 0.$$

On dit que g vérifie $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ au sens des distributions.

1. Montrer que g est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

2. Montrer que la fonction $\tilde{g} : z \in \mathbb{C} \mapsto g(\mathcal{R}ez, \mathcal{I}mz)$ est entière.

3. Que dire lorsque l'hypothèse “ g est continue” est remplacée par l'hypothèse “ g est localement intégrable” ?

2 Intégrale le long d'un chemin et applications

2.1 Définition

Les définitions suivantes reprennent les notions d'arc paramétré et d'arc géométrique (éventuellement orienté) de \mathbb{R}^2 , mais dans le contexte complexe.

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On appelle chemin continu (resp. continu et C^1 par morceaux, resp. C^1) de Ω une application $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ (avec $a < b$) continue (resp. continue et C^1 par morceaux, resp. C^1). Si de plus $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que le chemin est un lacet. L'ensemble $\gamma([a, b])$ de Ω est appelé "image du chemin".

Définition : Deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 : [a_1, b_1], [a_2, b_2] \rightarrow \Omega$ sont dits C^1 -équivalents lorsqu'il existe $\phi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ bijection de classe C^1 ainsi que sa réciproque (i.e. ϕ' ne s'annule pas sur $[a_1, b_1]$) telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$. Si de plus on peut choisir ϕ (strictement) croissante, on dit que les chemins sont C^1 -équivalents et de même orientation.

Remarque : Il s'agit dans les deux cas de relations d'équivalence. On notera $[\gamma]$ et $[\gamma]_{or}$ la classe d'équivalence relative à ces relations. On notera également que l'image de deux chemins équivalents est identique.

Attention, à cause des points singuliers, des points doubles et des extrémités, ce ne sont pas en général des sous-variétés de \mathbb{C} (identifié à \mathbb{R}^2), même lorsque les chemins sont de classe C^∞ .

Enfin, on remarque que tout chemin est équivalent (de même orientation) à un chemin dont la source est $[0, 1]$. Il suffit de prendre une bijection ϕ affine. dans la définition précédente.

Il est naturel de définir des chemins comme "union" de chemins dont les extrémités coïncident. C'est l'objet de la remarque suivante :

Remarque : Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 : [a_1, b_1], [a_2, b_2] \rightarrow \Omega$ tels que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. On définit $\gamma_1 \cup \gamma_2$ (parfois noté $\gamma_1 + \gamma_2$): $[a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow \Omega$ par

$$\begin{aligned} t &\mapsto \gamma_1(t) \text{ si } t \in [a_1, b_1], \\ t &\mapsto \gamma_2(t + a_2 - b_1) \text{ si } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2], \end{aligned}$$

et $-\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \Omega$ par

$$t \mapsto \gamma_1(b_1 + a_1 - t).$$

On voit tout de suite que si γ_1, γ_2 sont continus (resp. continus et C^1 par morceaux), il en est de même pour $\gamma_1 \cup \gamma_2$ et $-\gamma_1$. Par contre $\gamma_1 \cup \gamma_2$ peut ne pas être de classe C^1 alors que γ_1 et γ_2 le sont !

Dans l'immense majorité des cas, les chemins utilisés en pratique dans les calculs explicites utilisant les fonctions holomorphes sont des unions de segments et d'arcs de cercle. On les définit précisément dans les exemples suivants.

Exemple : Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors $t \in [0, 1] \mapsto (1 - t)z_1 + tz_2$ est un chemin de classe C^1 noté $[z_1, z_2]$ et appelé "segment". Le cas où $z_1 = z_2$ (lacet réduit à un point) apparaîtra souvent dans la suite.

Lorsque $z_1 = x_1 + i y_1, z_2 = x_2 + i y_1$ ($x_1 \leq x_2$), ce chemin est équivalent à $t \in [x_1, x_2] \mapsto t + i y_1$. De même, lorsque $z_1 = x_1 + i y_1, z_2 = x_1 + i y_2$ ($y_1 \leq y_2$), ce chemin est équivalent à $t \in [y_1, y_2] \mapsto x_1 + i t$. Enfin, lorsque $z_1 = r_1 e^{i\theta}, z_2 = r_2 e^{i\theta}$ ($0 \leq r_1 \leq r_2$), ce chemin est équivalent à $t \in [r_1, r_2] \mapsto t e^{i\theta}$. Lorsque $T \subset \mathbb{C}$ est un triangle dont les sommets z_1, z_2, z_3 sont orientés positivement par rapport à son isobarycentre, on définit $\partial T = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1]$.

Exemple : Lorsque $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$ on note $C(z_0, r)$ le chemin de $[0, 2\pi]$ dans \mathbb{C} défini par $t \mapsto z_0 + r e^{it}$. On utilise aussi souvent des arcs de cercles, définis par la même formule, mais avec un ensemble source plus réduit.

Définition : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue, et $\gamma : [a, b]$ un chemin continu et C^1 par morceaux. On note

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

où les $a = t_0 < \dots < t_n = b$ sont les points où γ n'est pas dérivable.

Cette définition est reliée à celle de la circulation d'un champ de vecteur en géométrie différentielle ou en physique. La quantité $\int_{\gamma} f$ ne dépend que de $[\gamma]_{or}$. De plus, un changement d'orientation de γ produit un changement de signe de $\int_{\gamma} f$. Dans les calculs pratiques, il est souvent très utile de choisir le paramétrage le plus simple pour un chemin sur lequel on souhaite intégrer.

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Soit γ un chemin de Ω continu et de classe C^1 par morceaux. Alors

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \sup_{z \in \gamma([a, b])} |f(z)| \times \text{long}(\gamma),$$

où

$$\text{long}(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| dt.$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la définition de l'intégrale sur un chemin d'une fonction continue.

Exercice : Calculer $\int_{C(a, r)} \frac{dz}{z}$ pour $r \neq |a|$. On pensera à utiliser une série entière (sinon le calcul est fort long).

Exercice : Calculer $\int_{\partial T} \frac{dz}{z}$ où T est le triangle de sommets $\{-1, -1\}, \{2, -1\}, \{-1, 2\}$.

Exercice : Montrer que pour tout triangle $T \subset \mathbb{C}$, on a

$$\int_{\partial T} dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\partial T} z dz = 0.$$

Montrer qu'en fait on a $\int_{\partial T} z^n dz = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le résultat de cet exercice montre que l'intégrale sur un triangle d'une série entière (de rayon de convergence adapté) est nulle. On verra plus tard que toute fonction holomorphe est analytique, on s'attend donc à ce que l'intégrale sur un triangle d'une fonction holomorphe soit nulle. C'est l'objet du théorème de Goursat.

2.2 Formule de Cauchy dans les ouverts convexes

Théorème (Goursat): Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , et $T \subset \Omega$ un triangle **plein** fermé. Lorsque $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (ou $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap C(\Omega)$), on a

$$\int_{\partial T} f = 0.$$

Preuve : On suppose pour commencer que $z_0 \notin T$. On pose $T_0 = T$ et on note $T_0^{(1)}, \dots, T_0^{(4)}$ les triangles semblables à T_0 de rapport $1/2, 1/2, 1/2, -1/2$ obtenus en prenant les milieux des segments qui forment T . On a

$$\int_{\partial T} f = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial T_0^{(i)}} f.$$

Donc il existe $i_0 \in \{1, \dots, 4\}$ tel que

$$\left| \int_{\partial T_0^{(i_0)}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T} f \right|.$$

On pose alors $T_1 = T_0^{(i_0)}$.

On construit par récurrence des triangles T_k de la manière suivante: on suppose que T_k est défini, et on considère $T_k^{(1)}, \dots, T_k^{(4)}$ les triangles semblables à T_k de rapport $1/2, 1/2, 1/2, -1/2$ obtenus en prenant les milieux des segments qui forment T_k . On peut alors trouver $i_k \in \{1, \dots, 4\}$ tel que

$$\left| \int_{\partial T_k^{(i_k)}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T_k} f \right|.$$

On pose alors $T_{k+1} = T_k^{(i_k)}$.

On note $\{\tilde{z}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$ (intersection de compacts emboîtés de \mathbb{C} dont le diamètre tend vers 0).

On a

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial T} f \right| \leq 4^k \left| \int_{\partial T_k} f \right| \\ & \leq 4^k \left| \int_{\partial T_k} \left\{ f(z) - f(\tilde{z}) - (z - \tilde{z}) f'(\tilde{z}) \right\} dz \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 4^k \sup_{a,b \in T_k} |a-b| \times \text{long}(\partial T_k) \times \sup_{|z-\tilde{z}| \leq \text{diam}(T_k)} \left| \frac{f(z) - f(\tilde{z})}{z - \tilde{z}} - f'(\tilde{z}) \right| \\ &\leq 2^k \text{diam}(T) \times 2^{-k} \text{long}(\partial T) \times \sup_{z \in B(\tilde{z}, 2^{-k} \text{diam}(T))} \left| \frac{f(z) - f(\tilde{z})}{z - \tilde{z}} - f'(\tilde{z}) \right|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_{\partial T} f = 0.$$

Lorsque $z_0 \in T$, on coupe le triangle en quatre morceaux pour se ramener au cas où z_0 est au sommet. Dans ce dernier cas, on coupe de nouveau en quatre morceaux le triangle, celui qui contient le sommet étant de mesure arbitrairement petite. Comme f est bornée, le résultat s'en déduit.

Exercice : En considérant le triangle de sommets $0, R$ et $(1+i)R$ et la fonction $z \mapsto e^{-z^2/2}$, calculer (et démontrer la convergence) de l'intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} e^{-it^2/2} dt$.

Corollaire : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert **convexe**, et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (ou $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap C(\Omega)$). Alors il existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ primitive complexe de f , i.e. telle que $F' = f$.

Preuve : Soit $\tilde{z} \in \Omega$. On pose $F(z) = \int_{[\tilde{z}, z]} f$, ce qui est bien défini car Ω est convexe.

On a

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_{[\tilde{z}, z+h]} f - \int_{[\tilde{z}, z]} f \\ &= \int_{[z, z+h]} f \end{aligned}$$

d'après le théorème de Goursat.

On en déduit que pour tout $z \in \Omega$ (et $|h|$ assez petit),

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &\leq \left| \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f - f(z) \right| \\ &= \left| \int_0^1 f(z+th) dt - f(z) \right| \\ &\leq \sup_{|z_1 - z| \leq |h|} |f(z_1) - f(z)| \end{aligned}$$

et ceci tend vers 0 par continuité de f .

Proposition : Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle qu'il existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant $F' = f$ (au sens complexe). Alors

1. Si γ est un lacet continu et C^1 par morceaux de Ω , on a $\int_{\gamma} f = 0$,

2. Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins continus et C^1 par morceaux de Ω ayant mêmes extrémités, $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

Preuve : Le premier point est une conséquence du deuxième, il suffit de prendre pour γ_2 un lacet réduit à un point.

On montre donc le second point. Soit $\delta : [a, b] \rightarrow \Omega$ un chemin continu et C^1 par morceaux. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\delta} f &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\delta(t)) \delta'(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (F \circ \delta)'(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} F(\delta(t_{i+1})) - F(\delta(t_i)) \\ &= F(\delta(b)) - F(\delta(a)). \end{aligned}$$

On voit donc que si γ_1 et γ_2 ont mêmes extrémités, on a bien $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

On peut noter que ce calcul est identique à celui qui permet de vérifier que la circulation d'un champ de potentiel est nulle en géométrie différentielle ou en physique.

Corollaire : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert **convexe**, et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (ou $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap C(\Omega)$), alors la conclusion de la proposition précédente est encore valable.

Exercice : Calculer la transformée de Fourier d'une Gaussienne centrée réduite, c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix} e^{-x^2/2} dx$, en utilisant un chemin "rectangulaire" parallèle aux axes de coordonnées.

Exercice : On considère $a > 0$, $\xi > 0$. Pour $R > 0$, on note L_R le chemin formé par un arc de cercle centré en 0 et d'extrémités $R|a + i\xi|$ et $R(a + i\xi)$, orienté dans le sens positif. On note également (pour $0 < \varepsilon < R$) $\Gamma_{\varepsilon, R}$ le chemin $[\varepsilon|a + i\xi|, R|a + i\xi|] + L_R + [R(a + i\xi), \varepsilon(a + i\xi)] - L_{\varepsilon}$. Enfin, on pose pour $\alpha > 0$,

$$f(z) = e^{-z} z^{\alpha-1},$$

où $z^{\alpha-1}$ désigne la détermination principale de la puissance $(\alpha - 1)$ -ième.

1. Montrer que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_R} f = 0$, et que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L_{\varepsilon}} f = 0$.
2. Montrer que $\int_{\Gamma_{\varepsilon, R}} f = 0$. Calculer (pour $a, \alpha, \xi > 0$) la quantité $\int_0^{+\infty} e^{-ax - ix\xi} x^{\alpha-1} dx$ en fonction de $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$.

Ce calcul permet d'obtenir la transformée de Fourier de fonctions du type $x \mapsto 1_{x \geq 0} e^{-ax} x^{\alpha-1}$.

Exercice : Pour $R > 0$, on note L_R le chemin défini par $\theta \in [0, \pi/2] \mapsto R e^{i\theta}$. On note également Γ_R le chemin $[iR, 0] + [0, R] + L_R$. Enfin, on pose

$$f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-z}}{z}.$$

1. Montrer que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_R} f = 0$.
2. En utilisant le chemin Γ_R , calculer (et montrer la convergence) de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx.$$

2.3 Formule de Cauchy pour les chemins homotopes

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$ deux chemins continus définis sur un même intervalle.

1. Si γ_1 et γ_2 ont mêmes extrémités, on dit qu'ils sont homotopes strictement (dans Ω) lorsqu'il existe $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ continue (des deux variables), dite homotopie stricte de chemins, telle que $H(\cdot, 0) = \gamma_1$, $H(\cdot, 1) = \gamma_2$, et

$$H(a, \cdot) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a), \quad H(b, \cdot) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b).$$

2. Si γ_1 et γ_2 sont des lacets, on dit qu'ils sont homotopes au sens des lacets lorsqu'il existe $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ continue (des deux variables), dite homotopie de lacets, telle que $H(\cdot, 0) = \gamma_1$, $H(\cdot, 1) = \gamma_2$, et $H(\cdot, u)$ est un lacet pour tout $u \in [0, 1]$.

Remarque : l'homotopie stricte de chemin et l'homotopie de lacets sont des relations d'équivalence.

De plus, si $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$ sont des chemins définis sur un même intervalle et équivalents de même orientation, ils sont homotopes strictement: si ϕ est le changement de variables ($\gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi$), on pose $H(t, u) = \gamma_1((1-u)t + u\phi(t))$.

On voit donc que l'on peut définir l'homotopie pour les classes d'équivalence de chemins (avec conservation de l'orientation), en se limitant à des changements de variable conservant l'intervalle source. Mais cela permet aussi de justifier une définition de l'homotopie (et de ses variantes) pour des chemins n'ayant pas le même intervalle source. On utilise pour cela un changement de variable

affine par exemple, qui permet de se ramener au même intervalle. Tout autre changement de variables (conservant l'orientation) donnerait alors le même résultat.

Le théorème suivant jouera un rôle fondamental dans toute la théorie développée dans ce cours :

Théorème : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (ou $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap C(\Omega)$).

1. Si γ_1 et γ_2 sont des lacets continus et C^1 par morceaux de Ω **homotopes au sens des lacets**, on a $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$. En particulier si γ_2 est le lacet réduit à un point, $\int_{\gamma_1} f = 0$.
2. Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins continus et C^1 par morceaux de Ω ayant mêmes extrémités et étant homotopes strictement, $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

Preuve : On commence par montrer 2. On dispose de $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ continue (des deux variables) telle que $H(\cdot, 0) = \gamma_1$, $H(\cdot, 1) = \gamma_2$, et

$$H(a, \cdot) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a), \quad H(b, \cdot) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b).$$

On note $\delta = d(H([a, b] \times [0, 1]), \Omega^c)$. Il est clair que $\delta > 0$.

On pose $t_j = a + j \frac{b-a}{n}$. Il est clair que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. De même, on pose $u_j = \frac{j}{n}$, et on a $0 = u_0 < \dots < u_n = 1$.

On définit alors H_n de la manière suivante: pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $u \in [u_j, u_{j+1}]$,

$$\begin{aligned} H_n(t, u) &= \frac{u_{j+1} - u}{u_{j+1} - u_j} \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} H(t_i, u_j) + \frac{u_{j+1} - u}{u_{j+1} - u_j} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} H(t_{i+1}, u_j) \\ &+ \frac{u - u_j}{u_{j+1} - u_j} \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} H(t_i, u_{j+1}) + \frac{u - u_j}{u_{j+1} - u_j} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} H(t_{i+1}, u_{j+1}). \end{aligned}$$

Il est clair que H_n est continue et approxime H au sens suivant:

$$\begin{aligned} |H_n(t, u) - H(t, u)| &\leq \sup \left(|H(t, u) - H(t_i, u_j)|, |H(t, u) - H(t_{i+1}, u_j)| \right. \\ &\quad \left. |H(t, u) - H(t_i, u_{j+1})|, |H(t, u) - H(t_{i+1}, u_{j+1})| \right) \\ &\leq \sup_{\|(t, u) - (\tilde{t}, \tilde{u})\| \leq \frac{\sqrt{1+(b-a)^2}}{n}} |H(t, u) - H(\tilde{t}, \tilde{u})|. \end{aligned}$$

En effet, $H_n(t, u)$ est combinaison convexe de $H(t_i, u_j)$, $H(t_{i+1}, u_j)$, $H(t_i, u_{j+1})$ et $H(t_{i+1}, u_{j+1})$.

Comme H est uniformément continue (grâce au théorème de Heine), on voit que H_n converge vers H uniformément sur $[a, b] \times [0, 1]$. En particulier, lorsque n est assez grand, on a $d(H_n([a, b] \times [0, 1]), \Omega^c) \geq \delta/2$, donc H_n est une homotopie stricte de chemin entre $H_n(\cdot, 0)$ et $H_n(\cdot, 1)$.

De plus H_n possède par rapport à H une propriété supplémentaire : ses sections (c'est-à-dire les fonctions $H_n(t, \cdot)$ et $H_n(\cdot, u)$) sont toutes continues et de classe C^1 par morceaux (en fait affines par morceaux).

On écrit

$$\begin{aligned} \int_{H_n(\cdot, 0)} f - \int_{H_n(\cdot, 1)} f &= \int_{t \in [a, b] \rightarrow H_n(t, 0)} f + \int_{u \in [0, 1] \rightarrow H_n(b, u)} f \\ &\quad - \int_{t \in [a, b] \rightarrow H_n(t, 1)} f - \int_{u \in [0, 1] \rightarrow H_n(a, u)} f \\ &= \sum_{k=1}^{K^2} \int_{H_n(\partial R_k^{(K)})} f, \end{aligned}$$

où $H_n(\partial R_k^{(K)})$ désigne le chemin formé par la réunion des images (par H_n) des quatre intervalles formant $\partial R_k^{(K)}$, $R_k^{(K)}$ étant le k -ième rectangle formé par une partition en K^2 rectangles semblables de $[a, b] \times [0, 1]$. Par exemple,

$$\begin{aligned} H_n(\partial R_1^{(K)}) &= \{t \in [a, a + \frac{b-a}{K}] \mapsto H_n(t, 0)\} \\ &\quad + \{u \in [0, \frac{1}{K}] \mapsto H_n(a + \frac{b-a}{K}, u)\} \\ &\quad - \{t \in [a, a + \frac{b-a}{K}] \mapsto H_n(t, \frac{1}{K})\} - \{u \in [0, \frac{1}{K}] \mapsto H_n(0, u)\}. \end{aligned}$$

L'uniforme continuité de H_n montre que

$$\sup_{k=1, \dots, K^2} \sup_{z \in R_k^{(K)}} \left| H_n(z) - H_n(c_k^{(K)}) \right| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad K \rightarrow +\infty,$$

où $c_k^{(K)}$ désigne le centre du rectangle $R_k^{(K)}$. En effet, pour $z \in R_k^{(K)}$, on a $|z - c_k^{(K)}| \leq \frac{1}{2K} \sqrt{1 + (b-a)^2}$.

Donc dès que K est assez grand, on a pour tout $k \in 1, \dots, K^2$,

$$H_n(R_k^{(K)}) \subset B(H_n(c_k^{(K)}), \delta/2).$$

Le théorème de Cauchy sur les convexes montre alors que $\int_{H_n(\partial R_k^{(K)})} f = 0$. On en déduit donc que

$$\int_{H_n(\cdot, 0)} f = \int_{H_n(\cdot, 1)} f.$$

Pour conclure, on remarque que

$$\left| \int_{H_n(\cdot, 0)} f - \int_{\gamma_1} f \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \int_{t \in [t_i, t_{i+1}] \mapsto H_n(t, 0)} f - \int_{t \in [t_i, t_{i+1}] \mapsto \gamma_1(t)} f \right\} \right|.$$

Mais la réunion des images de $t \in [t_i, t_{i+1}] \mapsto H_n(t, 0)$ et de $-(t \in [t_i, t_{i+1}] \mapsto \gamma_1(t))$ est incluse dans $B(\gamma_1(t_i), \delta)$ pour n assez grand, si bien qu'en appliquant la formule de Cauchy sur un convexe, on obtient

$$\int_{H_n(\cdot, 0)} f = \int_{\gamma_1} f.$$

On peut également noter qu'il est possible de conclure, sans référence au théorème de Cauchy sur les convexes, que lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$\int_{H_n(\cdot, 0)} f \rightarrow \int_{\gamma_1} f.$$

Il reste à montrer 1. Pour cela, on observe que si γ_1 et γ_2 sont deux lacets homotopes au sens des lacets (d'homotopie H), alors $(-\{u \in [0, 1] \mapsto H(a, u)\}) + \gamma_1 + \{u \in [0, 1] \mapsto H(a, u)\}$ et γ_2 sont strictement homotopes en tant que chemins de même extrémité. On prend pour homotopie $\tilde{H}(\cdot, v) = (-\{u \in [v, 1] \mapsto H(a, u)\}) + H(\cdot, v) + \{u \in [v, 1] \mapsto H(a, u)\}$. On applique alors le résultat précédent après régularisation (l'homotopie H n'est pas nécessairement de classe C^1 par morceaux).

Exercice : On prouve ici par le calcul et dans un cadre un peu moins général une des formules de Cauchy démontrée précédemment. On considère Ω un ouvert de \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et de dérivée continue, et $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$ deux chemins de classe C^2 de mêmes extrémités strictement homotopes. On suppose de plus que l'homotopie H en question est de classe C^2 .

On note $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 associée à f et on utilise pour désigner la dérivée par rapport à la première variable d'une fonction la notation $\frac{\partial}{\partial 1}$. Enfin, on écrit $H_1 = \mathcal{R}eH$ et $H_2 = \mathcal{I}mH$.

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e \left(\frac{d}{du} \left[\int_{H(\cdot, u)} f \right] \right) &= \int_{t=a}^b \left[\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial 1} \frac{\partial H_1}{\partial 2} \frac{\partial H_1}{\partial 1} + \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial 2} \frac{\partial H_2}{\partial 2} \frac{\partial H_1}{\partial 1} + \tilde{f}_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial 1 \partial 2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial 1} \frac{\partial H_1}{\partial 2} \frac{\partial H_2}{\partial 1} - \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial 2} \frac{\partial H_2}{\partial 2} \frac{\partial H_2}{\partial 1} - \tilde{f}_2 \frac{\partial^2 H_2}{\partial 1 \partial 2} \right] dt. \end{aligned}$$

2. Montrer que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\tilde{f}_1 \frac{\partial H_1}{\partial 2} - \tilde{f}_2 \frac{\partial H_2}{\partial 2} \right] &= \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial 1} \frac{\partial H_1}{\partial 1} \frac{\partial H_1}{\partial 2} + \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial 2} \frac{\partial H_2}{\partial 1} \frac{\partial H_1}{\partial 2} + \tilde{f}_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial 1 \partial 2} \\ &\quad - \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial 1} \frac{\partial H_1}{\partial 1} \frac{\partial H_2}{\partial 2} - \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial 2} \frac{\partial H_2}{\partial 1} \frac{\partial H_2}{\partial 2} - \tilde{f}_2 \frac{\partial^2 H_2}{\partial 1 \partial 2}. \end{aligned}$$

3. En utilisant les relations de Cauchy–Riemann et en travaillant de manière analogue sur les parties imaginaires, montrer que

$$\frac{d}{du} \left[\int_{H(\cdot, u)} f \right] = \int_{t=a}^b \frac{d}{dt} \left(\left[\tilde{f}_1 \frac{\partial H_1}{\partial 2} - \tilde{f}_2 \frac{\partial H_2}{\partial 2} \right] + i \left[\tilde{f}_1 \frac{\partial H_2}{\partial 2} + \tilde{f}_2 \frac{\partial H_1}{\partial 2} \right] \right) dt.$$

4. Conclure.

2.4 Ouverts simplement connexes de \mathbb{C}

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit qu’il est simplement connexe lorsqu’il est connexe (i.e. connexe par arcs) et que deux chemins γ_1, γ_2 continus de même extrémité quelconques sont toujours strictement homotopes.

Remarque : On voit facilement que Ω est simplement connexe si et seulement si il est connexe et que tout lacet continu de Ω est homotope (au sens des lacets) à un point.

Proposition : Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert convexe (ou plus généralement un ouvert étoilé par rapport à l’un de ses points x_0 , i.-e. tel que pour tout $x \in \Omega$, $[x_0, x] \subset \Omega$), alors Ω est simplement connexe.

Preuve : Le lacet γ est homotope au point x_0 à travers l’homotopie $H(t, u) = (1 - u) \gamma(t) + u x_0$.

Exemple : \mathbb{C} privé d’une demi-droite issue de x_0 est étoilé par rapport à x_0 et donc simplement connexe, mais \mathbb{C} privé d’une spirale issue de x_0 est simplement connexe sans pour cela être étoilé par rapport à x_0 (ou par rapport à n’importe quel autre point de \mathbb{C} d’ailleurs).

La proposition suivante reprend le théorème sur l’intégrale des fonctions holomorphes sur des chemins strictement homotopes, dans le cadre simplifié d’un ouvert simplement connexe, c’est également une généralisation de la même proposition dans le cadre des ouverts convexes :

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (ou $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap C(\Omega)$). Alors

1. Si γ est un lacet continu et C^1 par morceaux de Ω , on a $\int_{\gamma} f = 0$.
2. Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins continus et C^1 par morceaux de Ω ayant mêmes extrémités, $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

Exercice : On note Γ_{δ} le chemin formé du demi-cercle centré en 0 et de rayon δ inclus dans $\{z, \text{Im}z \geq 0\}$ et orienté dans le sens positif.

1. Montrer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} = i\pi.$$

2. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1/\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = i\pi$$

et en déduire en prenant la conjuguée de cette égalité, que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1/\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{e^{-ix}}{-x} dx + \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{e^{-ix}}{-x} dx \right) = i\pi.$$

3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (on montrera la (semi)-convergence de cette intégrale).

Notons que la formule de Cauchy dans les ouverts simplement connexes permet d'obtenir de manière immédiate des résultats de topologie qui ne sont pas faciles à prouver de manière directe (i.-e. sans utiliser de structure différentielle), comme dans l'exercice suivant :

Exercice : Montrer que $\mathbb{C} - \overline{B(z_0, \delta)}$ est non simplement connexe pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$.

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (ou $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap C(\Omega)$). Alors il existe $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $F' = f$ (primitive complexe de f).

Preuve : Soit $z_0 \in \Omega$. On pose

$$F(z) = \int_{\gamma} f,$$

où γ est un chemin qui joint z_0 à z (l'existence d'un tel chemin est assurée par la connexité par arcs de Ω). La proposition précédente assure que F est bien définie. On a alors

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f,$$

et on conclut comme dans le cas où Ω est convexe.

2.5 Indice d'un lacet par rapport à un point

Définition : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et γ un lacet continu et C^1 par morceaux de \mathbb{C} tel que $z_0 \notin \gamma([a, b])$. On pose alors

$$Ind_{z_0}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Proposition : On a

1. $Ind_{z_0}(\gamma) \in \mathbb{Z}$,
2. Si γ_1 et γ_2 sont des lacets homotopes (au sens des lacets) de $\mathbb{C} - \{z_0\}$, alors

$$Ind_{z_0}(\gamma_1) = Ind_{z_0}(\gamma_2).$$

3. Pour tout $\delta > 0$,

$$Ind_{z_0}(\theta \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + \delta e^{in\theta}) = n.$$

4. La fonction $z_0 \mapsto Ind_{z_0}(\gamma)$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C} - \gamma([a, b])$ et nulle sur l'unique composante connexe non bornée de cet ensemble.
5. Si γ_1 et γ_2 sont des lacets de même origine,

$$Ind_{z_0}(\gamma_1 + \gamma_2) = Ind_{z_0}(\gamma_1) + Ind_{z_0}(\gamma_2).$$

Preuve : On suppose (sans restreindre la généralité) que $a = 0, b = 1$. On commence par remarquer que $d(\gamma([0, 1]), z_0) > 0$, si bien que l'intégrale est correctement définie.

On commence par prouver 1. On pose

$$G(t) = e^{\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds}.$$

On a alors

$$G'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} e^{\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds},$$

d'où

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}.$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\gamma(t) - z_0}{G(t)} \right] = \frac{\gamma'(t)G(t) - (\gamma(t) - z_0)G'(t)}{G(t)^2} = 0.$$

D'où

$$\frac{\gamma(1) - z_0}{G(1)} = \frac{\gamma(0) - z_0}{G(0)},$$

et $G(1) = G(0) = 1$. On a donc

$$e^{\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0} ds} = 1,$$

et par conséquent

$$\text{Ind}_{z_0}(\gamma) = \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0} \frac{ds}{2\pi i} \in \mathbb{Z}.$$

On passe à la preuve de 2. C'est une conséquence immédiate du théorème de Cauchy général.

On obtient 3. par le calcul:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{i n \delta e^{i n \theta}}{\delta e^{i n \theta}} d\theta = n.$$

Pour montrer 4., on remarque que $z_0 \mapsto \text{Ind}_{z_0}(\gamma)$ est une fonction continue de $\mathbb{C} - \gamma([a, b])$ à valeurs dans \mathbb{Z} (cela s'obtient facilement par utilisation du théorème de convergence dominée en tenant compte du fait que $d(\gamma([a, b]), z_0) > 0$). Elle est donc constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} - \gamma([a, b])$. De plus,

$$\lim_{|z_0| \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 0,$$

si bien que l'on obtient un indice par rapport à z_0 nul sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} - \gamma([a, b])$.

Enfin, on obtient 5. immédiatement.

L'exercice suivant montre que l'on peut démontrer le théorème de D'Alembert–Gauss à partir de propriétés de topologie.

Exercice : On démontre par l'absurde le théorème de D'Alembert–Gauss. On se donne pour cela un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ à coefficients dans \mathbb{C} , de la forme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$, et on suppose que ce polynôme n'a pas de racines dans \mathbb{C} .

Dans cet exercice, les lacets utilisés ont l'intervalle $[0, 1]$ comme source.

1. Montrer que pour tout $s_0 \in \mathbb{C}$, les lacets $t \mapsto P(s_0 e^{2\pi i t})$ et $t \mapsto P(0)$ sont homotopes (au sens des lacets) dans \mathbb{C}_* .

2. On suppose maintenant que $s_0 \in \mathbb{R}_+$ et que $s_0 > 1$, $s_0 > \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. Montrer que les lacets $t \mapsto s_0^n e^{2\pi i n t}$ et $t \mapsto P(s_0 e^{2\pi i t})$ sont homotopes (au sens des lacets) dans \mathbb{C}_* .

3. Dédire des deux questions précédentes (et sous les hypothèses de la question 2. sur s_0) que les lacets $t \mapsto P(0)$ et $t \mapsto s_0^n e^{2\pi i n t}$ sont homotopes (au sens des lacets) dans \mathbb{C}_* .

4. Conclure en utilisant la notion d'indice d'un lacet par rapport à un point.

3 Analyticité des fonctions holomorphes et applications

3.1 Formules de la moyenne et application à l'analyticité

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et soit γ un lacet continu et de classe C^1 par morceaux de Ω homotope à un point. Alors pour tout $z_0 \in \Omega - \gamma([a, b])$, on a

$$f(z_0) \operatorname{Ind}_{z_0}(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{dz}{2\pi i}.$$

En particulier, si $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$, on a

$$f(z_0) = \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{dz}{2\pi i} = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = VM_{C(z_0, r)}(f),$$

où VM désigne la valeur moyenne.

Preuve : Pour tout $z_0 \in \Omega$, la fonction

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap C(\Omega)$. On a donc

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \frac{dz}{2\pi i} = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{dz}{2\pi i} &= f(z_0) \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} \frac{dz}{2\pi i} \\ &= f(z_0) \operatorname{Ind}_{z_0}(\gamma). \end{aligned}$$

Corollaire : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors f est développable en série entière en tout point z_0 de Ω (c'est-à-dire analytique), de rayon de convergence au moins égal à $\sup\{r > 0, \overline{B(z_0, r)} \subset \Omega\}$. En particulier la \mathbb{C} -dérivée f' de f est dans $\mathcal{H}(\Omega)$ (et de même toutes les \mathbb{C} -dérivées successives de f). Enfin, $\tilde{f} \in C^\infty(\tilde{\Omega})$.

Preuve : Soit $a \in B(z_0, r)$, où $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$. Alors

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - a} \frac{dz}{2\pi i} \\ &= \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0) \left(1 - \frac{a - z_0}{z - z_0}\right)} \frac{dz}{2\pi i} \end{aligned}$$

$$= \int_{C(z_0, r)} \sum_{k=0}^{+\infty} (a - z_0)^k \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2\pi i}.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de Fubini ou de convergence dominée, on remarque que

$$\begin{aligned} & \int_{C(z_0, r)} \sum_{k=0}^{+\infty} |a - z_0|^k \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \right| \frac{dz}{2\pi} \\ & \leq \|f\|_{L^\infty(\overline{B(z_0, r)})} \int_{C(z_0, r)} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{|a - z_0|}{r} \right)^k \frac{dz}{2\pi r} \\ & \leq \frac{\|f\|_{L^\infty(\overline{B(z_0, r)})}}{1 - \frac{|a - z_0|}{r}}. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$f(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a - z_0)^k \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2\pi i}.$$

Comme

$$\left| \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2\pi i} \right| \leq \frac{\|f\|_{L^\infty(\overline{B(z_0, r)})}}{r^k},$$

on voit que f est égale sur $B(z_0, r)$ à une série entière (centrée en z_0) de rayon de convergence au moins égal à r . On en déduit que f est analytique sur Ω . De plus, on sait que f' est encore égale à une série entière (centrée en z_0) de rayon de convergence au moins égal à r (Cf. chapitre 1), et donc $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$ (toujours Cf. chapitre 1). Finalement, toutes les \mathbb{C} -dérivées successives de f sont holomorphes sur \mathbb{C} , puis (comme les différentielles successives de \tilde{f} s'expriment en fonctions de ces dernières), on voit que $\tilde{f} \in C^\infty(\tilde{\Omega})$.

Remarque : Comme on sait que les séries entières définissent des fonctions holomorphes sur leur disque ouvert de convergence, on en déduit qu'elles sont également analytiques sur leur disque ouvert de convergence. Ce résultat n'est pas totalement trivial, mais il peut être démontré sans difficulté et sans avoir recours à la théorie des fonctions holomorphes.

Corollaire : Le rayon de convergence de la série entière qui définit \tan en 0 est $\frac{\pi}{2}$.

Preuve : On sait que \tan est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. En effet $\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$ ne s'annule que si $y = 0$ et $x \in \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$.

D'après le résultat précédent on en déduit que le rayon de convergence de la série entière (en 0) qui la définit est plus grand que $\frac{\pi}{2}$. De plus, comme \tan est une fonction holomorphe sur $B(0, \frac{\pi}{2})$, elle est égale à la somme de la série

entière en question sur cette boule (ouverte). Donc la somme de cette série tend vers $+\infty$ pour $z \in \mathbb{R}, z \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$. Ceci implique que le rayon de convergence de la série entière est plus petit que $\frac{\pi}{2}$.

Exercice : On considère la fonction $f(z) = \operatorname{ch} z$ sur \mathbb{C} .

1. Quels sont les zéros de f sur \mathbb{C} ?
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière (centrée en 0) égale à $\frac{1}{\operatorname{ch} z}$ au voisinage de 0 ?

3.2 Conséquences de la régularité des fonctions holomorphes

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors $\Delta \tilde{f}_1 = \Delta \tilde{f}_2 = 0$. On dit que \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 sont harmoniques.

Preuve : C'est une conséquence simple des relations de Cauchy–Riemann une fois que l'on sait que f est de classe C^2 .

L'exercice suivant montre une réciproque locale de cette propriété. Une fonction harmonique est localement une partie réelle de fonction holomorphe.

Exercice : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Soit $R > 0$. On considère $g : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 = R\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la formule

$$u_g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R e^{it} + z}{R e^{it} - z} g(R \cos t, R \sin t) dt$$

définit une fonction holomorphe sur $B(0, R)$.

2. Montrer que

$$\begin{aligned} & v_g(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - t) + r^2} g(R \cos t, R \sin t) dt \end{aligned}$$

définit une fonction harmonique (préciser sa régularité) sur la boule $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 < R\}$.

3. Montrer que (pour $u \in \mathbb{R}$), on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (r/R)^{|n|} e^{in u} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos u + r^2}.$$

En déduire que v_g se prolonge par continuité sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 \leq R\}$.

4. Soient k, l deux fonctions continues sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 \leq R\}$ et harmoniques sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 < R\}$. On suppose que $k = l$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 = R\}$. Montrer que $k = l$. On pourra pour cela considérer (lorsque $\varepsilon > 0$) le point de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 \leq R\}$ où $(x, y) \mapsto k(x, y) - l(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2)$ est maximale.

5. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $x_0 \in \Omega$ et $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique (par exemple C^2). Montrer que l'on peut trouver un voisinage ouvert V de x_0 tel que $p|_V$ soit la partie réelle d'une fonction holomorphe (sur l'ouvert de \mathbb{C} identifié à l'ouvert V de \mathbb{R}^2).

Nous donnons maintenant la version holomorphe du théorème d'inversion locale.

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe $\Omega' \subset \Omega$ ouvert tel que $z_0 \in \Omega'$, $f(\Omega')$ soit ouvert dans \mathbb{C} , f soit injective sur Ω' , f' ne s'annule pas sur Ω' , et $f^{-1} : f(\Omega') \rightarrow \Omega'$ est holomorphe sur $f(\Omega')$ et vérifie $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Preuve : On sait que \tilde{f} est de classe C^1 sur $\tilde{\Omega}$. Comme $f'(z_0) \neq 0$, on a $d\tilde{f}(\operatorname{Re}z_0, \operatorname{Im}z_0) \neq 0$ et, comme c'est une similitude, cette différentielle est inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale dans \mathbb{R}^2 , ce qui fournit un ouvert $U \subset \tilde{\Omega}$ tel que $(\operatorname{Re}z_0, \operatorname{Im}z_0) \in U$, $\tilde{f}(U)$ est ouvert dans \mathbb{R}^2 , \tilde{f} est injective sur U , $d\tilde{f}$ est inversible sur U , et ce qui fournit également une fonction réciproque $(\tilde{f})^{-1}$ de $\tilde{f}(U)$ dans U de classe C^1 et de différentielle $(d\tilde{f})^{-1}$. Il s'agit donc encore d'une similitude directe, et on en déduit que $f^{-1} = ((\tilde{f})^{-1})^*$ est bien une réciproque holomorphe de f sur $\Omega' = U^*$. En utilisant la formule de la \mathbb{C} -dérivée d'une composée, on voit que l'on a forcément $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

3.3 Conséquences de $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow f' \in \mathcal{H}(\Omega)$

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, ne s'annulant pas sur Ω .

1. Il existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $e^g = f$ (logarithme complexe de f).
2. Si $n \in \mathbb{N}$, il existe $h_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $(h_n)^n = f$ (racine n -ième de f).

Preuve : On commence par 1. On considère g primitive complexe sur Ω de $\frac{f'}{f}$ ($f' \in \mathcal{H}(\Omega)$ car $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et l'ouvert est supposé simplement connexe). On a $(fe^{-g})' = f'e^{-g} - fg'e^{-g} = 0$. On en déduit que $f = cte e^g$ et on peut ramener la constante à 1 en changeant g en $g + cte'$.

Pour 2., il suffit de prendre $h_n = e^{\frac{1}{n} \log f}$.

Exercice : Soient $e_1 < e_2 < e_3$ trois réels et $P(X) = (X - e_1)(X - e_2)(X - e_3)$.

1. Montrer que $1/P$ admet une racine carrée holomorphe g sur $\mathbb{C} - (]-\infty, e_2] \cup [e_3, +\infty[)$.
2. Pour simplifier les notations, on identifie \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 . Montrer que $g|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*}$ se prolonge par continuité sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ - \{e_1, e_2, e_3\}$ en une fonction notée \tilde{g}_1 et que $g|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*}$ se prolonge par continuité sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_- - \{e_1, e_2, e_3\}$ en une fonction notée \tilde{g}_2 .
On pourra montrer que $g|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* - \cup_{i=1}^3 \overline{B(e_i, \varepsilon)}}$ est uniformément continue pour tout $\varepsilon > 0$ en utilisant le fait que g' est bornée sur de tels ensembles (car $(g')^2 = (P')^2/4P^3$ l'est également).
3. Montrer que $\tilde{g}_1|_{]-\infty, e_1[} = \tilde{g}_2|_{]-\infty, e_1[}$ et que $\tilde{g}_1|_{]e_1, e_2[\cup]e_3, +\infty[} = -\tilde{g}_2|_{]e_1, e_2[\cup]e_3, +\infty[}$. On utilisera un raisonnement faisant intervenir la connexité et le fait que $1/(z - e_i)$ n'admet pas de racines carrées continues (à valeurs complexes) sur $C(e_i, \delta)$ (et cela, quel que soit $\delta > 0$).
4. En utilisant un contour homotope à un point dans $\mathbb{C} - \{e_1, e_2, e_3\}$, montrer que

$$\int_{e_1}^{e_2} \frac{1}{\sqrt{P(x)}} dx = \int_{e_3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{P(x)}} dx.$$

Proposition (Morera) : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On a équivalence entre

1. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$,
2. Pour tout triangle plein fermé T inclus dans Ω , $\int_{\partial T} f = 0$.

Comme le fait d'être holomorphe est une propriété locale, il suffit de vérifier la deuxième propriété pour tous les triangles inclus dans une boule de rayon arbitrairement petit.

Preuve : Le théorème de Goursat fournit une implication.

On suppose donc que pour tout triangle plein fermé T inclus dans Ω , $\int_{\partial T} f = 0$. Soit $z_0 \in \Omega$, tel que $B(z_0, \delta) \subset \Omega$ pour $\delta > 0$ (une telle boule existe toujours). Pour $z \in B(z_0, \delta)$, on pose $F(z) = \int_{[z_0, z]} f$. On a

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \int_{t=0}^1 [f((1-t)z + t(z+h)) - f(z)] dt$$

$$= \int_{t=0}^1 [f(z + th) - f(z)] dt.$$

Donc

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \sup_{|\tilde{z}-z| \leq h} |f(\tilde{z}) - f(z)|,$$

ce qui tend vers 0 quand f est continue.

On en déduit que F est une primitive de f sur $B(z_0, \delta)$ et en particulier que $F \in \mathcal{H}(B(z_0, \delta))$. Comme $f = F'$, on en déduit que f est holomorphe sur cette boule.

Le théorème de Morera permet parfois de donner des preuves très simples de l'holomorphie d'une fonction : ainsi, on peut prouver la proposition suivante pour les intégrales à paramètre (dans laquelle on ne donne pas encore la formule pour obtenir la dérivée : celle-ci sera donnée un peu plus loin dans le cours) :

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit U un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^N . On se donne une fonction $K : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour presque tout $u \in U$, la fonction $z \mapsto K(z, u)$ est holomorphe sur Ω , et telle que pour tout $z \in \Omega$, la fonction $u \in U \mapsto K(z, u)$ est intégrable sur U . L'intégrale à paramètre $f(z) = \int_U K(z, u) du$ est alors définie pour tout $z \in \Omega$.

Si de plus on a l'estimation de domination suivante :

$$\forall z \in \Omega, p.p. u \in U, \quad |K(z, u)| \leq g(u),$$

où g est une fonction intégrable sur U , alors la fonction f est holomorphe sur Ω .

Preuve : On utilise le théorème de Morera. On se donne un triangle (fermé plein inclus dans Ω) T de sommets z_1, z_2, z_3 (on pose $z_4 = z_1$), et on calcule

$$\begin{aligned} \int_{\partial T} f(z) dz &= \sum_{i=1}^3 (z_{i+1} - z_i) \int_{t=0}^1 f((1-t)z_i + tz_{i+1}) dt \\ &= \sum_{i=1}^3 (z_{i+1} - z_i) \int_{t=0}^1 \int_{u \in U} K((1-t)z_i + tz_{i+1}, u) du dt. \end{aligned}$$

On vérifie que l'on peut alors appliquer le théorème de Fubini :

$$\int_{t=0}^1 \int_{u \in U} |K((1-t)z_i + tz_{i+1}, u)| du dt \leq \int_{t=0}^1 \int_{u \in U} |g(u)| du dt \leq \|g\|_{L^1(U)}.$$

On obtient

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \sum_{i=1}^3 (z_{i+1} - z_i) \int_{u \in U} \int_{t=0}^1 K((1-t)z_i + tz_{i+1}, u) dt du$$

$$= \int_{u \in U} \left(\int_{\partial_T} K(z, u) dz \right) du = 0$$

puisque $z \mapsto K(z, u)$ est holomorphe sur Ω . Le théorème de Morera montre alors que f est holomorphe sur Ω .

Remarque : Comme d'habitude pour ce type de résultat, la propriété à démontrer étant locale, il suffit de vérifier les hypothèses sur un voisinage du point z_0 en lequel on veut démontrer la \mathbb{C} -dérivabilité. Attention : il n'y a par contre pas de théorème simple qui permette de démontrer la \mathbb{C} -dérivabilité d'une intégrale à paramètre en un point z_0 en n'utilisant que la \mathbb{C} -dérivabilité de l'intégrande en ce point.

Exercice : Montrer que la fonction Γ définie par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$ (par définition $t^z = e^{z \log t}$ pour $t > 0$).

3.4 Conséquences de l'analyticité des fonctions holomorphes

Proposition (formule de Cauchy pour les dérivées): Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et soit γ lacet continu et de classe C^1 par morceaux de Ω homotope à un point. Alors pour tout $z_0 \in \Omega - \gamma([a, b])$, on a

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \operatorname{Ind}_{z_0}(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2\pi i}.$$

En particulier si $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$, on a

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2\pi i} = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi r^k}.$$

Preuve : Pour tout $z_0 \in \Omega$, la fonction

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z) - \sum_{p=0}^k \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \frac{(z-z_0)^p}{(z-z_0)^{k+1}}}{(z-z_0)^{k+1}} & \text{si } z \neq z_0, \\ \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap C(\Omega)$ (en utilisant la formule de Taylor-Young ou l'analyticité de f).

On en déduit que

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2\pi i} = \sum_{p=0}^k \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \int_{\gamma} (z - z_0)^{p-k-1} \frac{dz}{2\pi i}.$$

Mais pour $p \neq k$, la fonction $z \mapsto (z - z_0)^{p-k-1}$ admet une primitive holomorphe sur $\Omega - \{z_0\}$, donc

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2\pi i} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} \frac{dz}{2\pi i} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \text{Ind}_{z_0}(\gamma).$$

Théorème : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\})$ et $f(z) = o_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{1}{|z - z_0|} \right)$, alors f se prolonge par continuité en z_0 en une fonction holomorphe sur Ω . En particulier si f est continue, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Preuve : On pose

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{si } z \neq z_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $g \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\})$, et de plus

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)^2 f(z)}{z - z_0} = (z - z_0) f(z),$$

ce qui tend vers 0 lorsque $z \rightarrow z_0$ d'après l'hypothèse. On en déduit que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Donc g est analytique, et comme $g(z_0) = g'(z_0) = 0$, on a l'égalité de f avec une série entière de rayon de convergence non nul, d'où le résultat.

L'exercice suivant montre que sil'on impose en plus à f d'être continue, alors on peut la prolonger de manière holomorphe sur un ouvert Ω dès qu'elle est holomorphe sur cet ouvert privé d'une sous-variété de dimension (réelle) 1 :

Exercice : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue, telle que $f \in \mathcal{H}(\Omega - \cup_{i=1}^n \gamma_i([0, 1]))$, où chacun des γ_i est un chemin de classe C^1 par morceaux et continu. Soit T un triangle fermé plein de Ω .

1. Montrer que l'on peut trouver $M \geq 0$ tel que pour tout $P \geq 1$, on ait

$$A = \cup_{i=1}^n \gamma_i([0, 1]) \subset \cup_{i=1}^n \cup_{p=0}^P B(\gamma_i(\frac{p}{P}), \frac{M}{P}).$$

2. Montrer que l'on peut trouver $a \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $z \in \Omega$,

$$T \cap B(z, 2^{-k}) \subset \cup_{i=1}^a T_i,$$

où les T_i sont des triangles choisis parmi les triangles semblables à T de rapport d'homothétie 2^{-k} construits comme dans le théorème de Goursat.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_{\partial T} f \right| \leq 2nM a \sup_{z_1, z_2 \in T, |z_1 - z_2| \leq 2^{-k} \text{diam}(T)} |f(z_1) - f(z_2)|.$$

4. En déduire que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Ce résultat subsiste-t-il si on suppose seulement que f est bornée sur Ω ?

5. (principe de réflexion de Schwarz) : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe symétrique par rapport à l'axe réel, et $f : \Omega \cap \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}z \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et holomorphe sur $\Omega \cap \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}z > 0\}$. On suppose que f est à valeurs réelles sur l'axe réel. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω .

Théorème (principe des zéros isolés) : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors $f^{-1}(\{0\})$ est Ω tout entier, ou bien $f^{-1}(\{0\})$ n'a pas de points d'accumulation dans Ω : c'est un ensemble fermé discret.

Preuve : Soit $z_0 \in \Omega$ un zéro de f . On a (au voisinage de z_0)

$$f(z) = \sum_{i=k}^{+\infty} b_i (z - z_0)^i,$$

avec $b_k \neq 0$ (k est alors appelé valuation de f en z_0 et noté $v_{z_0}(f)$), ou bien f est nulle sur un voisinage de z_0 . Dans le premier cas, on a donc

$$f(z) = (z - z_0)^k \phi(z),$$

où ϕ est holomorphe sur un voisinage de z_0 et ne s'annule pas (sur ce voisinage). On en déduit que z_0 est isolé.

On a donc montré que les zéros de f sont isolés sauf si f est nulle à leur voisinage. On conclut par un argument de connexité. Soit X l'ensemble des points d'accumulation de zéros de f dans Ω . Cet ensemble est clairement ouvert d'après ce qui précède. De plus, il est fermé car si $z_k \in X$ et $z_k \rightarrow z$, avec $z \in \Omega$, soit tous les z_k sont égaux sauf un nombre fini d'entre eux, et donc z est l'un des z_k et il est dans X , soit ce n'est pas le cas et alors z est encore dans X . Comme Ω est connexe, X est vide ou $X = \Omega$.

Corollaire (Unicité du prolongement analytique) : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $f = g$ sur $A \subset \Omega$ admettant un point d'accumulation dans Ω , alors $f = g$ sur Ω .

Exemple : La détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ est le seul prolongement analytique sur cet ensemble du logarithme défini sur \mathbb{R}_+^* .

Exemple : Pour prolonger la fonction Γ sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}^-$, on utilise la formule (vraie pour $\text{Re}z > 0$)

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Cette formule permet de prolonger Γ sur des ensembles du type $\Omega_n = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}z > -n, z \neq 0, -1, \dots, -(n-1)\}$. Le théorème d'unicité du prolongement

analytique autorise à “recoller” ces différents prolongements pour obtenir un prolongement analytique sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}^-$ tout entier.

Exercice : 1. Existe-t-il f holomorphe sur $B(0, 1)$ telle que $f|_{]-1, 1[} = \arctan$?

2. Existe-t-il f holomorphe sur $\mathbb{C} - \{ix/x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1\}$ telle que $f|_{]-1, 1[} = \arctan$?

3. Existe-t-il f holomorphe sur $\mathbb{C} - \{-i, i\}$ telle que $f|_{]-1, 1[} = \arctan$?

Exercice : Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière centrée en 0, à coefficients complexes, et de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$. On dit de $z_0 \in \partial B(0, R)$ que c’est un point régulier du cercle de convergence de la série entière lorsqu’il existe un prolongement analytique de f sur une boule $B(z_0, \varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

1. Montrer que l’ensemble des points réguliers de $\partial B(0, R)$ est un ouvert de $\partial B(0, R)$.

2. Montrer qu’il y a au moins un point du cercle de convergence de la série entière qui n’est pas régulier.

3. On suppose que R est un point régulier de $\partial B(0, R)$ pour la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ (de rayon de convergence $R > 0$). On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z + R/2)^n$ le développement en série entière de f en $R/2$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z + R/2)^n$ admet un rayon de convergence strictement supérieur à $R/2$.

En déduire que si $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n est un réel positif, alors il y a une contradiction (et donc R n’est pas un point régulier de $\partial B(0, R)$ pour la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$).

4. Montrer que tout point de la forme $e^{2i\pi r}$, où $r \in \mathbb{Q}$, est un point non régulier de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}$. En déduire que tous les points de $\partial B(0, 1)$ sont non réguliers pour cette série (qui converge néanmoins en tout point du cercle unité).

L’analyticité d’une fonction holomorphe et le théorème d’inversion locale permettent d’obtenir l’allure locale d’une fonction holomorphe. Ce résultat est donné ici sous forme d’exercice :

Exercice : Soit $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $k \in \mathbb{N}_*$ tels que $h(z) = h(z_0) + b_k (z - z_0)^k + o(|z - z_0|^k)$, $b_k \neq 0$.

1. Montrer que l’on peut trouver $R > 0$ et $g \in \mathcal{H}(B(z_0, R))$ tels que $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, et

$$\forall z \in B(z_0, R), \quad h(z) = h(z_0) + (g(z))^k.$$

2. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de $h(z_0)$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $a \in V$, l'équation

$$h(z) = a \quad \text{et} \quad |z - z_0| \leq \delta$$

admet exactement k solutions $z = \Psi_i(a)$, ($i = 1, \dots, k$).

3. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Montrer que f est soit constante sur Ω , soit ouverte (i.-e. pour tout $\Omega' \subset \Omega$ ouvert, $f(\Omega')$ est ouvert dans \mathbb{C}).

4. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pour $z_0 \in \Omega$, montrer que l'on a équivalence entre $f'(z_0) \neq 0$ et l'injectivité de f au voisinage de z_0 .

Proposition (principe du maximum, première version): Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $|f|$ admet un maximum local en $z_0 \in \Omega$, alors f est constante sur la composante connexe de z_0 dans Ω .

Preuve : On développe f en série entière au voisinage de z_0 . Soit f est constante localement, et alors f est constante sur la composante connexe de z_0 dans Ω d'après le principe des zéros isolés, soit pour un certain $k > 1$,

$$f(z) = a_0 + a_k (z - z_0)^k + o((z - z_0)^k),$$

avec $a_k \neq 0$. On note $z = z_0 + r e^{i\theta}$, $a_0 = |a_0| e^{i\delta}$, et $a_k = |a_k| e^{i\phi}$. On a alors

$$f(z) = |a_0| e^{i\delta} + |a_k| r^k e^{i(\phi+k\theta)} + o((z - z_0)^k).$$

En prenant $\theta = \frac{\delta - \phi}{k}$, on voit que $|f(z)| > |f(z_0)|$ pour r assez petit. On n'a donc pas de maximum local de $|f|$ en z_0 .

Corollaire (principe du maximum, seconde version): Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

1. d'une part $|f|$ est bornée par M au voisinage du bord de Ω :

$$\forall z_0 \in \partial\Omega, \quad \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \leq M,$$

2. d'autre part $|f|$ est bornée à l'infini:

$$\limsup_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| \leq M,$$

(ce qu'on écrit parfois sous la forme abrégée $\sup_{z_0 \in \partial\Omega \cup \{\infty\}} \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \leq M$) alors $\forall z \in \Omega$, $|f(z)| \leq M$.

Preuve : Supposons qu'il existe $\tilde{z} \in \Omega$ tel que $|f(\tilde{z})| = M + \delta$, avec $\delta > 0$. On commence par choisir $\eta > 0$ tel que

$$d(z, \partial\Omega) \leq \eta \quad \text{ou} \quad |z| \geq 1/\eta \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq M + \delta/2.$$

On pose alors $K = \{z \in \Omega, /d(z, \partial\Omega) \geq \eta \text{ et } |z| \leq 1/\eta\}$. Il s'agit d'un compact, donc on peut considérer $z_1 \in K$ où $|f|$ atteint son maximum. Or $\tilde{z} \in K$, donc $|f(z_1)| \geq M + \delta$, et par conséquent $|f|$ atteint son maximum sur Ω en z_1 . On en déduit que f est constante sur une composante connexe de Ω (le module de cette constante étant $M + \delta$), ce qui est absurde.

Finalement, on a bien $\forall z \in \Omega, |f(z)| \leq M$.

Proposition (théorème des trois droites) : Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, 0 < \Re z < 1\}$. On se donne une fonction $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur Ω , continue et bornée sur $\overline{\Omega}$. On note $M_0 = \sup_{\Re z=0} |f(z)|$ et $M_1 = \sup_{\Re z=1} |f(z)|$. Alors on a pour tout $\theta \in [0, 1]$,

$$\sup_{\Re z=\theta} |f(z)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$

Preuve : Pour $\varepsilon, \rho > 0$, on considère (lorsque $z \in \overline{\Omega}$)

$$f_{\varepsilon, \rho}(z) = \rho^z e^{\varepsilon z^2} f(z).$$

En notant $z = \theta + iy$, $\theta, y \in \mathbb{R}$, on voit que

$$\begin{aligned} |f_{\varepsilon, \rho}(z)| &\leq \rho^\theta e^{\varepsilon \theta^2} e^{-\varepsilon y^2} |f(z)| \\ &\leq \max(1, \rho) e^\varepsilon \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} e^{-\varepsilon y^2}. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{|z| \rightarrow +\infty, z \in \overline{\Omega}} f_{\varepsilon, \rho}(z) = 0$. D'après le principe du maximum (2ème version), on a

$$\forall z \in \overline{\Omega}, |f_{\varepsilon, \rho}(z)| \leq \max(M_0, M_1 \rho e^\varepsilon),$$

si bien que

$$\forall z \in \overline{\Omega}, |f(z)| \leq \rho^{-\theta} |e^{-\varepsilon z^2}| \max(M_0, M_1 \rho e^\varepsilon).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon, \rho > 0$, on commence par faire tendre ε vers 0 :

$$\forall z \in \overline{\Omega}, |f(z)| \leq \max(M_0 \rho^{-\theta}, M_1 \rho^{1-\theta}).$$

On pose alors $\rho = M_0/M_1$ (ce qui rend égales les deux composantes du max), et on obtient l'estimation demandée.

Corollaire (théorème de Riesz-Thorin pour les l_p , $p = 1, 2, \infty$) : On note $l_p = l_p(\mathbb{Z})$ (le théorème se démontre exactement de la même manière pour $l^p(\mathbb{N})$) et on appelle opérateur une application linéaire entre de tels espaces. Soit T un opérateur continu de l^1 dans l^1 (de norme N_1) et continu de l^∞ dans l^∞ (de norme N_∞). Alors T envoie l^2 dans l^2 . De plus, il est continu (de l^2 dans l^2) et de norme $N_2 \leq \sqrt{N_1 N_\infty}$.

Preuve : Soit u, v deux éléments de l^2 à support fini et de norme 1 (dans l^2). On pose $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, 0 < \Re z < 1\}$ et pour $z \in \overline{\Omega}$, on considère la fonction f définie par

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(T \left((|u_p|^{2(1-z)} \frac{u_p}{|u_p|})_{p \in \mathbb{Z}} \right) \right)_n |v_n|^{2z} \frac{v_n}{|v_n|}.$$

Dans la somme précédente, seul un nombre fini de termes est non nul. On convient que pour $x = 0$, $z \in \overline{\Omega}$, on a $x^z = 0$.

On commence par observer que pour $z = it$ ($\Re z = 0$), on a

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \left(T \left((|u_p|^{2(1-z)} \frac{u_p}{|u_p|})_{p \in \mathbb{Z}} \right)_n \right) \right| \times \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left| |v_n|^{2z} \frac{v_n}{|v_n|} \right| \\ &\leq N_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| |u_n|^{2(1-it)} \frac{u_n}{|u_n|} \right| \times \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left| |v_n|^{2it} \frac{v_n}{|v_n|} \right| \\ &\leq N_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 \leq N_1, \end{aligned}$$

et que pour $z = 1 + it$ ($\Re z = 1$), on a

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left| \left(T \left((|u_p|^{2(1-z)} \frac{u_p}{|u_p|})_{p \in \mathbb{Z}} \right)_n \right) \right| \times \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| |v_n|^{2z} \frac{v_n}{|v_n|} \right| \\ &\leq N_\infty \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left| |u_n|^{-2it} \frac{u_n}{|u_n|} \right| \times \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| |v_n|^{2(1+it)} \frac{v_n}{|v_n|} \right| \\ &\leq N_\infty \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|^2 \leq N_\infty. \end{aligned}$$

L'application $u \mapsto (Tu)_n$ est une forme linéaire continue sur l^2 (car elle l'est sur l^∞). On peut donc trouver (par isométrie entre H et H' pour H espace de Hilbert) $r^n \in l^2$ ($r^n = (r_p^n)_{p \in \mathbb{Z}}$) telle que

$$(Tu)_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} r_p^n u_p.$$

On a donc

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} r_p^n |u_p|^{2(1-z)} \frac{u_p}{|u_p|} |v_n|^{2z} \frac{v_n}{|v_n|}.$$

Dans la formule précédente, les deux sommes sont finies car u et v sont supposées à support fini. Comme chacune des fonctions

$$z \mapsto |u_p|^{2(1-z)} \frac{u_p}{|u_p|} |v_n|^{2z} \frac{v_n}{|v_n|}$$

est holomorphe sur Ω , continue et bornée sur $\overline{\Omega}$ (par $\sup(1, |u_p|, |v_n|)^4$), on en déduit que f l'est également. On peut donc lui appliquer le théorème des trois droites et obtenir en particulier

$$|f(1/2)| \leq \sqrt{N_1 N_\infty}.$$

On obtient donc (pour u, v deux éléments de l^2 à support fini et de norme 1 dans l^2)

$$| \langle Tu, v \rangle | \leq \sqrt{N_1 N_\infty},$$

où \langle, \rangle désigne le produit scalaire de l^2 . On en déduit que si u, v sont deux éléments de l^2 à support fini,

$$|\langle Tu, v \rangle| \leq \sqrt{N_1 N_\infty} \|u\|_{l^2} \|v\|_{l^2}. \quad (1)$$

Pour un tel u on sait que $Tu \in l^2$ (car $Tu \in l^1$). On en déduit par densité des suites à support fini dans l^2 (pour la norme l^2) que l'inégalité (1) est encore vraie lorsque v est un élément quelconque de l^2 . On a donc $\langle Tu, \cdot \rangle \in (l^2)'$ et

$$\|\langle Tu, \cdot \rangle\|_{(l^2)'} \leq \sqrt{N_1 N_\infty} \|u\|_{l^2}.$$

On en déduit (par isométrie entre H et H' pour H espace de Hilbert) que

$$\|Tu\|_{l^2} \leq \sqrt{N_1 N_\infty} \|u\|_{l^2}.$$

Soit maintenant u un élément quelconque de l^2 . On considère $\tau_k u$ la tronquée de u à partir de l'indice $k+1$ (c'est-à-dire $(\tau_k u)_n = u_n$ pour $|n| \leq k$ et $(\tau_k u)_n = 0$ pour $|n| > k$).

On a

$$\|T(\tau_k u)\|_{l^2} \leq \sqrt{N_1 N_\infty} \|\tau_k u\|_{l^2} \leq \sqrt{N_1 N_\infty} \|u\|_{l^2}. \quad (2)$$

Comme $\tau_k u$ converge vers u dans l^∞ , on a également la convergence de $T(\tau_k u)$ vers Tu dans l^∞ , donc ponctuellement. On passe alors à la limite dans l'inégalité (2), ce qui permet de conclure.

Exercice : On note $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$, et on considère $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ telle que

$$\forall z \in \overline{\Omega}, \quad |f(z)| \leq e^{A e^\alpha |\operatorname{Re} z|}, \quad (3)$$

où $A \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0, 1[$ sont des constantes données.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\beta \in]0, 1[$,

$$\forall z \in \overline{\Omega}, \quad \left| e^{-2\varepsilon \operatorname{ch}(\beta z)} \right| \leq e^{-2\varepsilon \cos(\beta \pi/2) \operatorname{ch}(\beta \operatorname{Re} z)}.$$

2. Montrer que l'on peut trouver $\gamma \in]0, 1[$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{|\operatorname{Re} z| \rightarrow +\infty} \left[\sup_{|\operatorname{Im} z| \leq \pi/2} \left| f(z) e^{-2\varepsilon \operatorname{ch}(\gamma z)} \right| \right] = 0.$$

3. Montrer le théorème de Phragmen-Lindelöf: si (en plus des hypothèses énoncées au début de l'exercice) $\sup_{z \in \partial \Omega} |f(z)| \leq 1$, alors $\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq 1$.

4. Cette propriété subsiste-t-elle si l'on ne suppose pas que l'estimation (3) est vérifiée par f ?

3.5 Conséquences des formules de Cauchy

Théorème (Liouville): Toute fonction entière bornée est constante.

Preuve : On sait que

$$\begin{aligned} f'(a) &= \int_{C(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^2} \frac{dz}{2\pi i} \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} f(a + r e^{i\theta}) e^{-i\theta} \frac{d\theta}{2\pi r}. \end{aligned}$$

Donc $|f'(a)| \leq \|f\|_{\infty}/r$, ce qui tend vers 0 quand $r \rightarrow +\infty$.

Exercice : Montrer que si f est entière et à croissance polynômiale (c'est-à-dire si l'on peut trouver $C \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $|f(z)| \leq C + C|z|^k$), c'est un polynôme. Peut-on trouver des fonctions f entières telles que $|f(z)| \leq e^{\sqrt{|z|}}$?

Corollaire (D'Alembert–Gauss) : Tout polynôme non constant à coefficients dans \mathbb{C} admet au moins une racine (complexe).

Preuve : S'il n'en n'avait pas, son inverse serait une fonction entière bornée, car $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.

Exercice (formule de Gutzmer): Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose que $\overline{B(a,r)} \subset \Omega$, et on note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ le développement en série entière de f au voisinage de a . Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \int_{\theta=0}^{2\pi} |f(a + r e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Quel est le lien entre cette formule et la formule de Parseval ?

Exercice (preuve du principe du maximum utilisant les formules de Cauchy): Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On considère $z_0 \in \Omega$ où $|f|$ atteint son maximum, et $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\phi} f(z_0) \in \mathbb{R}_+$.

1. En appliquant la formule de Cauchy sur $C(z_0, R)$ avec $R > 0$ suffisamment petit, montrer que pour tout $z \in C(z_0, R)$,

$$\Re(e^{i\phi} [f(z_0) - f(z)]) = 0.$$

2. En déduire que $f(z) = f(z_0)$. Conclure.

Les formules de Cauchy permettent de contrôler les dérivées des fonctions holomorphes en fonction des fonctions elles-mêmes. En ce sens, elles constituent

une sorte de “réciproque” des théorèmes du type “accroissements finis”. La proposition suivante illustre ce point de vue avec un énoncé précis :

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $\overline{B(z_0, \delta)} \subset \Omega$. Alors on a

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{\delta} \sup_{z \in C(z_0, \delta)} |f(z)|.$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate des formules de Cauchy pour les dérivées.

En donnant une formule intégrale pour la dérivée d'une fonction holomorphe en un point, les formules de Cauchy permettent également de traiter la question de la \mathbb{C} -dérivation des intégrales à paramètres dont l'intégrande est holomorphe en utilisant le théorème de Fubini. Ceci permet de compléter la proposition vue au paragraphe 3.3, dans laquelle la formule de \mathbb{C} -dérivation d'une intégrale à paramètre n'était pas précisée.

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit U un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^N . On se donne une fonction $K : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour presque tout $u \in U$, la fonction $z \mapsto K(z, u)$ est holomorphe sur Ω , et telle que pour tout $z \in \Omega$, la fonction $u \in U \mapsto K(z, u)$ est intégrable sur U . L'intégrale à paramètre $f(z) = \int_U K(z, u) du$ est alors définie pour tout $z \in \Omega$.

Si de plus on a l'estimation de domination suivante :

$$\forall z \in \Omega, p.p. u \in U, \quad |K(z, u)| \leq g(u),$$

où g est une fonction intégrable sur U , alors la fonction f est holomorphe sur Ω , la fonction $u \in U \mapsto \partial_z K(z, u)$ est intégrable sur U pour tout $z \in \Omega$, et (toujours pour tout $z \in \Omega$) :

$$f'(z) = \int_U \partial_z K(z, u) du.$$

Preuve : On sait déjà que f est holomorphe sur Ω . Si on se donne donc un point z_0 de Ω , et $r > 0$ tel que $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$. On a

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \frac{dz}{2\pi i} \\ &= \int_{C(z_0, r)} \int_U K(z, u) du \frac{1}{(z - z_0)^2} \frac{dz}{2\pi i} \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_U K(z_0 + r e^{i\theta}, u) du e^{-i\theta} \frac{d\theta}{2\pi r}. \end{aligned}$$

On vérifie que l'on peut alors appliquer le théorème de Fubini :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_U \left| K(z_0 + r e^{i\theta}, u) \right| du e^{-i\theta} \frac{d\theta}{2\pi r} \leq \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{u \in U} |g(u)| du \frac{d\theta}{2\pi r} \leq r^{-1} \|g\|_{L^1(U)}.$$

On obtient que

$$\partial_z K(z_0, u) = \int_{\theta=0}^{2\pi} K(z_0 + r e^{i\theta}, u) e^{-i\theta} \frac{d\theta}{2\pi r}$$

est intégrable sur U , et que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \int_U \int_{\theta=0}^{2\pi} K(z_0 + r e^{i\theta}, u) e^{-i\theta} \frac{d\theta}{2\pi r} du \\ &= \int_U \partial_z K(z_0, u) du. \end{aligned}$$

4 Topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$

4.1 Topologie de la convergence compacte de $C(\Omega)$

Définition : Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} (ou \mathbb{R}^M , ou \mathbb{C}^Q , $M, Q \in \mathbb{N}^*$). On pose $K_n = \{x \in \Omega, d(x, \Omega^c) \geq 1/n \text{ et } |x| \leq n\}$. Il s'agit d'une suite croissante (pour l'inclusion) "exhaustive" de compacts, c'est-à-dire vérifiant $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ (une autre famille dénombrable exhaustive de compacts est constituée des boules fermées de rayon rationnel et centrées en un point de coordonnées rationnelles qui sont incluses dans Ω , mais cette famille n'est pas croissante pour l'inclusion).

La topologie de la convergence compacte (ou convergence uniforme sur les compacts) sur $C(\Omega, \mathbb{R}^N \text{ ou } \mathbb{C}^P)$, $N, P \in \mathbb{N}^*$ se définit de l'une quelconque de ces manières (avec $\|\cdot\|$ norme sur \mathbb{R}^N ou \mathbb{C}^P):

1. C'est la topologie métrisable pour laquelle $f_p \rightarrow_{p \rightarrow +\infty} f$ si et seulement si pour tout $K \subset \Omega$ compact,

$$\sup_{x \in K} \|f_p(x) - f(x)\| \rightarrow_{p \rightarrow +\infty} 0.$$

C'est-à-dire que l'on a convergence uniforme sur tous les compacts. On peut remplacer dans cette définition l'ensemble de tous les compacts de Ω par la famille $(K_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$.

2. C'est la topologie métrisable dont une base de voisinages de f est fournie par les ensembles

$$O_{K, \varepsilon}(f) = \left\{ g \in C(\Omega, \mathbb{R}^N \text{ ou } \mathbb{C}^P), \sup_{x \in K} \|g(x) - f(x)\| < \varepsilon \right\},$$

lorsque $\varepsilon > 0$ et K est un compact de Ω . On peut remplacer dans cette définition l'ensemble de tous les compacts de Ω par la famille $(K_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$, et les $\varepsilon > 0$ par les $1/p, p \in \mathbb{N}^*$. La base de voisinages est alors clairement dénombrable.

3. C'est la topologie métrisable définie par la distance

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \min \left(1, \sup_{x \in K_n} \|f(x) - g(x)\| \right).$$

4. C'est la topologie métrisable définie par la famille dénombrable de seminormes

$$\|f\|_n = \sup_{x \in K_n} \|f(x)\|.$$

Il s'agit d'une topologie d'espace vectoriel localement convexe, métrisable et complet. On dit que $C(\Omega, \mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{C}^P)$ muni de cette topologie est un espace de Fréchet.

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. L'ensemble des fonctions holomorphes $\mathcal{H}(\Omega)$ est fermé dans $C(\Omega, \mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence compacte :

$$f_n \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \text{et} \quad f_n \rightarrow f \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

De plus, la dérivation (complexe) est continue pour cette topologie (quand on se restreint aux fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$) :

$$f_n \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \text{et} \quad f_n \rightarrow f \quad \Rightarrow \quad f'_n \rightarrow f'.$$

Preuve : Pour la première partie, on applique le théorème de Morera. De plus, lorsque $z_0 \in K \subset \Omega$ compact, on considère une boule fermée $\overline{B(0, \delta)}$ de telle sorte que $K + \overline{B(0, \delta)} \subset \Omega$. Alors, en vertu du théorème de Cauchy pour les dérivées de fonctions holomorphes,

$$\begin{aligned} \sup_{z_0 \in K} |f'_n(z_0) - f'(z_0)| &\leq \sup_{z \in K} \left| \int_{C(z_0, \delta)} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^2} \frac{dz}{2i\pi} - \int_{C(z_0, \delta)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \frac{dz}{2i\pi} \right| \\ &\leq 1/\delta \sup_{z \in K + \overline{B(0, \delta)}} |f_n(z) - f(z)|. \end{aligned}$$

L'exercice suivant montre que les solutions de systèmes différentiels linéaires à coefficients holomorphes ont des solutions holomorphes :

Exercice : Soit $N \in \mathbb{N}_*$, $z_0 \in \mathbb{C}^N$, et $A_1 : B(0, 1) \rightarrow C^N$, $A_2 : B(0, 1) \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ des fonctions dont toutes les composantes sont holomorphes. On considère la suite de fonction f_n de $B(0, 1)$ dans \mathbb{C}^N définie par

$$f_{n+1}(z) = z_0 + \int_{[0, z]} (A_1 + A_2 f_n), \quad f_0(z) = z_0.$$

1. Montrer que pour $0 < r < 1$, il existe une constante $C_r > 0$ telle que pour $z \in B(0, r)$ (boule de centre 0 et de rayon r) et $n \in \mathbb{N}_*$,

$$|f_{n+1}(z) - f_n(z)| \leq C_r \int_{u=0}^{|z|} |f_n(u \frac{z}{|z|}) - f_{n-1}(u \frac{z}{|z|})| du,$$

où $||$ désigne une norme sur \mathbb{C}^N .

2. En déduire que pour $0 < r < 1$, il existe des constantes $K_r > 0$ et $C_r > 0$ telles que pour $z \in B(0, r)$ et $n \in \mathbb{N}_*$,

$$|f_{n+1}(z) - f_n(z)| \leq K_r \frac{(C_r |z|)^n}{n!}.$$

3. Montrer que f_n converge uniformément sur $B(0, 1)$ vers une fonction f dont toutes les composantes sont holomorphes sur $B(0, 1)$ et vérifiant pour $z \in B(0, 1)$,

$$f'(z) = A_1(z) + A_2(z) f(z), \quad f(0) = z_0.$$

Ici, f' désigne la fonction de $B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}^N$ dont les composantes sont les \mathbb{C} -dérivées des composantes de la fonction f .

4.2 Familles normales

Le théorème suivant permet de comprendre à quoi ressemblent les compacts de $\mathcal{H}(\Omega)$ (muni de la topologie de la convergence compacte) :

Théorème : Soit \mathcal{F} une famille de fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$ telle que

$$\forall K \subset \Omega \text{ compact}, \quad \exists M_K > 0, \quad \sup_{z \in K} \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(z)| \leq M_K$$

(On dit qu'une telle famille est normale, mais dans le langage des espaces vectoriels topologiques, on dira plutôt qu'il s'agit d'une famille bornée, ce qui signifie que son image par chacune des semi-normes qui définissent la topologie est bornée dans \mathbb{R} (mais pas uniformément par rapport à la semi-norme); attention à ne pas confondre cette notion de bornitude avec celle liée à la distance qui définit également la topologie). Alors \mathcal{F} est relativement compacte dans $\mathcal{H}(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence compacte.

Preuve : Soit $K \subset \Omega$ compact. On pose $\delta = d(K, \Omega^c)$. C'est un nombre réel strictement positif. La formule de Cauchy fournit l'estimation

$$\sup_{z \in K + \overline{B(0, \delta/3)}} \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z)| \leq \frac{3}{\delta} M_{K + \overline{B(0, 2\delta/3)}}.$$

On utilise alors le théorème des accroissements finis: Pour $z_1, z_2 \in K$ tels que $|z_1 - z_2| < \delta/3$, le segment $[z_1, z_2]$ est inclus dans $K + B(0, \delta/3)$, donc

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{3}{\delta} M_{K+B(0, \delta/3)} |z_1 - z_2|.$$

On en déduit que \mathcal{F} est uniformément équicontinue (et bornée) sur chaque compact K de Ω . Le théorème d'Ascoli permet de conclure que \mathcal{F} est relativement compacte pour la topologie de la convergence compacte sur $C(\Omega, \mathbb{C})$. Comme $\mathcal{H}(\Omega)$ est un sous-ensemble fermé dans $C(\Omega, \mathbb{C})$, \mathcal{F} est relativement compacte pour la topologie de la convergence compacte sur $\mathcal{H}(\Omega)$.

Remarque : En pratique, ce théorème s'utilise souvent de la manière suivante : si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$ telle que

$$\forall K \subset \Omega \text{ compact}, \quad \exists M_K > 0, \quad \sup_{z \in K} \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(z)| \leq M_K,$$

alors il existe une suite extraite $f_{\sigma(n)}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant $f_{\sigma(n)} \rightarrow f$ pour la topologie de la convergence compacte sur Ω .

Remarque : Le théorème de compacité des familles normales peut s'énoncer sous la forme familière : tout ensemble de $\mathcal{H}(\Omega)$ fermé et borné est compact (fermé, borné et compact se rapportant à la topologie de la convergence compacte). Cette propriété est bien sûr partagée par les espaces vectoriels sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} de dimension finie (et munis de leur topologie naturelle : celle associée à n'importe quelle norme), mais également par certains espaces de fonctions de classe C^∞ . Elle est par contre toujours fautive pour les espaces vectoriels normés de dimension infinie (théorème de Riesz). On en déduit qu'il n'y a pas de norme sur $\mathcal{H}(\Omega)$ dont la topologie sous-jacente soit celle de la convergence compacte.

4.3 Séries de fonctions holomorphes

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$. Si $\sum_{p=0}^n f_p$ converge uniformément sur tout compact K de Ω , alors $\sum_{p=0}^{+\infty} f_p$ est dans $\mathcal{H}(\Omega)$, $\sum_{p=0}^n f'_p$ converge uniformément sur tout compact K de Ω et $(\sum_{p=0}^{+\infty} f_p)' = \sum_{p=0}^{+\infty} (f_p)'$.

C'est en particulier vrai si pour tout compact K de Ω , on a la convergence normale sur tout compact :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sup_{z \in K} |f_p(z)| < +\infty.$$

Remarque : On a un théorème analogue dans le cas des familles sommables. On dit que $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille sommable de somme x (noté en

général $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$) d'un espace vectoriel normé E (muni de la norme $\| \cdot \|$) lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F_ε partie finie de A telle que pour toute partie finie F' de A contenant F_ε , on ait $\|x - \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha\| \leq \varepsilon$.

On montre alors que si $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$, telle que pour une certaine fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (notée en général $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha$), pour tout $\varepsilon > 0$ et K compact de Ω , il existe $F_{\varepsilon, K}$ partie finie de A telle que pour toute partie finie F' de A contenant $F_{\varepsilon, K}$, $\sup_{z \in K} \|f(z) - \sum_{\alpha \in F'} f_\alpha(z)\| \leq \varepsilon$ (uniforme sommabilité sur tout compact de Ω), alors $f = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $(\sum_{\alpha \in A} f_\alpha)' = \sum_{\alpha \in A} f'_\alpha$. C'est en particulier vrai si pour tout compact K de Ω ,

$$\sum_{\alpha \in A} \sup_{z \in K} |f_\alpha(z)| := \sup_{F \subset A \text{ finie}} \sum_{\alpha \in F} \sup_{z \in K} |f_\alpha(z)| < +\infty.$$

Cette proposition permet d'étudier les fonctions définies par des séries (dont le terme général est holomorphe) sans avoir besoin d'étudier a priori la série dérivée. L'exercice qui suit illustre cela : il donne une formule (développement Eulérien de $\frac{1}{\sin^2}$) qui est une sorte de "décomposition en éléments simples infinis" d'une fonction qui n'est pas une fraction rationnelle (mais qui, comme ces dernières, possède des pôles, que l'on définira lorsque l'on présentera les fonctions méromorphes). Un exercice proche sera présenté dans le vocabulaire des fonctions méromorphe le moment venu.

Exercice :

1. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$, et définit une fonction holomorphe 1-périodique sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Calculer un développement asymptotique en 0 à l'ordre $O(1)$ de cette fonction.

2. Montrer que $z \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ définit également une fonction holomorphe 1-périodique sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Calculer un développement asymptotique en 0 à l'ordre $O(1)$ de cette fonction.

3. Montrer que

$$|\sin(\pi z)| \geq |\operatorname{sh}(\pi \operatorname{Im} z)|.$$

En déduire que

$$\lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow +\infty} |\sin(\pi z)| = +\infty$$

uniformément pour $\operatorname{Re} z \in [0, 1]$.

4. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge normalement sur le domaine

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \in [0, 1], |\operatorname{Im} z| \geq 1\}.$$

En déduire que

$$\lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow +\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = 0$$

uniformément pour $\Re z \in [0, 1]$.

5. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a l'égalité

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2}.$$

On introduit maintenant les séries de Dirichlet, qui permettent de fabriquer de nombreuses fonctions holomorphes, parmi lesquelles la célèbre fonction ζ de Riemann.

Proposition : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de \mathbb{C} . Si la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$ converge, alors la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{a_n}{n^z}$ converge uniformément sur tout domaine $D_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |Arg(z)| \leq \alpha\}$ lorsque $\alpha < \pi/2$.

Preuve : Pour $n > m \geq N$ assez grand, on a $|\sum_{p=m}^n a_p| \leq \varepsilon$. On utilise alors lorsque $m' > m + 1$ une transformation d'Abel:

$$\sum_{n=m}^{m'-1} p_n (q_n - q_{n+1}) = \sum_{n=m+1}^{m'-1} (p_n - p_{n-1}) q_n + (p_m q_m - p_{m'-1} q_{m'})$$

avec

$$p_n = \sum_{p=m}^n a_p, \quad q_n = \frac{1}{n^z}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m+1}^{m'-1} \frac{a_n}{n^z} \right| &\leq \left| \sum_{n=m}^{m'-1} \left(\sum_{p=m}^n a_p \right) \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z} \right) \right| + \left| \sum_{p=m}^{m'-1} a_p \right| \left| \frac{1}{(m')^z} \right| + \left| \frac{a_m}{m^z} \right| \\ &\leq \varepsilon \left[\sum_{n=m}^{m'-1} \left| z \int_{\log n}^{\log(n+1)} e^{-tz} dt \right| + 2 \right] \\ &\leq \varepsilon \left[2 + \sum_{n=m}^{m'-1} |z| \int_{\log n}^{\log(n+1)} e^{-t \Re z} dt \right] \\ &\leq \varepsilon \left[2 + \sum_{n=m}^{m'-1} \frac{|z|}{\Re z} \left(\frac{1}{n^{\Re z}} - \frac{1}{(n+1)^{\Re z}} \right) \right] \\ &\leq \varepsilon \left[2 + \frac{|z|}{\Re z} \right] \\ &\leq \varepsilon \left[2 + \frac{1}{\cos \alpha} \right]. \end{aligned}$$

Corollaire : On note $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}, \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{a_n}{n^z} \text{ converge}\}$. Alors $\mathbb{R} \cap \mathcal{C}$ est un intervalle du type $(x_0, +\infty[$ (éventuellement \mathbb{R} ou \emptyset) contenant x_0 ou non. On

appelle x_0 l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{a_n}{n^z}$. Cette série définit une fonction holomorphe sur $\{z, \operatorname{Re} z > x_0\}$.

On appelle parfois abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet où les a_n ont été remplacés par les $|a_n|$.

Exercice : Déterminer pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$ l'abscisse de convergence (et de convergence absolue) de la série de Dirichlet $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{in\theta}}{n^z}$.

5 Fonctions méromorphes et théorème des résidus

5.1 Fonctions méromorphes

La proposition suivante clarifie le comportement des fonctions qui sont holomorphes dans une boule épointée :

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\})$. On est alors dans l'un des trois cas de figure suivants:

1. La fonction f se prolonge en z_0 en une fonction holomorphe sur Ω (removable singularity),
2. Il existe $a_{-1}, \dots, a_{-m} \in \mathbb{C}$ dont l'un au moins est non nul tel que $f(z) - \sum_{i=1}^m \frac{a_{-i}}{(z-z_0)^i}$ se prolonge au point z_0 en une fonction holomorphe sur Ω . On dit alors que z_0 est un pôle de f ,
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\overline{f(B(z_0, \varepsilon) - \{z_0\})} = \mathbb{C}$. On dit alors que z_0 est une singularité essentielle de f .

Preuve : Si $B(a, r)$ et $f(B(z_0, \varepsilon) - \{z_0\})$ sont disjoints (pour $a \in \mathbb{C}, r > 0, \varepsilon > 0$ donnés), alors $|f(z) - a| \geq r$ pour $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Donc $z \mapsto (f(z) - a)^{-1}$ est holomorphe et bornée (par $1/r$) sur $B(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$. Elle se prolonge donc en une fonction holomorphe sur $B(z_0, \varepsilon)$.

Il existe donc $m \geq 0$ et $\phi \in \mathcal{H}(B(z_0, \varepsilon))$ telle que $\phi(z_0) \neq 0$ pour lesquels on a

$$\frac{1}{f(z) - a} = (z - z_0)^m \phi(z),$$

d'où $f(z) = a + (z - z_0)^{-m} \psi(z)$, avec $\psi = 1/\phi$ holomorphe au voisinage de z_0 . On retrouve alors les deux premiers cas selon que $m = 0$ ou $m \neq 0$.

Exercice : Calculer pour $\varepsilon > 0$ l'image de la boule épointée $B(0, \varepsilon) - \{0\}$ par $z \mapsto e^{1/z}$. Que dire de la singularité de cette fonction en 0 ?

Les fonctions qui sont holomorphes sur une boule épointée, ou même sur un anneau, peuvent être développées sous la forme d'une somme doublement infinie, c'est l'objet de l'exercice suivant :

Exercice : Soit $0 < \rho < \rho' \leq +\infty$, $\Gamma_a(\rho, \rho') = \{z \in \mathbb{C}, \rho < |z - a| < \rho'\}$ et $f \in \mathcal{H}(\Gamma_a(\rho, \rho'))$.

1. Montrer que pour tout $r, r_1, r', r'_1 > 0$ tels que $\rho < r < r_1 < r'_1 < r' < \rho'$ et $w \in \mathbb{C}$ tel que $r_1 < |w - a| < r'_1$, on a

$$\int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(z)}{z-w} \frac{dz}{2\pi i} = \int_{\mathcal{C}(a,r')} \frac{f(z)}{z-w} \frac{dz}{2\pi i} - f(w).$$

2. Montrer que pour tout $R \in]\rho, \rho'[$, on a

$$f(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (w-a)^m \int_{\mathcal{C}(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} \frac{dz}{2\pi i}$$

et que cette somme converge normalement sur tout compact de $\Gamma_a(\rho, \rho')$.

Cette identité est appelée “développement de Laurent”.

3. Calculer le développement de Laurent de $z \rightarrow e^{1/z}$ sur \mathbb{C}^* .

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f \in \mathcal{H}(\Omega - S)$, où $S \subset \Omega$ est un ensemble discret fermé (dans Ω) (on peut aussi dire fini sur tout compact) tel qu'en tout point de S , f admette un pôle. On dit alors que f est méromorphe sur Ω .

Remarque : Une fonction méromorphe sur Ω n'est pas a priori définie sur Ω tout entier. On introduit parfois un point à l'infini ∞ , valeur de f en tous les points de S . Cela permet de définir de manière cohérente la somme et le produit pour des fonctions méromorphes, et donc de faire de l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω une algèbre sur \mathbb{C} .

Exercice : Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Montrer que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est méromorphe si et seulement si f est le quotient de deux fonctions holomorphes g et h (cette dernière non identiquement nulle sur une composante connexe de \mathbb{C}) au voisinage de tout point de Ω (avec la convention $\frac{g(z)}{h(z)} = \infty$ en un zéro z de h d'ordre plus élevé que la valuation de g en z).

Exercice : Soit f et g deux fonctions méromorphes sur \mathbb{C} . On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ qui n'est ni un pôle de f , ni un pôle de g , on ait

$$|f(z)| \leq k |g(z)|.$$

Montrer que l'on peut trouver $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que (pour tout $z \in \mathbb{C}$ qui n'est ni un pôle de f , ni un pôle de g)

$$f(z) = \lambda g(z).$$

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, f méromorphe sur Ω et z_0 un pôle de f . On sait alors que $f(z) = \sum_{i=0}^m \frac{a_{-i}}{(z-z_0)^i} + o_{z \rightarrow z_0}(1)$. On appelle résidu de f en z_0 le coefficient a_{-1} et on le note $Res_{z_0}(f)$.

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors si f n'est identiquement nulle sur aucune composante connexe de Ω , la fonction $\frac{f'}{f}$ est méromorphe sur Ω et si z_0 est un zéro de f , le résidu en z_0 de $\frac{f'}{f}$ est l'ordre de multiplicité de ce zéro.

De manière plus générale, si f est méromorphe, le résidu en z_0 de $\frac{f'}{f}$ est l'exposant du premier terme non nul dans le développement de f autour de z_0 (il peut donc être négatif).

Il arrive souvent qu'une fonction que l'on a prolongée analytiquement sur un ouvert Ω de \mathbb{C} de la forme $\Omega = \Omega' - S$, avec S ensemble fermé discret, se révèle être une fonction méromorphe sur Ω' . On parle alors de prolongement méromorphe : celui-ci a bien sûr les mêmes propriétés d'unicité que le prolongement analytique. L'exercice suivant montre comment obtenir de manière directe le prolongement méromorphe sur \mathbb{C} de la fonction Γ :

Exercice 1) Montrer que $f_1 : z \mapsto \int_1^\infty e^{-t+(z-1)\log t} dt$ est entière.

2) Montrer que $f_2 : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur \mathbb{C} . Quels sont ses pôles ?

3) Fabriquer à l'aide de ces deux fonctions un prolongement méromorphe sur \mathbb{C} de Γ .

5.2 Théorème des résidus

Théorème : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, γ un lacet continu et C^1 par morceaux homotope à un point de Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe, S l'ensemble de ses pôles. On suppose que $S \cap \gamma([a, b]) = \emptyset$. Alors on a

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{s \in S} \text{Ind}_s(\gamma) \text{Res}_s(f),$$

et cette somme ne fait intervenir qu'un nombre fini de termes non nuls.

Preuve : Soit H l'homotopie qui joint γ à un point. Pour $z \in (\text{Im}(H))^c$, on a $\text{Ind}_z(\gamma) = 0$ car γ est encore homotope à un point dans $\Omega - \{z\}$.

On en déduit que comme $\text{Im}(H) \cap S$ est fini (fermé discret d'un compact), la somme ne fait bien intervenir qu'un nombre fini de termes non nuls.

Pour $s \in S$, on note $P_s(f)(z) = \sum_{i=1}^{m_s} a_{-i,s} (z-s)^{-i}$ la partie singulière de f en s . Pour $\delta > 0$ suffisamment petit, la fonction g définie par

$$g(z) = f(z) - \sum_{s \in S \cap \text{Im}(H)} P_s(f)(z)$$

est holomorphe sur $\text{Im}(H) + B(0, \delta)$, car holomorphe sur $\text{Im}(H) + B(0, \delta) - S$ et bornée sur $\text{Im}(H) + B(0, \delta)$. On peut en effet choisir $\delta > 0$ de telle sorte que

$S \cap ([Im(H) + B(0, \delta)] - Im(H)) = \emptyset$. En appliquant la formule de Cauchy à g , on trouve

$$\int_{\gamma} f - \sum_{s \in Im(H) \cap S} \int_{\gamma} P_s(f) = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P_s(f) &= \int_{\gamma} \sum_{i=1}^{m_s} a_{-i,s} (z-s)^{-i} \\ &= 2\pi i \operatorname{Ind}_s(\gamma) \operatorname{Res}_s(f). \end{aligned}$$

En effet, $z \mapsto (z-s)^{-i}$ admet une primitive sur $\mathbb{C} - \{s\}$ pour $i \neq 1$.

Le théorème des résidus permet de démontrer une multitude de formules. On donne ici sous forme d'exercices quelques exemples typiques de calculs utilisant ce théorème.

Exercice : Calculer pour $a > 1$ l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$ en utilisant l'intégrale sur le cercle unité d'une fonction holomorphe.

Résultat: $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Exercice : Montrer que pour $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $\operatorname{Deg}(Q) \geq \operatorname{Deg}P + 2$, $P \wedge Q = 1$, et Q n'ayant pas de racines réelles, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{Q(z_0)=0, \operatorname{Im}(z_0)>0} \operatorname{Res}_{z_0} \left(z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)} \right).$$

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Résultat: $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Exercice : Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{cases}.$$

On pourra utiliser un contour en forme de demi-lune.

Exercice : On considère $a > 0$, et on note L_a le chemin formé par l'arc de cercle $\theta \in [0, \pi] \mapsto a e^{i\theta}$. On note également (pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, $\Gamma_{\varepsilon,R}$) le chemin $[\varepsilon, R] + L_R + [-R, -\varepsilon] - L_{\varepsilon}$. Enfin, on pose

$$f(z) = \frac{1 - e^{2iz}}{z^2(z^2 + 1)}.$$

1. Montrer que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_R} f = 0$, et que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L_{\varepsilon}} f$. On pourra utiliser le théorème de convergence dominée en remarquant (et en démontrant) que pour $z \in \mathbb{C}$, $|e^z - 1| \leq |z| e^{|z|}$.

2. Calculer $\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f$ en utilisant le théorème des résidus, en déduire la quantité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+x^2)} dx.$$

Exercice : Pour $\eta > 0$, on note L_η le chemin défini par $\theta \in [0, \pi] \mapsto \eta e^{i\theta}$. On note également $\Gamma_{\varepsilon,R}$ (pour $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, $R > 2$) le chemin

$$\Gamma_{\varepsilon,R} = [-R, -\varepsilon] + (-L_\varepsilon) + [\varepsilon, R] + L_R.$$

Enfin, on pose

$$f(z) = \frac{e^{i(z-z^{-1})}}{1+z^2}.$$

1. Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L_\varepsilon} f = 0$ et que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_R} f = 0$.

2. Calculer $\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f$ en utilisant le théorème des résidus, et en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \cos(x-x^{-1}) \frac{dx}{1+x^2}.$$

Exercice : Pour $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$ et $\eta > 0$, on note $\Lambda_{\delta,\eta}$ le chemin défini par $\theta \in [-\pi + \delta, \pi - \delta] \mapsto \eta e^{i\theta}$. On note également $S_{\delta,\varepsilon,R}$ (pour $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$, $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, $R > 2$) le chemin

$$S_{\delta,\varepsilon,R} = \Lambda_{\delta,R} + [R e^{i(\pi-\delta)}, \varepsilon e^{i(\pi-\delta)}] + (-\Lambda_{\delta,\varepsilon}) + [\varepsilon e^{i(-\pi+\delta)}, R e^{i(-\pi+\delta)}].$$

1. On pose $f(z) = \frac{1}{z^\alpha(z-1)}$, pour $\alpha \in]0, 1[$ où z^α est la détermination principale de la puissance α -ième. Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{0 < \delta < \frac{\pi}{4}} \left| \int_{\Lambda_{\delta,\varepsilon}} f \right| \right) = 0$, et que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\sup_{0 < \delta < \frac{\pi}{4}} \left| \int_{\Lambda_{\delta,R}} f \right| \right) = 0$.

2. Calculer $\int_{S_{\delta,\varepsilon,R}} f$ (pour $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $R > 2$) en utilisant le théorème des résidus.

3. Montrer que (pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $R > 2$)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{[\varepsilon e^{i(-\pi+\delta)}, R e^{i(-\pi+\delta)}]} f = e^{i\alpha\pi} \int_\varepsilon^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}.$$

Calculer (et montrer la convergence) de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}.$$

Vérifier que le résultat est correct pour $\alpha = \frac{1}{2}$ en utilisant une méthode de calcul direct de l'intégrale.

Résultat : $\frac{\pi}{\sin(\pi \alpha)}$.

Exercice : Pour $\alpha \in]0, 1[$, on note $z^{-\alpha}$ la détermination principale de la puissance $-\alpha$ -ième de z , et $f(z) = z^{-\alpha} e^{-z}$.

Pour $\delta > 0$, on note Λ_δ le chemin $\theta \in [0, \pi/2] \mapsto \delta e^{i\theta}$, et pour $0 < \varepsilon < 1$, $R > 1$, on note

$$\Gamma_{\varepsilon, R} = [\varepsilon, R] + \Lambda_R - [i\varepsilon, iR] - \Lambda_\varepsilon.$$

1) Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Lambda_\varepsilon} f = 0$ et que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Lambda_R} f = 0$.

2) Calculer (et montrer la convergence de) l'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-ix}}{x^\alpha} dx$ en fonction de $\Gamma(1 - \alpha)$.

Exercice : Pour $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$ et $\eta > 0$, on note $\Lambda_{\eta, \delta}$ le chemin défini par $\theta \in [\delta, \pi - \delta] \mapsto \eta e^{i\theta}$. On note également $S_{\delta, \varepsilon, R}$ (pour $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$, $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, $R > 2$) le chemin défini par

$$S_{\delta, \varepsilon, R} = \Lambda_{R, \delta} + [R e^{i(\pi - \delta)}, \varepsilon e^{i(\pi - \delta)}] + (-\Lambda_{\varepsilon, \delta}) + [\varepsilon e^{i\delta}, R e^{i\delta}].$$

On considère la fonction

$$f(z) = \frac{\log z}{(z^2 + 1)\sqrt{z}},$$

où \log et $\sqrt{}$ désignent respectivement les valeurs principales du logarithme et de la racine carrée.

1. Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{0 < \delta < \frac{\pi}{4}} \left| \int_{\Lambda_{\varepsilon, \delta}} f \right| \right) = 0$, et que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\sup_{0 < \delta < \frac{\pi}{4}} \left| \int_{\Lambda_{R, \delta}} f \right| \right) = 0$.

2. Calculer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty, \delta \rightarrow 0} \int_{[\varepsilon e^{i\delta}, R e^{i\delta}]} f$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty, \delta \rightarrow 0} \int_{[R e^{i(\pi - \delta)}, \varepsilon e^{i(\pi - \delta)}]} f.$$

3. Justifier l'utilisation du théorème des résidus pour calculer $\int_{S_{\delta, \varepsilon, R}} f$, et en déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x^2 + 1)\sqrt{x}} dx.$$

Exercice : Pour $\delta > 0$, on note Λ_δ le chemin défini par $\theta \in [0, \pi] \mapsto \delta e^{i\theta}$. On note également S_δ le chemin défini par $S_\delta = \Lambda_\delta + [-\delta, \delta]$.

On considère la fonction

$$f(z) = \frac{\sinh z - z}{z^2 \sinh z} e^{iz},$$

où \sinh désigne le sinus hyperbolique.

1. Montrer que f est méromorphe sur \mathbb{C} . Déterminer les pôles de f et les résidus de f en chacun de ces pôles.

2. Calculer $\int_{S_{(n+1/2)\pi}} f$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ en utilisant le théorème des résidus.

3. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Lambda_{(n+1/2)\pi}} \frac{e^{iz}}{z^2} = 0.$$

4.

a) Montrer que pour $r > 0$, $\theta \in [0, \pi]$,

$$|\sinh(re^{i\theta})|^2 = |\sinh(r \cos \theta)|^2 + |\sin(r \sin \theta)|^2.$$

b) Montrer qu'il existe $N_0 \geq 0$ tel que pour $n \geq N_0$ et $\theta \in [0, \pi]$,

$$\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \geq \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad |\sinh((n+1/2)\pi \cos \theta)| \geq 1,$$

et

$$\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad |\sin((n+1/2)\pi \sin \theta)| \geq \frac{1}{2}.$$

c) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Lambda_{(n+1/2)\pi}} \frac{e^{iz}}{z \sinh z} = 0.$$

5. En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sinh x - x}{x^2 \sinh x} \cos x \, dx$$

en fonction de $\log(1 + e^{-\pi})$.

On termine cette série d'exercices par un développement en série de type "décomposition en éléments simples infinie", obtenu grâce au théorème des résidus.

Exercice : On note S l'ensemble des zéros de $z \mapsto \sinh z$.

1. Soit $a \in \mathbb{C} - S$, et $\phi_a : z \mapsto \frac{\cosh z}{z(z-a) \sinh z}$. Montrer que ϕ_a est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} . Quels sont ses pôles ? Calculer le résidu de ϕ_a en chacun de ces pôles.

2. Montrer que $z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$ est bornée sur $\mathbb{C} - B(1, \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Montrer que \cotanh est bornée sur $\cup_{m \in \mathbb{N}} C(0, (m + \frac{1}{2})\pi)$. En déduire que pour $a \in \mathbb{C} - S$,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{C(0, (m + \frac{1}{2})\pi)} \phi_a = 0.$$

3. Montrer que pour $a \in \mathbb{C} - S$,

$$\operatorname{cotanh} a = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 + k^2 \pi^2}.$$

En particulier, on montrera que (pour $a \in \mathbb{C} - S$) la série est convergente.

L'exercice suivant est d'une nature différente : il s'agit de savoir si une partie de l'ensemble des fonctions "puissance" est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Cette question n'a a priori rien à voir avec les fonctions de la variable complexe, c'est pourtant grâce à cette théorie qu'on peut essayer de la résoudre.

Exercice : Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante de \mathbb{R}_+^* vérifiant $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty$.

1. Montrer que la formule

$$f(z) = \frac{z}{(z+2)^3} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}$$

définit une fonction méromorphe sur \mathbb{C} dont on précisera les zéros et les pôles.

2. On note $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > -1\}$. Montrer que pour tout $z \in \Omega$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z} \right| < 1.$$

En déduire que

$$\forall z \in \overline{\Omega}, \quad |f(z)| \leq \frac{1}{|z+2|^2}.$$

3. Montrer que pour tout $z \in \Omega$,

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(-1+is)}{-1+is-z} ds. \quad (4)$$

On justifiera soigneusement l'existence de l'intégrale dans le second membre de (4).

4. Calculer pour $z \in \Omega$ et $s \in \mathbb{R}$ la quantité $\int_0^1 t^{z-is} dt$. En déduire que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 t^z \hat{g}(\log t) dt,$$

où (pour $s \in \mathbb{R}$) $g(s) = f(-1+is)$.

On rappelle que pour $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ix\xi} dx$.

5. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \neq \lambda_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), alors

$$(t \in [0, 1] \mapsto t^\lambda) \notin \overline{\text{Vect}\{t^{\lambda_n}/n \in \mathbb{N}^*\}},$$

l'adhérence étant prise au sens de la convergence uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

Ce résultat subsiste-t-il si l'on n'utilise pas l'hypothèse $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty$ (tout en gardant une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ strictement croissante et tendant vers l'infini ?

Le théorème des résidus permet également de localiser les zéros des fonctions holomorphes, grâce au lien entre le résidu de $\frac{f'}{f}$ et la valuation de f . On l'utilise souvent sous la forme suivante :

Corollaire : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et γ un lacet (continu et C^1 par morceaux) de Ω homotope à un point dont l'image ne contient aucun zéro de f . On suppose que $\Omega = A \cup B \cup \gamma([a, b])$, où $A = \{z \in \Omega, \text{Ind}_z(\gamma) = 1\}$, $B = \{z \in \Omega, \text{Ind}_z(\gamma) = 0\}$. Alors

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} = 2\pi i \sum_{z_0 \in A, f(z_0)=0} 1,$$

les zéros étant comptés avec multiplicité ou, si l'on préfère,

$\int_\gamma \frac{f'}{f} = 2\pi i \sum_{z_0 \in A} v_{z_0}(f)$. Lorsque f est méromorphe, cette dernière formule reste vraie, les valuations pouvant être alors négatives.

Corollaire : (théorème de Rouché) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $\overline{B(a, \varepsilon)} \subset \Omega$. On suppose que f ne s'annule pas sur $C(a, \varepsilon)$ et on appelle n le nombre de zéros de f dans $B(a, \varepsilon)$ comptés avec multiplicité. Si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ et si pour tout $z \in C(a, \varepsilon)$, on a $|g(z) - f(z)| < |f(z)|$, alors g ne s'annule pas sur $C(a, \varepsilon)$ et le nombre de zéros de g dans $B(a, \varepsilon)$ comptés avec multiplicité est encore n .

Preuve : On note $f_t = t f + (1 - t) g$, et

$$h(t) = \int_{C(a, \varepsilon)} \frac{f'_t(z)}{f_t(z)} \frac{dz}{2\pi i}.$$

La fonction h est continue car f_t ne s'annule pas sur $C(a, \varepsilon)$ (en particulier c'est vrai pour $g = f_0$). En effet,

$$\begin{aligned} |f_t(z)| &\geq |f(z)| - (1 - t) |g(z) - f(z)| \\ &\geq |f(z)| - |g(z) - f(z)| > 0. \end{aligned}$$

Or la fonction h est à valeurs dans \mathbb{Z} , elle est donc constante. Mais $h(t)$ est le nombre de zéros de f_t dans $B(0, \varepsilon)$ comptés avec multiplicité, ce qui permet de conclure.

Exercice : Combien y a-t-il de solutions à l'équation

$$z^4 - 5z + 1 = 0$$

dans $B(0, 1)$? et dans $B(0, 2)$? On pourra considérer la fonction polynômiale $z \mapsto z^4 - 5z$.

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ une suite de fonctions convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose de plus que toutes les fonctions f_n sont injectives sur Ω . Alors f est injective sur Ω ou constante sur Ω .

Preuve : On suppose que f n'est pas une fonction constante, et que l'on a $z_0, z_1 \in \Omega$ distincts tels que $f(z_0) = f(z_1)$. Alors pour ε assez petit, $f - f(z_1)$ admet un zéro unique (isolé) dans $B(z_0, \varepsilon)$ (en particulier $|z_0 - z_1| > \varepsilon$) et on peut supposer que $|f(z) - f(z_1)| \geq \delta > 0$ pour $z \in C(z_0, \varepsilon)$. Mais on sait que grâce à la convergence compacte, on a pour n assez grand (et $z \in C(z_0, \varepsilon)$) $|(f_n(z) - f_n(z_1)) - (f(z) - f(z_1))| \leq \delta/2$. On peut donc appliquer le théorème de Rouché à $f_n - f_n(z_1)$ (pour n assez grand) et en déduire que cette fonction a exactement un zéro dans $B(z_0, \varepsilon)$, ce qui n'est pas possible.

5.3 Introduction à l'étude des fonctions elliptiques

Définition : Soit $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ formant une famille \mathbb{R} -libre. On note $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ le réseau associé. On dit qu'une fonction méromorphe sur \mathbb{C} est elliptique lorsqu'elle est L -périodique, i.-e.

$$\forall l \in L, z \in \mathbb{C}, \quad f(z + l) = f(z).$$

On note pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, $P_{z_0} = z_0 + [0, 1[\omega_1 + [0, 1[\omega_2$.

Proposition : Toute fonction elliptique holomorphe est constante.

Preuve : En effet une fonction elliptique holomorphe est entière et bornée car les valeurs que prend f sur \mathbb{C} sont (du fait de la périodicité) celles que prend f sur le pavé \bar{P}_0 par exemple, qui est borné. On applique alors le théorème de Liouville.

Proposition : Les zéros d'une fonction elliptique non constante se répartissent en classes $(a_i + L)_{i=1, \dots, k}$, où les a_i sont comptés avec leur multiplicité, et ses pôles se répartissent en classes $(b_i + L)_{i=1, \dots, k}$, où les b_i sont également comptés avec leur multiplicité. Le nombre k (de \mathbb{N}^*) est appelé l'ordre de f . Pour tout $w \in \mathbb{C}$, l'ordre de $f - w$ est le même que celui de f . En particulier une fonction elliptique (non constante) est surjective (sur \mathbb{C}).

Preuve : Comme f est méromorphe (et non constante), f admet sur le compact $[-1, 1]\omega_1 + [-1, 1]\omega_2$ un nombre fini de zéros et de pôles. On peut

donc trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que ∂P_{z_0} ne contient ni zéros ni pôles. On considère alors les zéros $(a_i)_{i=1,\dots,k}$ et les pôles $(b_i)_{i=1,\dots,k'}$ (avec $k, k' \in \mathbb{N}$, et comptés avec multiplicité) de f dans \bar{P}_{z_0} . Il est clair par périodicité que les zéros de f se répartissent en classes $(a_i + L)_{i=1,\dots,k}$, où les a_i sont comptés avec leur multiplicité, et ses pôles se répartissent en classes $(b_i + L)_{i=1,\dots,k'}$, où les b_i sont également comptés avec leur multiplicité.

Le calcul de $\int_{\partial P_{z_0}} \frac{f'}{f}$ donne

$$\begin{aligned} \int_{\partial P_{z_0}} \frac{f'}{f} &= \int_0^1 \frac{f'}{f}(z_0 + t\omega_1) \omega_1 dt + \int_0^1 \frac{f'}{f}(z_0 + \omega_1 + t\omega_2) \omega_2 dt \\ &\quad - \int_0^1 \frac{f'}{f}(z_0 + \omega_2 + t\omega_1) \omega_1 dt - \int_0^1 \frac{f'}{f}(z_0 + t\omega_2) \omega_2 dt. \end{aligned}$$

Comme f'/f est L -périodique, on voit que $\int_{\partial P_{z_0}} \frac{f'}{f} = 0$. On en déduit que $k = k'$.

Proposition : Avec les notations de la proposition précédente, on a

$$\sum_{i=1}^k a_i \equiv \sum_{i=1}^k b_i \pmod{L}.$$

Preuve : On calcule maintenant $\int_{\partial P_{z_0}} z \frac{f'}{f}(z) dz$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\partial P_{z_0}} z \frac{f'}{f}(z) dz &= \int_0^1 (z_0 + t\omega_1) \frac{f'}{f}(z_0 + t\omega_1) \omega_1 dt \\ &\quad + \int_0^1 (z_0 + \omega_1 + t\omega_2) \frac{f'}{f}(z_0 + \omega_1 + t\omega_2) \omega_2 dt \\ &\quad - \int_0^1 (z_0 + \omega_2 + t\omega_1) \frac{f'}{f}(z_0 + \omega_2 + t\omega_1) \omega_1 dt \\ &\quad - \int_0^1 (z_0 + t\omega_2) \frac{f'}{f}(z_0 + t\omega_2) \omega_2 dt. \end{aligned}$$

En utilisant la périodicité de f'/f , on voit que

$$\begin{aligned} \int_{\partial P_{z_0}} z \frac{f'}{f}(z) dz &= -\omega_2 \int_0^1 \frac{f'}{f}(z_0 + t\omega_1) \omega_1 dt \\ &\quad + \omega_1 \int_0^1 \frac{f'}{f}(z_0 + t\omega_2) \omega_2 dt \\ &= -\omega_2 \int_{[z_0, z_0 + \omega_1]} \frac{f'}{f} + \omega_1 \int_{[z_0, z_0 + \omega_2]} \frac{f'}{f}. \end{aligned}$$

Comme f n'a pas de zéros ni de pôles sur les segments $[z_0, z_0 + \omega_1]$ et $[z_0, z_0 + \omega_2]$, elle n'en a pas non plus dans un voisinage (ouvert simplement connexe) de l'union de ces deux segments. On peut donc trouver g holomorphe sur ce voisinage, telle que $e^g = f$ (et donc $g' = f'/f$). On en déduit que

$$\int_{\partial P_{z_0}} z \frac{f'}{f}(z) dz = -\omega_2 (g(z_0 + \omega_1) - g(z_0)) + \omega_1 (g(z_0 + \omega_2) - g(z_0)).$$

Comme $f(z_0 + \omega_1) = f(z_0)$ et $f(z_0 + \omega_2) = f(z_0)$, on a $g(z_0 + \omega_1) - g(z_0) \in 2i\pi\mathbb{Z}$, $g(z_0 + \omega_2) - g(z_0) \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Utilisant le théorème des résidus, on obtient

$$2i\pi \sum_{z \in P_{z_0}} \operatorname{Res}_z \left(\zeta \mapsto \zeta \frac{f'}{f}(\zeta) \right) \in 2i\pi L.$$

Mais en un pôle ou un zéro z de f , on observe que

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \alpha (\zeta - z)^{v_z(f)} + o((\zeta - z)^{v_z(f)}), \\ f'(\zeta) &= \alpha v_z(f) (\zeta - z)^{v_z(f)-1} + o((\zeta - z)^{v_z(f)-1}), \end{aligned}$$

et donc

$$\zeta \frac{f'}{f}(\zeta) = \frac{z v_z(f)}{\zeta - z} + o((\zeta - z)^{-1}).$$

On en déduit la propriété demandée.

Corollaire : Il n'y a pas de fonctions elliptiques d'ordre 1.

Preuve : En effet si $k = 1$, alors $a_1 - b_1 \in L$, et on obtient un point qui est à la fois un zéro et un pôle de f .

Proposition : La fonction \mathcal{P} (dite fonction \mathcal{P} de Weierstrass associée au réseau L) définie par

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L, \omega \neq 0} \left[\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]$$

est une fonction elliptique paire d'ordre 2. La famille sommable apparaissant dans la définition de cette fonction converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C} - L$.

Preuve : On commence par remarquer que l'application

$$(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |p\omega_1 + q\omega_2|^2$$

est une forme quadratique définie positive. Donc il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \quad |p\omega_1 + q\omega_2|^2 \geq \lambda(p^2 + q^2).$$

Soit K un compact de $\mathbb{C} - L$. On sait que $\delta = d(K, L)$ est strictement positive, et que $K \subset B(0, R)$ pour un certain $R > 0$. Pour $\omega \in L, |\omega| \geq 2R$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| &\leq \frac{R^2 + 2R|\omega|}{|\omega|^2 (|\omega| - R)^2} \\ &\leq \frac{12 R^3}{|\omega|^3} \\ &\leq \frac{12 R^3}{\lambda^{3/2}} (p^2 + q^2)^{-3/2}. \end{aligned}$$

On conclut à la convergence normale de la famille sommable en remarquant d'une part que

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{Z} - \{(0,0)\}} (p^2 + q^2)^{-3/2} < +\infty,$$

et d'autre part que $L \cap B(0, 2R)$ est fini (il contient au plus $4(E(4R^2/\lambda) + 1)$ points).

On en déduit que \mathcal{P} est holomorphe sur $\mathbb{C} - L$. On obtient la L -périodicité par un changement d'indice dans la somme (justifié du fait de la sommabilité). Enfin on remarque que le seul pôle de \mathcal{P} (à L -périodicité près) est en 0, et qu'il est double (toujours par convergence normale de la famille sommable), si bien que \mathcal{P} est elliptique d'ordre 2.

Enfin, toujours par un changement d'indices, on voit que \mathcal{P} est paire.

Proposition : La fonction \mathcal{P} vérifie

$$(\mathcal{P}')^2(z) = 4 \mathcal{P}^3(z) - q_2(L) \mathcal{P}(z) - q_3(L),$$

pour certaines constantes $q_2(L), q_3(L) \in \mathbb{C}$ dépendant du réseau.

Preuve : En utilisant la parité, on voit qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ (dépendant du réseau) tels que

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + a z^2 + b z^4 + O(z^6),$$

$$\mathcal{P}'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2 a z + 4 b z^3 + O(z^5),$$

si bien que

$$(\mathcal{P}'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8a}{z^2} - 16b + O(z^2),$$

$$4(\mathcal{P}(z))^3 = \frac{4}{z^6} + \frac{12a}{z^2} + 12b + O(z^2),$$

et

$$(\mathcal{P}')^2(z) - 4 \mathcal{P}^3(z) + 20 a \mathcal{P}(z) + 28 b = O(z^2).$$

En utilisant le fait qu'on obtient une fonction elliptique holomorphe, on obtient la formule annoncée à une constante près, qui ne peut en fait qu'être nulle.

Remarque : On peut voir par le calcul que $q_2(L) = 60 G_L(2)$ et $q_3(L) = 140 G_L(3)$, où G_L est définie par

$$G_L(p) = \sum_{\omega \in L, \omega \neq 0} \omega^{-2p}.$$

Proposition : On a la formule d'addition (pour $z \in \mathbb{C}$)

$$\mathcal{P}(2z) = R(\mathcal{P}(z)),$$

avec

$$R(z) = \frac{z^4 + q_2(L)z^2/2 + 2q_3(L)z + (q_2(L)/4)^2}{4z^3 - q_2(L)z - q_3(L)}.$$

Preuve : On considère $u \in \mathbb{C} - L$, et $v \notin u + L$. On peut donc trouver $A, B \in \mathbb{C}$ tels que

$$\mathcal{P}'(u) = A\mathcal{P}(u) + B, \quad \mathcal{P}'(v) = A\mathcal{P}(v) + B.$$

On considère alors la fonction f (clairement elliptique) définie par

$$f(z) = \mathcal{P}'(z) - A\mathcal{P}(z) - B.$$

Cette fonction est clairement d'ordre 3 puisque \mathcal{P} est d'ordre 2 et \mathcal{P}' d'ordre 3, elle admet donc 3 zéros par maille du réseau L . De plus, la somme de ces zéros est égale (modulo L) à celle des pôles, soit 0 (on a un seul pôle triple en 0). Comme u et v sont construits pour être des zéros de f , on voit que $-u - v$ est également un zéro de f .

En utilisant l'équation différentielle associée à \mathcal{P} , on voit que

$$(f(z) + A\mathcal{P}(z) + B)^2 = 4\mathcal{P}^3(z) - q_2(L)\mathcal{P}(z) - q_3(L).$$

On en déduit que $\mathcal{P}(u)$, $\mathcal{P}(v)$ et $\mathcal{P}(-u - v)$ sont des solutions distinctes (en tout cas lorsque v est suffisamment proche de u) de l'équation polynomiale de degré 3 :

$$(Az + B)^2 = 4z^3 - q_2(L)z - q_3(L).$$

Le lien entre racines et coefficients des polynômes montre alors que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u) + \mathcal{P}(v) + \mathcal{P}(-u - v) &= A^2/4 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\mathcal{P}'(u) - \mathcal{P}'(v)}{\mathcal{P}(u) - \mathcal{P}(v)} \right)^2. \end{aligned}$$

En faisant tendre u vers v (ce qu'on peut faire en conservant la relation $\mathcal{P}(u) \neq \mathcal{P}(v)$), on obtient (pour tout $v \notin L$) :

$$2\mathcal{P}(v) + \mathcal{P}(2v) = \frac{1}{4} \left(\frac{\mathcal{P}''(v)}{\mathcal{P}'(v)} \right)^2.$$

On en déduit la proposition en utilisant l'équation différentielle vérifiée par \mathcal{P} .

Corollaire : Pour tout ouvert Ω de \mathbb{C} , et $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on a $R^n(\Omega) = \mathbb{C}$ (ici, R^n désigne $R \circ \dots \circ R$). En particulier, la famille $(R^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est équicontinue sur aucun ouvert de \mathbb{C} : on dit que l'ensemble de Julia associé à R (complémentaire de l'ouvert maximal sur lequel la famille $(R^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue) est \mathbb{C} tout entier (en toute rigueur, l'équicontinuité est au sens de la topologie de la sphère de Riemann, compactifié d'Alexandrov de \mathbb{C} , et l'ensemble de Julia est la totalité de la sphère de Riemann).

Preuve : On peut trouver un disque $D \subset \Omega$. Comme $\mathcal{P}(2^n z) = R^n(\mathcal{P}(z))$, on a $R^n(D) = R^n(\mathcal{P}(\mathcal{P}^{-1}(D))) = \mathcal{P}(2^n \mathcal{P}^{-1}(D))$. Or pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, $2^n \mathcal{P}^{-1}(D)$ contient un translaté de L , donc $R^n(D) = \mathbb{C}$.

6 Automorphismes analytiques et théorème de représentation de Riemann

6.1 Le lemme de Schwarz

Proposition : Soit $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ holomorphe et telle que $f(0) = 0$. Alors, pour tout $z \in B(0, 1)$, on a $|f(z)| \leq |z|$. De plus $|f'(0)| \leq 1$.

Lorsqu'il existe $z \in B(0, 1) - \{0\}$ tel que $|f(z)| = |z|$ (ou si $|f'(0)| = 1$), alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta} z$.

Preuve : La fonction $g : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = f(z)/z$ (et $g(0) = f'(0)$) est holomorphe, et vérifie

$$\forall z_0 \in C(0, 1), \quad \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} |g(z)| \leq 1.$$

D'après le principe du maximum, on a la première partie de la proposition.

Si de plus $|g(z)| = 1$ pour $z \in B(0, 1)$, on voit que $|g|$ atteint son maximum sur $B(0, 1)$ et on en déduit que g est constante, et donc que f est linéaire. Mais alors f est forcément de la forme $f(z) = e^{i\theta} z$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

6.2 Les automorphismes analytiques de $B(0, 1)$

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On appelle automorphisme analytique de Ω une fonction holomorphe et bijective de Ω dans Ω .

Remarque : Pour f automorphisme analytique de Ω , on peut montrer que $\forall z \in \Omega, f'(z) \neq 0$ (Cf. exercices), et la réciproque f^{-1} est alors automatiquement holomorphe. Les automorphismes analytiques de Ω forment un groupe pour la composition.

Proposition : Les automorphismes analytiques de $B(0, 1)$ sont exactement les fonctions

$$\phi_{\theta, \alpha}(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z},$$

pour $\alpha \in B(0, 1)$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Plus précisément, pour $\alpha \in B(0, 1)$ donné, les automorphismes analytiques de $B(0, 1)$ valant 0 en α sont les $\phi_{\theta, \alpha}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. Ces fonctions vérifient

$$\phi'_{\theta, \alpha}(z) = e^{i\theta} \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \bar{\alpha}z)^2}.$$

Preuve : On a $|1/\bar{\alpha}| > 1$, donc $\phi_{\theta, \alpha}$ est holomorphe sur $B(0, 1)$. On montre ensuite que $\phi_{\theta, \alpha}$ prend ses valeurs dans $B(0, 1)$.

Pour cela, on note $z = re^{it}$ et $\alpha = se^{iu}$ les décompositions polaires de z et α . On a

$$\left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|^2 = \frac{r^2 + s^2 - 2rs \cos(t - u)}{1 + r^2s^2 - 2rs \cos(t - u)} < 1.$$

Ensuite, on remarque que $\phi_{-\theta, -\alpha e^{i\theta}} \circ \phi_{\theta, \alpha} = \phi_{\theta, \alpha} \circ \phi_{-\theta, -\alpha e^{i\theta}} = id$ et que $\alpha \in B(0, 1) \Rightarrow -\alpha e^{i\theta} \in B(0, 1)$, donc $\phi_{\theta, \alpha}$ est injective et surjective.

Réciproquement, si f est un automorphisme analytique de $B(0, 1)$ tel que $f(\alpha) = 0$, alors $g = f \circ \phi_{0, -\alpha}$ est un automorphisme analytique de $B(0, 1)$ vérifiant $g(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz, on a pour tout $z \in B(0, 1)$, $|g(z)| \leq |z|$. De même, pour tout $z \in B(0, 1)$, $|g^{-1}(z)| \leq |z|$. On en déduit que pour tout $z \in B(0, 1)$, $|g(z)| = |z|$ et donc qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in B(0, 1)$, $g(z) = e^{i\theta} z$, ce qui permet de conclure.

6.3 Homographies

Définition : On appelle homographies les applications méromorphes sur \mathbb{C} de la forme

$$f_{a,b,c,d} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$.

On prolonge $f_{a,b,c,d}$ en un point supplémentaire (noté ∞) par $f_{a,b,c,d}(\infty) = a/c$ si $c \neq 0$, et $f_{a,b,0,d}(\infty) = \infty$.

Proposition : Les homographies forment un groupe pour la composition (sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$). L'application de $SL_2(\mathbb{C})$

dans l'ensemble des homographies qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $f_{a,b,c,d}$ est un homomorphisme surjectif de groupes dont le noyau est $\{\pm Id\}$. Le groupe des homographies est engendré par les similitudes linéaires directes (non nulles) $z \mapsto az$ ($a \in \mathbb{C}, a \neq 0$), les translations $z \mapsto z + b$ ($b \in \mathbb{C}$) et l'inversion $z \mapsto 1/z$.

Preuve : On remarque tout d'abord que pour $a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$, l'application $f_{a,b,c,d}$ est une bijection de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. En effet,

$$\zeta = \frac{az + b}{cz + d} \iff z = \frac{d\zeta - b}{-c\zeta + a}.$$

Cette formule montre que $f_{a,b,c,d}$ est une bijection de $\mathbb{C} - \{-d/c\}$ dans $\mathbb{C} - \{a/c\}$. On conclut en remarquant que $f_{a,b,c,d}(-d/c) = \infty$ et $f_{a,b,c,d}(\infty) = a/c$.

On note ensuite que

$$f_{a,b,c,d} \circ f_{a',b',c',d'} = f_{aa'+bc', ab'+bd', ca'+dc', cb'+dd'}.$$

Ceci montre que les homographies forment un groupe, et que l'application $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto f_{a,b,c,d}$ est un homomorphisme. Il est surjectif car pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $f_{\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d} = f_{a,b,c,d}$, et on peut toujours trouver $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = 1.$$

Le noyau de cet homomorphisme est constitué par les éléments de $SL_2(\mathbb{C})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui vérifient pour tout $z \in \mathbb{C} - \{-d/c\}$:

$$\frac{az + b}{cz + d} = z.$$

On en déduit que $b = c = 0$ et $a = d = 1$ ou $a = d = -1$. Donc $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm Id$.

Enfin, on remarque que (si $c \neq 0$)

$$\begin{aligned} f_{a,b,c,d} &= (z \mapsto z + a/c) \circ (z \mapsto (b - ad/c)z) \\ &\quad \circ (z \mapsto 1/z) \circ (z \mapsto z + d) \circ (z \mapsto cz), \end{aligned}$$

et que

$$f_{a,b,0,d} = (z \mapsto z + b/d) \circ (z \mapsto (a/d)z).$$

Proposition : On note A l'ensemble formé des droites et des cercles de \mathbb{C} . Alors les homographies envoient A dans A .

Preuve : L'équation du cercle de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$ s'écrit $|z - z_0| = R$, ou, sous forme développée,

$$|z|^2 - z_0 \bar{z} - \bar{z}_0 z + |z_0|^2 - R^2 = 0. \quad (5)$$

D'autre part, les équations de droite sont de la forme

$$\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} = \beta, \quad (6)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On voit que pour $|z_0| \neq R$, et $\zeta = 1/z$, l'équation (5) se transforme en

$$|\zeta|^2 - \frac{z_0}{|z_0|^2 - R^2} \zeta - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2} \bar{\zeta} + \frac{1}{|z_0|^2 - R^2} = 0,$$

ce qui est l'équation d'un cercle (de centre $\bar{z}_0/(|z_0|^2 - R^2)$).

Lorsque $|z_0| = R$ (cercle passant par 0) et $\zeta = 1/z$, l'équation (5) se transforme en

$$z_0 \zeta + \bar{z}_0 \bar{\zeta} = 1,$$

ce qui est une équation de droite.

On voit que pour $\beta \neq 0$, et $\zeta = 1/z$, l'équation (6) se transforme en

$$|\zeta|^2 - \frac{\alpha}{\beta} \bar{\zeta} - \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \zeta = 0,$$

ce qui est l'équation d'un cercle (passant par 0) de centre α/β .

Enfin lorsque $\beta = 0$ (droite passant par 0) et $\zeta = 1/z$, l'équation (6) se transforme en

$$\alpha \bar{\zeta} + \bar{\alpha} \zeta = 0,$$

ce qui est de nouveau l'équation d'une droite passant par 0.

On a donc démontré que l'homographie $z \mapsto 1/z$ envoie A dans A . D'autre part les similitudes envoient les droites sur des droites et les cercles sur des cercles. On conclut en utilisant le fait que le groupe des homographies est engendré par les similitudes et l'homographie $z \mapsto 1/z$.

Remarque : On peut aussi conclure (en fait un peu plus rapidement) en remarquant que les éléments de A peuvent être définis par des équations du type $|z - a| = k|z - b|$, avec $a, b \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice : Soit f une fonction entière vérifiant

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} f(z) \leq C,$$

pour $C > 0$. Montrer que f est une fonction constante. On pourra utiliser une homographie.

6.4 Transformations conformes et théorème de Riemann

Définition : On appelle application conforme sur Ω ouvert de \mathbb{C} une fonction holomorphe sur Ω dont la dérivée ne s'annule pas sur cet ouvert. En particulier les applications holomorphes et injectives sur Ω sont conformes. Deux

ouverts de \mathbb{C} sont dits conformément équivalents s'il existe une bijection holomorphe de l'un dans l'autre (on sait alors qu'une telle bijection est conforme ainsi que sa réciproque).

Remarque : Une application conforme conserve les angles orientés. On peut montrer qu'inversement, sous certaines hypothèses, une application qui conserve les angles orientés est conforme.

Exemple : On note $H = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}z > 0\}$. L'application $\Psi : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est une bijection holomorphe de H dans $B(0, 1)$ (i.-e. H et $B(0, 1)$ sont conformément équivalents).

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $\phi, \psi : \Omega \rightarrow B(0, 1)$ holomorphes. Soit $a \in \Omega$ tel que $\phi(a) = \psi(a) = 0$. Si de plus ϕ est bijective, alors

$$|\psi'(a)| \leq |\phi'(a)|.$$

Preuve : $\psi \circ \phi^{-1}$ est une fonction holomorphe de $B(0, 1)$ dans $B(0, 1)$ et $(\psi \circ \phi^{-1})(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz, $|(\psi \circ \phi^{-1})'(0)| \leq 1$, donc $|\psi'(a)| \leq |\phi'(a)|$.

Le théorème suivant montre que tous les ouverts de \mathbb{C} simplement connexes sont conformément équivalents (à l'exception de \mathbb{C} lui-même). En particulier, il fournit un résultat de topologie non trivial : tous les ouverts de \mathbb{R}^2 simplement connexes sont homéomorphes (Cf. remarque après la preuve du théorème).

Théorème : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe non vide et différent de \mathbb{C} . Alors il existe $\phi : \Omega \rightarrow B(0, 1)$ bijection holomorphe. Pour $a \in \Omega$ fixé, on peut même imposer que $\phi(a) = 0$.

Preuve : On note $\mathcal{X} = \{\phi : \Omega \rightarrow B(0, 1) \text{ holomorphe}, \phi(a) = 0, \phi \text{ injective}\}$. On montre que

1. \mathcal{X} est non vide: en effet soit $w \in \mathbb{C} - \Omega$, alors $z \mapsto z - w$ est holomorphe et ne s'annule pas sur Ω . Comme Ω est supposé simplement connexe, on en déduit qu'il existe $\psi_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $\psi_1^2(z) = z - w$. De plus ψ_1 est injective et l'on a même mieux: $\psi_1(z_1) = \pm \psi_1(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$. Comme ψ_1 n'est pas constante, elle est ouverte, et on peut donc trouver $a_1 \neq 0$ et $r \in]0, |a_1|$ tel que $B(a_1, r) \subset \psi_1(\Omega)$. On pose alors $\psi_0 = \frac{r}{\psi_1 + a_1}$.

Cette fonction ψ_0 est dans $\mathcal{H}(\Omega)$. En effet s'il existe $z \in \Omega$ tel que $\psi_1(z) = -a_1$, alors il existe $z' \in \Omega$ tel que $\psi_1(z) = -\psi_1(z')$ (car $B(a_1, r) \subset \psi_1(\Omega)$). On en déduit que $z = z'$, d'où $\psi_1(z) = \psi_1(z') = 0$ (car $\psi_1(z) = -\psi_1(z')$ également), et $z = w$, ce qui est impossible car $w \notin \Omega$. De plus ψ_0 est injective, car ψ_1 l'est également. Enfin,

$$|\psi_0(z)| \leq \frac{r}{|\psi_1(z) + a_1|},$$

or $B(-a_1, r) \cap \psi_1(\Omega)$ est vide (en effet si $z \in B(-a_1, r) \cap \psi_1(\Omega)$, on peut trouver z_1, z'_1 dans Ω tels que $\psi_1(z_1) = -\psi_1(z'_1) = z$, d'où $z_1 = z'_1$, puis $\psi_1(z_1) = 0$ et $z_1 = w$, ce qui est impossible car $w \notin \Omega$). Finalement, $|\psi_0(z)| < 1$. La fonction $\psi^* = \phi_{0, \psi_0(a)} \circ \psi_0$ répond alors à la question.

2. On considère une suite maximisante de \mathcal{X} pour la fonctionnelle $J(\phi) = |\phi'(a)|$. On a donc une famille $\phi_n \in \mathcal{X}$ telle que $J(\phi_n) \rightarrow J^*$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ avec $J^* = \sup_{\phi \in \mathcal{X}} J(\phi)$ (ce sup est fini et même inférieur à $1/r$ si $B(a, r) \subset \Omega$ grâce aux formules de Cauchy).

Pour tout K compact de Ω , on a

$$\sup_{\phi \in \mathcal{X}} \sup_{z \in K} |\phi(z)| \leq 1.$$

On en déduit que \mathcal{X} est une famille normale de $\mathcal{H}(\Omega)$, et donc que l'on peut extraire une sous-suite $(\phi_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω . Il est clair que $\phi(\Omega) \subset \overline{B(0, 1)}$.

Comme J est continue de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans \mathbb{R} pour cette topologie, on obtient $J(\phi) = J^*$ par passage à la limite. De même $\phi(a) = 0$. Comme $|\phi'(a)| \geq |\psi^{*'}(a)|$ et comme ψ^* est injective, on voit que $|\phi'(a)| > 0$. La fonction ϕ n'est donc pas constante. Elle est donc injective comme limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes injectives. Elle est également ouverte, et prend donc ses valeurs dans $B(0, 1)$ (et non $\overline{B(0, 1)}$).

3. ϕ est surjective sur $B(0, 1)$: supposons que l'on puisse trouver w non nul dans $B(0, 1)$ tel que $w \notin \phi(\Omega)$ ($\phi(a) = 0$ donc $0 \in \phi(\Omega)$). On considère alors $\phi_{0, w} \circ \phi : \Omega \rightarrow B(0, 1) - \{0\}$. Comme Ω est simplement connexe, cette fonction admet une racine carrée $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. On sait que g est injective (et même mieux, comme au point 1.) car $\phi_{0, w} \circ \phi$ l'est également. De plus, g est à valeur dans $B(0, 1)$. Enfin, on pose $\psi = \phi_{0, g(a)} \circ g$. On voit immédiatement que ψ est injective et à valeurs dans $B(0, 1)$. De plus, $\psi(a) = \phi_{0, g(a)}(g(a)) = 0$, donc $\psi \in \mathcal{X}$. Pour conclure, on montre que $|\psi'(a)| > |\phi'(a)|$.

Le calcul donne :

$$\begin{aligned} \psi'(a) &= g'(a) \phi'_{0, g(a)}(g(a)) \\ &= \frac{g'(a)}{1 - |g(a)|^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Or $g^2 = \phi_{0, w} \circ \phi$, donc

$$\frac{g'}{g} = \frac{1}{2} \frac{(\phi_{0, w} \circ \phi)'}{\phi_{0, w} \circ \phi}.$$

On en déduit que

$$\frac{g'(a)}{g(a)} = \frac{1}{2} \frac{1 - \bar{w} \phi(a)}{\phi(a) - w} \phi'(a) \frac{1 - |w|^2}{(1 - \bar{w} \phi(a))^2}, \tag{8}$$

d'où (en utilisant les relations (7) et (8)),

$$\psi'(a) = \frac{g(a)}{1 - |g(a)|^2} \frac{1}{2} \frac{\phi'(a)}{\phi(a) - w} \frac{1 - |w|^2}{1 - \bar{w}\phi(a)}.$$

Finalement, en utilisant $g(a)^2 = \phi_{0,w}(0) = -w$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{|\psi'(a)|}{|\phi'(a)|} &= \frac{1}{2} \frac{|w|^{1/2}}{1 - |w|} \frac{1 - |w|^2}{|w|} \\ &= \frac{1}{2} \left(|w|^{1/2} + |w|^{-1/2} \right) > 1 \quad \text{car } |w| < 1. \end{aligned}$$

Remarque : Il est clair qu'il ne peut y avoir de bijection holomorphe de \mathbb{C} dans $B(0,1)$ du fait du théorème de Liouville. Par contre \mathbb{C} est homéomorphe à $B(0,1)$ (on peut utiliser par exemple l'homéomorphisme $r e^{i\theta} \mapsto \frac{2}{\pi} e^{i\theta} \arctan r$). On en déduit que tous les ouverts de \mathbb{R}^2 simplement connexes sont homéomorphes (de même que tous les ouverts connexes de \mathbb{R} sont homéomorphes). Il s'agit d'un résultat purement topologique très difficile à obtenir sans recours aux fonctions holomorphes.

6.5 Utilisation des transformations conformes en mécanique des fluides

6.5.1 Etablissement des équations d'Euler des fluides compressibles

On considère un fluide de densité ρ , de vitesse $u = (u_1, u_2, u_3)$ et de température T . Chacunes de ces quantités est une fonction des variables t et x représentant le temps et la position. On prendra par la suite $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \hat{\Omega}$, où $\hat{\Omega}$ est un ouvert "régulier" de \mathbb{R}^3 . On suppose que le fluide obéit aux lois d'état thermodynamiques

$$p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T),$$

où p est la pression du fluide, e son énergie interne.

Les équations d'Euler des fluides compressibles s'écrivent

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) = 0, \tag{9}$$

$$\partial_t(\rho u_i) + \operatorname{div}_x(\rho u_i u) + \partial_{x_i} p = 0, \tag{10}$$

$$\partial_t \left(\rho \frac{|u|^2}{2} + e \right) + \operatorname{div}_x \left(\left(\rho \frac{|u|^2}{2} + e + p \right) u \right) = 0. \tag{11}$$

On impose de plus des conditions aux limites sur le bord $\partial\hat{\Omega}$ de $\hat{\Omega}$. La seule dont nous ferons état ici est la condition de glissement sur une paroi matérielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, x \in \partial\hat{\Omega}, \quad u(t, x) \cdot n(x) = 0,$$

où $n(x)$ est la normale extérieure à Ω au point x .

Notons qu'en vertu de la formule de Stokes, toute quantité q liée matériellement au fluide et n'évoluant avec le temps qu'au travers du mouvement du fluide vérifie

$$\partial_t q + \operatorname{div}_x(q u) = 0. \quad (12)$$

Appliquée à la densité ρ , cette formule fournit l'équation (9) de conservation de masse. Appliquée à la la quantité de mouvement (plus précisément, à sa i -ème composante), elle fournit l'équation (10), que l'on peut voir comme une version de la relation fondamentale de la dynamique. Les seules forces qui interviennent sont les forces de pression.

Enfin, on applique la formule (12) à l'énergie totale $\rho \frac{|u|^2}{2} + \epsilon$, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne. On obtient ainsi l'équation (11) de conservation de l'énergie. La variation d'énergie d'un morceau matériel du fluide est due uniquement au travail des forces de pression.

Lorsque l'on considère un gaz parfait monoatomique, les lois de pression et d'énergie interne sont

$$p = \rho T, \quad \epsilon = \frac{3}{2} \rho T.$$

Dans ce cas, on peut dériver les équations d'Euler à partir de la théorie cinétique des gaz. Dans cette théorie, on considère la densité $f(t, x, v) \geq 0$ de molécules qui au temps t et au point x possèdent la vitesse v . La densité ρ est alors simplement donnée par

$$\rho(t, x) = \int_v f(t, x, v) dv,$$

et la vitesse "moyenne" u ainsi que la température T sont la moyenne et la variance de v par rapport à la probabilité $f dv / \rho$:

$$\begin{aligned} \rho(t, x) u(t, x) &= \int_v f(t, x, v) v dv, \\ \rho(t, x) \frac{|u(t, x)|^2}{2} + \frac{3}{2} \rho(t, x) T(t, x) &= \int_v f(t, x, v) \frac{|v|^2}{2} dv. \end{aligned}$$

En l'absence d'interactions entre les molécules, ces dernières ont un mouvement rectiligne et uniforme, si bien que

$$f(t + \tau, x + v \tau, v) = f(t, x, v),$$

ou bien, sous forme différentielle,

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0.$$

Mais dès que le gaz n'est pas extrêmement raréfié, on doit écrire

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f),$$

où Q décrit les collisions binaires entre molécules : c'est l'équation de Boltzmann. Les seules propriétés de Q que l'on utilisera sont la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie (locales)

$$\int_v Q(f)(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ \frac{|v|^2}{2} \end{pmatrix} dv = 0, \quad (13)$$

et le fait que les équilibres locaux sont les fonctions Maxwelliennes (Gaussiennes) de la variable v :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \quad Q(f)(v) = 0 \quad \iff \quad \log f \in Vect \left(1, v_i, \frac{|v|^2}{2} \right). \quad (14)$$

On appelle développement de Hilbert la famille d'équations

$$\partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_\varepsilon).$$

Ce développement correspond à une situation où le gaz est de moins en moins raréfié.

On voit que si $f_\varepsilon \rightarrow f$, alors $Q(f) = 0$, si bien que

$$f(t, x, v) = \frac{\rho(t, x)}{(2\pi T(t, x))^{3/2}} e^{-\frac{|v-u(t,x)|^2}{2T(t,x)}}.$$

Comme

$$\partial_t \int_v f(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ \frac{|v|^2}{2} \end{pmatrix} dv + \operatorname{div}_x \int_v f(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ \frac{|v|^2}{2} \end{pmatrix} v dv = 0,$$

on retrouve les équations d'Euler des gaz parfaits compressibles et monoatomiques en effectuant le calcul des intégrales.

6.5.2 Les équations d'Euler des fluides compressibles isentropiques

On commence par remarquer que lorsque l'équation (9) est vérifiée, on a pour toute quantité q ,

$$\partial_t(\rho q) + \operatorname{div}_x(\rho q u) = \rho(\partial_t q + u \cdot \nabla_x q).$$

On en déduit la version "non-conservative" des équations d'Euler des gaz parfaits compressibles monoatomiques :

$$\partial_t u_i + u \cdot \nabla_x u_i + \frac{\partial_{x_i}(\rho T)}{\rho} = 0,$$

$$\partial_t T + u \cdot \nabla_x T + \frac{2}{3} T \operatorname{div}_x u = 0.$$

La dernière équation est équivalente à la conservation de (l'exponentielle de) l'entropie :

$$\partial_t \left(\frac{\rho}{T^{3/2}} \right) + u \cdot \nabla_x \left(\frac{\rho}{T^{3/2}} \right) = 0.$$

On obtient donc une famille de solutions des équations d'Euler des gaz parfaits compressibles monoatomiques vérifiant $\rho = T^{3/2}$ lorsque ρ et u sont solution du système d'équations

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) = 0, \quad (15)$$

$$\partial_t u_i + u \cdot \nabla_x u_i + \frac{\partial_{x_i}(\rho^{5/2})}{\rho} = 0, \quad (16)$$

appelé système d'Euler des gaz parfaits isentropiques et monoatomiques.

On considère maintenant la famille de solutions de ces équations

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = 0, \quad (17)$$

$$\partial_t u_{i,\varepsilon} + u_\varepsilon \cdot \nabla_x u_{i,\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial_{x_i}(\rho_\varepsilon^{5/2})}{\rho_\varepsilon} = 0. \quad (18)$$

Si $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ et $u_\varepsilon \rightarrow u$, on voit que $\partial_{x_i}(\rho_\varepsilon^{5/2}) = 0$, donc $\rho(t, x) = \rho(t)$, si bien que $\rho'(t) + \operatorname{div}_x u(t, x) = 0$. Après intégration en x , on voit que $\operatorname{div}_x u = 0$, et

$$\partial_t u_{i,\varepsilon} + u_\varepsilon \cdot \nabla_x u_{i,\varepsilon} + \partial_{x_i} p = 0,$$

pour une pression p que l'on peut voir comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité. Ceci donne finalement l'équation d'Euler des fluides incompressibles.

6.5.3 Le lien avec les fonctions holomorphes

Définition : Soit $\hat{\Omega}$ un ouvert "régulier" de \mathbb{R}^3 et $\hat{u} : \mathbb{R}_+ \times \overline{\hat{\Omega}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction de classe C^1 . On note $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $\hat{u}(t, x_1, x_2, x_3) = (\hat{u}_1(t, x_1, x_2, x_3), \hat{u}_2(t, x_1, x_2, x_3), \hat{u}_3(t, x_1, x_2, x_3))$. On dit que \hat{u} vérifie les équations d'Euler "incompressibles" dans $\hat{\Omega}$ avec condition aux limite de glissement lorsqu'il existe $p : \mathbb{R}_+ \times \overline{\hat{\Omega}} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que sur $\mathbb{R}_+ \times \overline{\hat{\Omega}}$, on ait :

$$\partial_t \hat{u} + (\hat{u} \cdot \nabla_x) \hat{u} + \nabla_x p = 0, \quad (19)$$

$$\operatorname{div}_x \hat{u} = 0, \quad (20)$$

et sur $\mathbb{R}_+ \times \partial \hat{\Omega}$,

$$\hat{u}(t, x) \cdot n(x) = 0. \quad (21)$$

Dans les formules précédentes, n est la normale extérieure à $\partial\hat{\Omega}$ au point x .

Remarque : Comme on l'a vu dans les paragraphes précédents, ces équations sont celles vérifiées par un fluide incompressible et non visqueux situé dans $\hat{\Omega}$, et astreint à y rester par une frontière matérielle. Les quantités $\hat{u}(t, x)$ et $p(t, x)$ sont respectivement la vitesse et la pression du fluide au temps t et au point x .

Proposition : Soit $\hat{\Omega}$ un cylindre ($\hat{\Omega} = \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}$), où $\tilde{\Omega}$ est un ouvert "régulier" de \mathbb{R}^2 , et soit $\hat{u} : \mathbb{R}_+ \times \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la forme

$$\hat{u}(t, x_1, x_2, x_3) = (\tilde{u}_1(x_1, x_2), \tilde{u}_2(x_1, x_2), 0),$$

et vérifiant

$$\forall (x_1, x_2) \in \tilde{\Omega}, \quad \partial_1 \tilde{u}_1(x_1, x_2) + \partial_2 \tilde{u}_2(x_1, x_2) = 0, \quad (22)$$

$$\forall (x_1, x_2) \in \tilde{\Omega}, \quad \partial_1 \tilde{u}_2(x_1, x_2) - \partial_2 \tilde{u}_1(x_1, x_2) = 0, \quad (23)$$

$$\forall (x_1, x_2) \in \partial\tilde{\Omega}, \quad \tilde{u}(x_1, x_2) \cdot \tilde{n}(x_1, x_2) = 0, \quad (24)$$

où $\tilde{n}(x_1, x_2)$ est la normale extérieure à $\partial\tilde{\Omega}$ en (x_1, x_2) .

Alors \hat{u} vérifie les équations d'Euler incompressibles. Une telle solution est dite stationnaire, irrotationnelle, et à symétrie cylindrique.

Preuve : Les relations (22) et (24) entraînent clairement (20) et (21). De plus, on a $(\hat{u} \cdot \nabla_x) \hat{u}_3 = 0$, et

$$\begin{aligned} (\hat{u} \cdot \nabla_x) \hat{u}_1 &= \tilde{u}_1 \partial_1 \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \partial_2 \tilde{u}_1 \\ &= \tilde{u}_1 \partial_1 \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \partial_1 \tilde{u}_2 = \partial_1 \left(\frac{\tilde{u}_1^2}{2} + \frac{\tilde{u}_2^2}{2} \right), \\ (\hat{u} \cdot \nabla_x) \hat{u}_2 &= \tilde{u}_1 \partial_1 \tilde{u}_2 + \tilde{u}_2 \partial_2 \tilde{u}_2 \\ &= \tilde{u}_1 \partial_2 \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \partial_2 \tilde{u}_2 = \partial_2 \left(\frac{\tilde{u}_1^2}{2} + \frac{\tilde{u}_2^2}{2} \right). \end{aligned}$$

En posant $p = -\frac{|\hat{u}|^2}{2}$, on obtient (19).

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert "régulier" et $u^\perp \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. On suppose que

$$\forall z \in \partial\Omega, \quad \text{Im}(u^\perp(z) \tau(z)) = 0,$$

où $\tau(z) = \tau_1(z) + i\tau_2(z)$, et $(\tau_1(z), \tau_2(z))$ est la tangente à $\partial\tilde{\Omega}$ en z . Alors $\tilde{u}(x_1, x_2) = (\tilde{u}_1(x_1, x_2), \tilde{u}_2(x_1, x_2))$ où $\tilde{u}_1(x_1, x_2) = \text{Re}(u^\perp(x_1 + ix_2))$,

$\tilde{u}_2(x_1, x_2) = -\mathcal{I}m(u^\perp(x_1 + i x_2))$ correspond à une solution \hat{u} stationnaire, irrotationnelle et à symétrie cylindrique des équations d'Euler "incompressibles" dans l'ouvert $\hat{\Omega}$.

Preuve : Les relations de Cauchy–Riemann associées à l'holomorphic de u^\perp donnent (22) et (23). De plus,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}m(u^\perp \tau) &= \mathcal{I}m((\tilde{u}_1 - i \tilde{u}_2)(\tau_1 + i \tau_2)) \\ &= -\tilde{u}_2 \tau_1 + \tilde{u}_1 \tau_2 \\ &= \tilde{u}_1 n_1 + \tilde{u}_2 n_2 = 0,\end{aligned}$$

d'où (24).

Proposition : La fonction $u^\perp(z) = \bar{U} - U \frac{R^2}{z^2} - \frac{\gamma}{2\pi i z}$ pour $U \in \mathbb{C}, R > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses de la proposition précédente pour $\Omega = B(0, R)^c$. On obtient ainsi une infinité de solutions stationnaires, irrotationnelles et à symétrie cylindrique des équations d'Euler incompressibles autour d'un cylindre circulaire, et avec vitesse asymptotique à l'infini ($\mathcal{R}eU, \mathcal{I}mU$).

Preuve : Il est clair que u^\perp est holomorphe sur $B(0, R)^c$ et continue sur $C(0, R)$. Lorsque $|z| = R$, on a $\tau(z) = \frac{iz}{R}$ et $\frac{R}{z} = \frac{\bar{z}}{R}$, donc

$$\begin{aligned}u^\perp(z) \tau(z) &= \bar{U} \frac{iz}{R} - U \frac{iR}{z} - \frac{\gamma}{2\pi R} \\ &= \bar{U} \frac{iz}{R} - U \frac{i\bar{z}}{R} - \frac{\gamma}{2\pi R},\end{aligned}$$

et donc

$$\mathcal{I}m(u^\perp \tau) = 0.$$

Pour calculer des solutions des équations d'Euler sur le complémentaire d'un cylindre de base Ω , ouvert "régulier" et simplement connexe de \mathbb{C} , on utilise une transformation conforme K qui envoie Ω^c sur $B(0, 1)^c$ (l'utilisation de $z \mapsto 1/z$ et le théorème de Riemann montre l'existence d'une telle transformation). On a alors la famille de solutions

$$u^\perp(z) = \left(\bar{U} - U \frac{R^2}{K(z)^2} - \frac{\gamma}{2\pi i K(z)} \right) K'(z).$$

La condition au bord est préservée du fait de la conservation des angles dans une transformation conforme.

On utilise en particulier la réciproque de la "fonction de Joukowski" $z \mapsto \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$. Cette fonction envoie pour certaines valeurs de a et R le disque $B(0, R)$ sur une ellipse d'excentricité quelconque, mais également sur des ouverts ayant des formes proches de sections d'ailes d'avion.

7 Produits infinis de fonctions holomorphes

7.1 Produits infinis

Définition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de \mathbb{C}^* . On dit que $\prod_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge si la suite $\prod_{n=1}^p u_n$ converge vers une limite *non nulle*. On note alors $\prod_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ pour $\lim_{p \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^p u_n$. Lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de \mathbb{C} dont l'un des éléments est nul, on note (parfois) $\prod_{n \in \mathbb{N}^*} u_n = 0$. On a donc, chaque fois que cela a un sens, $\prod_{n \in \mathbb{N}^*} u_n = 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$.

Proposition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de \mathbb{C}^* telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n - 1| < +\infty$. Alors $\prod_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge. On dit dans ce cas qu'il y a convergence absolue du produit infini.

Preuve : Comme $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n - 1| < +\infty$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. On peut donc considérer $n_0 > 0$ tel que lorsque $n \geq n_0$, alors $|u_n - 1| < 1/2$. On écrit (pour $p \geq n_0$)

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^p u_n &= \left(\prod_{n=1}^{n_0} u_n \right) \left(\prod_{n=n_0+1}^p e^{\log u_n} \right) \\ &= \left(\prod_{n=1}^{n_0} u_n \right) \left(e^{\sum_{n=n_0+1}^p \log u_n} \right), \end{aligned}$$

où \log est la détermination principale du logarithme (on a $|u_n - 1| < 1/2$ pour $n \geq n_0$).

Or $\log u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1$, et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n - 1| < +\infty$, donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \log u_n$ converge (absolument), ce qui permet de conclure.

7.2 Produits infinis et holomorphicité

Proposition : Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω . On suppose que pour tout compact K de Ω , on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sup_{z \in K} |u_n(z) - 1| \right) < +\infty.$$

On dit parfois qu'on a un produit absolument uniformément convergent (ou normalement convergent) sur les compacts.

Alors la quantité $\prod_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(z)$ est convergente (ou nulle) pour tout $z \in \Omega$ et la fonction f définie par

$$f(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(z)$$

est holomorphe sur Ω . De plus,

$$f(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, u_n(z) = 0,$$

et

$$\forall z \in \Omega - f^{-1}(\{0\}), \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u'_n(z)}{u_n(z)},$$

avec convergence uniforme de la série sur tout compact de $\Omega - f^{-1}(\{0\})$.

Preuve : Soit U un ouvert de Ω tel que \bar{U} est compact dans Ω . D'après l'hypothèse, il existe $n_0 > 0$ tel que lorsque $n \geq n_0$, alors $\sup_{z \in \bar{U}} |u_n(z) - 1| < 1/2$. On écrit (pour $p \geq n_0$)

$$\prod_{n=1}^p u_n(z) = \left(\prod_{n=1}^{n_0} u_n(z) \right) \left(e^{\sum_{n=n_0+1}^p \log u_n(z)} \right).$$

Comme $z \in B(1, 1/2) \mapsto \left| \frac{\log z}{z-1} \right|$ est bornée supérieurement et inférieurement par des constantes strictement positives, on voit que $\prod_{n=1}^p u_n(z)$ converge uniformément sur \bar{U} , donc f est holomorphe sur U . On en déduit que f est holomorphe sur Ω .

Pour chaque $z \in \Omega$, on peut trouver U ouvert de Ω tel que \bar{U} est compact dans Ω , et $z \in U$. On voit alors que $f(z) = 0$ si et seulement s'il existe $n \in [1, n_0]$ tel que $u_n(z) = 0$. Finalement,

$$f(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, u_n(z) = 0.$$

Enfin, si l'on pose $g_U(z) = \prod_{n=1}^{n_0} u_n(z)$, et $h_U(z) = e^{\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \log u_n(z)}$, il est clair (en utilisant la convergence uniforme sur \bar{U} de la série de terme général $\log u_n(z)$) que

$$\forall z \in U, \quad \frac{h'_U(z)}{h_U(z)} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{u'_n(z)}{u_n(z)},$$

avec convergence uniforme sur \bar{U} . On conclut en remarquant que sur $\Omega - f^{-1}(\{0\})$,

$$\frac{g'_U(z)}{g_U(z)} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{u'_n(z)}{u_n(z)}.$$

7.3 Exemples de produits de Weierstrass

Définition : Pour $p \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathbb{C}$, on définit le facteur de Weierstrass $W(p, u)$ par

$$W(p, u) = (1 - u) e^{\sum_{j=1}^{p-1} \frac{u^j}{j}}.$$

Proposition : Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de \mathbb{C} telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$. Alors il existe une fonction entière f qui s'annule exactement en les points de cette suite (avec une multiplicité au point z correspondant au nombre de $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $z = z_n$).

Preuve : On pose $p_n = 1$ lorsque $|z_n| \leq 2$ et $p_n = \lfloor \frac{4 \log n}{\log |z_n|} \rfloor + 1$ lorsque $|z_n| > 2$. On voit alors que

$$|z_n| > 2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{|z_n|}} \right)^{p_n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

On pose

$$f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} W(p_n, \frac{z}{z_n}).$$

Lorsque $|u| \leq 1/2$, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=p}^{+\infty} \frac{u^j}{j} \right| &= |u|^p \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k+p} \right| \\ &\leq |u|^p \sum_{k=0}^{+\infty} (1/2)^k \leq 2|u|^p. \end{aligned}$$

Donc (lorsque $|u| \leq 1/2$),

$$\begin{aligned} |W(p, u) - 1| &= |e^{\log(1-u) + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{u^j}{j}}| \\ &= |e^{-\sum_{j=p}^{+\infty} \frac{u^j}{j}} - 1| \leq 2e|u|^p. \end{aligned}$$

On utilise l'estimation précédente pour $|z| \leq r$ et $|z_n| \geq \sup(2, 2r, r^2)$. On obtient

$$|W(p_n, \frac{z}{z_n}) - 1| \leq 2e \left(\frac{1}{\sqrt{|z_n|}} \right)^{p_n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{|z| \leq r} |W(p_n, \frac{z}{z_n}) - 1|$ converge. On en déduit que la fonction f convient.

Proposition : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

Preuve : On commence par observer que le produit définit bien une fonction holomorphe car il converge absolument uniformément sur tous les compacts de \mathbb{C} . De plus, comme $z \mapsto \sin(\pi z)$, la fonction définie par le produit s'annule

exactement sur \mathbb{Z} (avec des zéros simples). On considère alors $r > 2$, et on estime

$$\begin{aligned}
& \sup_{|z|=r} \left| \frac{\sin(\pi z)}{\pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} \right| \\
& \leq \sup_{|z|=r} \left| \frac{\sin(\pi z)}{\pi z \prod_{n=1}^{[2r]} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} \right| \times \sup_{|z|=r} \left| \prod_{n=[2r]+1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2}} \right| \\
& \leq \sup_{|z|=4r} \left| \frac{\sin(\pi z)}{\pi z \prod_{n=1}^{[2r]} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} \right| \times \sup_{|z|=r} \left| \prod_{n=[2r]+1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2}}\right) \right| \\
& \leq \sup_{|z|=4r} \left| \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} \left(\prod_{n=1}^{[2r]} n^2 \right) \prod_{n=1}^{[2r]} \frac{1}{|z^2 - n^2|} \right| \times \sup_{|z|=r} \prod_{n=[2r]+1}^{+\infty} \left(1 + 2 \frac{|z|^2}{n^2}\right) \\
& \leq \frac{1}{4\pi r} \sup_{|z|=4r} |e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}| ([2r]^2)^{[2r]} \prod_{n=1}^{[2r]} \frac{1}{|z|^2 - n^2} \sup_{|z|=r} \prod_{n=[2r]+1}^{+\infty} e^{2 \frac{|z|^2}{n^2}} \\
& \leq \frac{2}{4\pi r} e^{4\pi r} (2r)^{4r} e^{\sum_{n=[2r]+1}^{+\infty} 2 \frac{|z|^2}{n^2}} \\
& \leq \frac{1}{2\pi} e^{4\pi r + 4r \log(2r) + \frac{1}{3}\pi^2 r^2}.
\end{aligned}$$

La fonction $g(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}$ est donc entière, vaut 1 en 0, elle ne s'annule pas, et il existe $K_1 > 1$, $K_2 \geq 0$, tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |g(z)| \leq K_1 e^{K_2 |z|^2}.$$

Comme \mathbb{C} est simplement connexe, on peut trouver h entière telle que $g = e^h$, $h(0) = 0$, et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} h(z) \leq \log K_1 + K_2 |z|^2.$$

On considère $R > 0$. Si $|z| \leq R$, $\operatorname{Re} h(z) \leq \log K_1 + K_2 R^2$. Donc

$$\forall |z| \leq R, \quad \left| \frac{h(z)}{h(z) - 2(\log K_1 + K_2 R^2)} \right| \leq 1.$$

D'après le lemme de Schwarz,

$$\forall |z| \leq R, \quad |h(z)| \leq \frac{|z|}{R} (|h(z) - 2(\log K_1 + K_2 R^2)|),$$

et

$$\forall |z| \leq R/2, \quad |h(z)| \leq \frac{1}{2} (|h(z)| + 2(\log K_1 + K_2 R^2)).$$

Finalement,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |h(z)| \leq 2 \log K_1 + 8 K_2 |z|^2.$$

On en déduit que h est un polynôme de degré au plus deux (Cf. exercice après le théorème de Liouville), si bien que l'on peut trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) e^{\alpha + \beta z + \gamma z^2}.$$

On conclut en étudiant le développement à l'ordre 2 en 0 des fonctions $z \mapsto \sin(\pi z)$ et $z \mapsto \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$.

8 Les sommes de Gauss et la loi de réciprocité quadratique

8.1 Réciprocité pour les sommes de Gauss

Définition : Soit $a, m \in \mathbb{N}^*$, tels que $a m$ est pair. On note $S(a, m)$ la somme (dite de Gauss)

$$S(a, m) = \sum_{r=0}^{m-1} e^{\pi i \frac{a}{m} r^2}.$$

Lemme : on a l'identité

$$S(a, m) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-\frac{1}{2} - R e^{i\pi/4}, -\frac{1}{2} + R e^{i\pi/4}]} e^{\pi i \frac{a}{m} z^2} \left(\sum_{n=0}^{a-1} e^{2\pi i n z} \right) dz.$$

Preuve : On note

$$f(z) = \frac{\sum_{r=0}^{m-1} e^{\pi i \frac{a}{m} (z+r)^2}}{e^{2\pi i z} - 1},$$

et $\Gamma = [-\frac{1}{2} - R e^{i\pi/4}, \frac{1}{2} - R e^{i\pi/4}] + [\frac{1}{2} - R e^{i\pi/4}, \frac{1}{2} + R e^{i\pi/4}] - [-\frac{1}{2} + R e^{i\pi/4}, \frac{1}{2} + R e^{i\pi/4}] - [-\frac{1}{2} - R e^{i\pi/4}, -\frac{1}{2} + R e^{i\pi/4}]$. Comme $z \mapsto e^{2\pi i z} - 1$ ne s'annule que sur \mathbb{Z} , on a d'après le théorème des résidus :

$$\begin{aligned} S(a, m) &= 2\pi i \operatorname{Res}_0(f) = \int_{\Gamma} f \\ &= \int_{[-\frac{1}{2} - R e^{i\pi/4}, -\frac{1}{2} + R e^{i\pi/4}]} (f(z+1) - f(z)) dz + \int_{[-\frac{1}{2} - R e^{i\pi/4}, \frac{1}{2} - R e^{i\pi/4}]} f(z) dz \\ &\quad - \int_{[-\frac{1}{2} + R e^{i\pi/4}, \frac{1}{2} + R e^{i\pi/4}]} f(z) dz. \end{aligned}$$

On observe alors que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-1/2}^{1/2} f(t \pm R e^{i\pi/4}) dt \right| \\ & \leq \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sum_{r=0}^{m-1} |e^{\pi i \frac{a}{m} (t+r \pm R e^{i\pi/4})^2}|}{|e^{2\pi i (t \pm R e^{i\pi/4})} - 1|} dt. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} |e^{\pi i \frac{a}{m} (t+r \pm R e^{i\pi/4})^2}| & \leq e^{\pi \frac{a}{m} (-R^2 \pm \sqrt{2} (t+r) R)} \\ & \leq e^{\pi \frac{a}{m} (-R^2 + \sqrt{2} (\frac{1}{2} + r) R)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i (t \pm R e^{i\pi/4})} - 1| & \geq ||e^{2\pi i (t \pm R \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i R \frac{\sqrt{2}}{2})} - 1| \\ & \geq 1 - e^{-\pi R \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$S(a, m) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-\frac{1}{2} - R e^{i\pi/4}, -\frac{1}{2} + R e^{i\pi/4}]} (f(z+1) - f(z)) dz.$$

Mais du fait de la parité de $a m$,

$$\begin{aligned} (f(z+1) - f(z)) (e^{2\pi i z} - 1) & = \sum_{r=0}^{m-1} \left(e^{\pi i \frac{a}{m} (z+1+r)^2} - e^{\pi i \frac{a}{m} (z+r)^2} \right) \\ & = e^{\pi i \frac{a}{m} (z+m)^2} - e^{\pi i \frac{a}{m} z^2} \\ & = e^{\pi i \frac{a}{m} z^2} \left(e^{2\pi i a z} - 1 \right) \\ & = e^{\pi i \frac{a}{m} z^2} \left(e^{2\pi i z} - 1 \right) \sum_{n=0}^{a-1} e^{2\pi i n z}, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Lemme : On a l'identité :

$$S(a, m) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R e^{i\pi/4}, R e^{i\pi/4}]} e^{\pi i \frac{a}{m} z^2} \left(\sum_{n=0}^{a-1} e^{2\pi i n z} \right) dz.$$

Preuve : Comme la fonction $z \mapsto e^{\pi i \frac{a}{m} z^2} \left(\sum_{n=0}^{a-1} e^{2\pi i n z} \right)$ est entière, il suffit de vérifier que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-\frac{1}{2} \pm R e^{i\pi/4}, \pm R e^{i\pi/4}]} e^{\pi i \frac{a}{m} z^2} \left(\sum_{n=0}^{a-1} e^{2\pi i n z} \right) dz.$$

On procède de la même manière qu'au lemme précédent.

Lemme : On a l'identité :

$$S(a, m) = \sum_{n=0}^{a-1} e^{-\pi i \frac{m}{a} n^2} \sqrt{\frac{m}{a}} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R e^{i\pi/4}, R e^{i\pi/4}]} e^{\pi i z^2} dz.$$

Preuve : On observe que

$$e^{\pi i \frac{a}{m} z^2 + 2\pi i n z} = e^{-\pi i \frac{m}{a} n^2} e^{\pi i \frac{a}{m} (z + \frac{m n}{a})^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \int_{[-R e^{i\pi/4}, R e^{i\pi/4}]} e^{\pi i \frac{a}{m} z^2} \left(\sum_{n=0}^{a-1} e^{2\pi i n z} \right) dz \\ &= \sum_{n=0}^{a-1} e^{-\pi i \frac{m}{a} n^2} \int_{[-R e^{i\pi/4}, R e^{i\pi/4}]} e^{\pi i \frac{a}{m} (z + \frac{m n}{a})^2} dz \\ &= \sum_{n=0}^{a-1} e^{-\pi i \frac{m}{a} n^2} \sqrt{\frac{m}{a}} \int_{[-R \sqrt{\frac{a}{m}} e^{i\pi/4}, R \sqrt{\frac{a}{m}} e^{i\pi/4}]} e^{\pi i (z + \sqrt{\frac{m}{a}} n)^2} dz. \end{aligned}$$

Comme $z \mapsto e^{\pi i (z + \sqrt{\frac{m}{a}} n)^2}$ est entière, on conclut en observant que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-\sqrt{\frac{m}{a}} n \pm R \sqrt{\frac{a}{m}} e^{i\pi/4}, \pm R \sqrt{\frac{a}{m}} e^{i\pi/4}]} e^{\pi i z^2} dz = 0.$$

Proposition : On a l'identité de réciprocity suivante : lorsque $a, m \in \mathbb{N}^*$, et $a m$ est pair,

$$S(a, m) = \sqrt{\frac{m}{a}} \overline{S(m, a)} \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Preuve : D'après les lemmes précédents, on voit que

$$S(a, m) = \sqrt{\frac{m}{a}} \overline{S(m, a)} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R e^{i\pi/4}, +R e^{i\pi/4}]} e^{\pi i z^2} dz.$$

Mais $S(1, 2) = 1 + i$ et $S(2, 1) = 1$, ce qui permet de conclure.

Corollaire : Pour $m, n \in \mathbb{N}_*$, on note $G(n, m)$ la somme (également dite de Gauss)

$$G(n, m) = \sum_{r=1}^m e^{2\pi i \frac{n}{m} r^2}.$$

On a alors

$$G(1, m) = \begin{cases} \sqrt{m} & \text{si } m \equiv 1[4] \\ 0 & \text{si } m \equiv 2[4] \\ i\sqrt{m} & \text{si } m \equiv 3[4] \\ (1+i)\sqrt{m} & \text{si } m \equiv 0[4] \end{cases}$$

En particulier, lorsque m est impair, on en déduit que

$$G(1, m) = i^{\frac{1}{4}(m-1)^2} \sqrt{m}.$$

Preuve : On voit que $G(1, m) = S(2, m)$. Comme d'autre part (car $2m$ est pair) $S(2, m) = \sqrt{\frac{m}{2}} S(m, 2) \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, et $S(m, 2) = 1 + e^{\pi i \frac{m}{2}}$, on voit que

$$G(1, m) = \sqrt{\frac{m}{2}} (1 + e^{-\pi i \frac{m}{2}}) \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

On conclut en examinant chaque cas.

8.2 La loi de réciprocité quadratique

On rappelle la définition du symbole de Legendre $(p|q)$ (pour q premier impair). On considère l'homomorphisme ψ du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ qui à r associe r^2 . Comme son noyau est formé de $\{\pm 1\}$, le cardinal de l'image de ψ est $\frac{q-1}{2}$. On définit $\mathcal{A}_q = \text{Im}(\psi)$, et $\mathcal{B}_q = \text{Im}(\psi)^c$.

Lorsque $p \in \mathcal{A}_q$, on pose $(p|q) = 1$, et lorsque $p \in \mathcal{B}_q$, on pose $(p|q) = -1$. Enfin quand $p = 0$, on pose $(p|q) = 0$.

Ceci définit le symbole de Legendre pour $p \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. On le définit pour $p \in \mathbb{Z}$ en considérant le symbole de Legendre de son réduit modulo q .

Proposition : Soit q premier impair. On a pour $p \in \mathbb{N}_*$,

$$G(p, q) = \begin{cases} 1 + 2 \sum_{\theta \in \mathcal{A}_q} e^{2\pi i \theta / q} & \text{si } (p|q) = 1 \\ 1 + 2 \sum_{\theta \in \mathcal{B}_q} e^{2\pi i \theta / q} & \text{si } (p|q) = -1 \end{cases}$$

Preuve : On observe tout d'abord que

$$G(p, q) = \sum_{r \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} e^{2\pi i \frac{p}{q} r^2}.$$

Il suffit de vérifier que lorsque $(p|q) = 1$, les pr^2 avec $r \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ parcourent \mathcal{A}_q exactement deux fois, et que lorsque $(p|q) = -1$, les pr^2 avec $r \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ parcourent \mathcal{B}_q exactement deux fois. C'est clair car $pr_1^2 = pr_2^2 \Rightarrow r_1 = \pm r_2$.

Corollaire : Pour p, q premiers impairs distincts,

$$G(p, q) = (p|q) G(1, q).$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} 2 + 2 \sum_{\theta \in \mathcal{A}_q} e^{2\pi i \theta / q} + 2 \sum_{\theta \in \mathcal{B}_q} e^{2\pi i \theta / q} &= 2 \sum_{s \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} e^{2\pi i \frac{s}{q}} \\ &= 2 \frac{e^{2\pi i} - 1}{e^{2\pi i / q} - 1} = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\left(1 + 2 \sum_{\theta \in \mathcal{A}_q} e^{2\pi i \theta / q}\right) + \left(1 + 2 \sum_{\theta \in \mathcal{B}_q} e^{2\pi i \theta / q}\right) = 0,$$

ce qui permet de conclure, selon que $(p|q) = 1$ ou -1 .

Proposition : Pour p, q premiers impairs distincts,

$$G(1, pq) = G(p, q) G(q, p).$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} G(p, q) G(q, p) &= \sum_{r=1}^q \sum_{r'=1}^p e^{2\pi i \left(\frac{p}{q} r^2 + \frac{q}{p} r'^2\right)} \\ &= \sum_{r=1}^q \sum_{r'=1}^p e^{2\pi i \frac{p^2 r^2 + q^2 r'^2 + 2pq r r'}{pq}} \\ &= \sum_{r=1}^q \sum_{r'=1}^p e^{2\pi i \frac{(p r + q r')^2}{pq}}. \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que l'application de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/(pq)\mathbb{Z}$ qui à (r, r') associe $pr + qr'$ est un isomorphisme de groupes.

Corollaire (loi de réciprocité quadratique) : Pour p, q premiers impairs distincts,

$$(p|q) (q|p) = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)(q-1)}.$$

Preuve : On sait que d'une part

$$G(1, pq) = i^{\frac{1}{4}(pq-1)^2} \sqrt{pq},$$

et que d'autre part

$$\begin{aligned} G(1, pq) &= G(p, q) G(q, p) \\ &= (p|q) (q|p) G(1, p) G(1, q) \\ &= (p|q) (q|p) i^{\frac{1}{4}(p-1)^2 + \frac{1}{4}(q-1)^2} \sqrt{pq}. \end{aligned}$$

Finalement, selon que p et q sont congrus à 1 ou 3 modulo 4, on vérifie que

$$i^{\frac{1}{4}(pq-1)^2 - \frac{1}{4}(p-1)^2 - \frac{1}{4}(q-1)^2} = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)(q-1)}.$$

9 Le théorème des nombres premiers

9.1 Estimations grossières

Définition : On note $\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{N}^*, p \text{ premier}\}$, et pour $x > 0$, $\pi(x) = \sum_{p \leq x, p \in \mathcal{P}} 1$ (dans ce cours, on conviendra que 1 n'est pas premier).

Proposition : On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi(x) = +\infty$ et $\pi(x) = O_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\log x} \right)$.

Preuve : Si \mathcal{P} était fini, on aurait $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$, avec $p_1 < \dots < p_n$. Mais alors $p_{n+1} = 1 + \prod_{i=1}^n p_i$ est dans \mathcal{P} et $p_{n+1} > p_n$, ce qui est contradictoire. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pi(x) = +\infty$.

On remarque que

$$\prod_{p \in \mathcal{P}, n < p \leq 2n} p \mid C_{2n}^n.$$

En effet, on voit facilement que

$$\prod_{p \in \mathcal{P}, n < p \leq 2n} p \mid (2n) \dots (n+1)$$

et que

$$\prod_{p \in \mathcal{P}, n < p \leq 2n} p \wedge (n!) = 1.$$

Mais comme

$$\prod_{p \in \mathcal{P}, n < p \leq 2n} p \geq \prod_{p \in \mathcal{P}, n < p \leq 2n} n \geq n^{\pi(2n) - \pi(n)},$$

on obtient

$$\pi(2n) - \pi(n) \leq \frac{\log \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2} \right)}{\log n}.$$

En notant $u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, on voit que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 4 \frac{n+1/2}{n+1}$, d'où $\log u_{n+1} \leq \log u_n + \log 4$ et $\log u_n \leq n \log 4$.

On en déduit que $\pi(2n) - \pi(n) = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$, puis que $\pi(n) = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$. En effet,

$$\begin{aligned} \pi(2^k) &\leq C \left(\frac{2^k}{k} + \frac{2^{k-1}}{k-1} + \dots + 2 + 1 \right) \\ &\leq 2C \left(\frac{2^k}{k} + \dots + \frac{2^{k/2}}{k} \right) + C \left(2^{k/2-1} + \dots + 2 + 1 \right) \\ &\leq 4C \frac{2^k}{k} + C 2^{k/2}. \end{aligned}$$

9.2 La fonction ζ et les nombres premiers

Définition : Pour $\Re s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$. Il s'agit donc d'une série de Dirichlet à coefficients positifs.

Proposition : l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet définissant la fonction ζ est 1. La fonction ζ est donc holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, \Re z > 1\}$.

Proposition : Pour $\Re s > 1$, on a $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$, Le produit infini convergeant absolument uniformément sur tout compact de $\{s \in \mathbb{C}, \Re s > 1\}$.

Preuve : On remarque que

$$\begin{aligned} |1 - (1 - p^{-s})^{-1}| &\leq \frac{|p^{-s}|}{|1 - p^{-s}|} \\ &\leq 2p^{-\Re s}, \end{aligned}$$

donc pour tout compact K de $\{s \in \mathbb{C}, \Re s > 1\}$,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \sup_{s \in K} |1 - (1 - p^{-s})^{-1}| < +\infty.$$

De plus, on a

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} p^{-ks} \right),$$

et en notant $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ avec $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, on voit que

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{k_2=0}^{+\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{+\infty} (p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n} \dots)^{-s} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}.$$

Proposition : La fonction ζ ne s'annule pas sur $\{s \in \mathbb{C}, \Re s > 1\}$. La fonction $s \mapsto \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C}, \Re s > 1\}$, et égale à la série de Dirichlet

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n \in \mathbb{N}_*} \frac{\Lambda_n}{n^s},$$

où $\Lambda_n = 0$ si n n'est pas une puissance de nombre premier, et $\Lambda_n = \log p$ si $n = p^l$ (avec p premier, $l \in \mathbb{N}^*$).

Preuve : Comme $(1 - p^{-s})^{-1} \neq 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}$ et que le produit converge, on voit que $\zeta(s) \neq 0$.

On sait que l'on peut alors prendre la dérivée logarithmique du produit infini :

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{p \in \mathcal{P}} -\frac{p^{-s} \log p}{1 - p^{-s}} \\ &= - \sum_{p \in \mathcal{P}} \log p \sum_{l=1}^{+\infty} (p^{-l})^s \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\Lambda_n}{n^s}.\end{aligned}$$

9.3 Etude de ζ et ζ'/ζ au voisinage de $\mathcal{R}es = 1$

Proposition : Pour $\mathcal{R}es > 1$, on a $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{x-[x]}{x^{s+1}} dx$. La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\{s \in \mathbb{C}, \mathcal{R}es > 0\}$. Son unique pôle est situé en $s = 1$ (la fonction $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C}, \mathcal{R}es > 0\}$).

Preuve : Une transformation d'Abel montre que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^q \frac{1}{n^s} &= - \sum_{n=1}^q n ((n+1)^{-s} - n^{-s}) + q(q+1)^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^q ns \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{s+1}} + \frac{q}{(q+1)^s} \\ &= \int_1^{q+1} s \frac{[x]-x}{x^{s+1}} dx + \frac{s}{s-1} [1 - (q+1)^{-s+1}] + \frac{q}{(q+1)^s}.\end{aligned}$$

On obtient alors l'identité demandée en faisant tendre $q \rightarrow +\infty$.

Proposition : La fonction ζ n'a pas de zéros pour $\mathcal{R}es = 1$.

Preuve : On considère $s = \sigma + i\tau$, avec $\tau \in \mathbb{R}, \sigma > 1$. On a l'identité

$$\begin{aligned}\log |\zeta(s)| &= \log \left| \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1} \right| \\ &= - \sum_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{R}e \left[\log(1 - p^{-s}) \right]\end{aligned}$$

(où \log désigne la détermination principale du logarithme). Donc

$$\log |\zeta(s)| = \mathcal{R}e \left[\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^{-sk}}{k} \right]$$

$$= \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^{-\sigma k}}{k} \cos(\tau k \log p).$$

Supposons maintenant (par l'absurde) que ζ ait un zéro d'ordre r en $1 + i\tau$.
On peut alors écrire (pour $c \neq 0$)

$$\zeta(\sigma + i\tau) = c(\sigma - 1)^r + O_{\sigma \rightarrow 1, \sigma > 1, \sigma \in \mathbb{R}}(|\sigma - 1|^{r+1}),$$

et on a de toute façon

$$\zeta(\sigma) = (\sigma - 1)^{-1} + O_{\sigma \rightarrow 1, \sigma > 1, \sigma \in \mathbb{R}}(1).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} 3 \log |\zeta(\sigma)| + 4 \log |\zeta(\sigma + i\tau)| &= (4r - 3) \log(\sigma - 1) \\ &+ o_{\sigma \rightarrow 1, \sigma > 1, \sigma \in \mathbb{R}}(\log(\sigma - 1)) \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} &3 \log |\zeta(\sigma)| + 4 \log |\zeta(\sigma + i\tau)| + \log |\zeta(\sigma + 2i\tau)| \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^{-\sigma k}}{k} \left[3 + 4 \cos(\tau k \log p) + \cos(2\tau k \log p) \right] \\ &= 2 \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^{-\sigma k}}{k} (1 + \cos(\tau k \log p))^2 \geq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que nécessairement,

$$\log |\zeta(\sigma + 2i\tau)| \rightarrow_{\sigma \rightarrow 1, \sigma > 1, \sigma \in \mathbb{R}} +\infty.$$

Or ceci est impossible car ζ n'a pas de pôle autre que 1 dans $\{s \in \mathbb{C}, \Re s \geq 0\}$.

Corollaire : La fonction $-\zeta'/\zeta$ se prolonge en une fonction continue sur $\{s \in \mathbb{C}, \Re s = 1\} - \{1\}$. En fait, $-\zeta'(s)/\zeta(s) = 1/(s-1) + \phi(s)$, où ϕ est holomorphe sur un ouvert contenant la droite $\{s \in \mathbb{C}, \Re s = 1\}$.

9.4 Prolongement de ζ sur \mathbb{C}

Lemme : On définit la fonction θ de Jacobi sur \mathbb{R} par

$$\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

Alors pour tout $t > 0$,

$$\theta(1/t) = \sqrt{t} \theta(t).$$

Preuve : On pose pour $u > 0$:

$$F_u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-u(2n\pi+x)^2}.$$

La fonction F_u est C^∞ et 2π -périodique. D'après le théorème de synthèse des séries de Fourier (Dirichlet par exemple), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{ipx} \int_0^{2\pi} e^{-ipy} F_u(y) dy.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \theta(4\pi u) = F_u(0) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-ipy} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-u(2n\pi+y)^2} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^{-ip(x-2n\pi)-ux^2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx-ux^2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2u}} \mathcal{F}(y \mapsto e^{-y^2}) \left(\frac{p}{\sqrt{2u}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi u}} \theta \left(\frac{1}{4\pi u} \right). \end{aligned}$$

On conclut en posant $t = 4\pi u$.

Proposition : Pour $\Re s > 2$,

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\theta(t) - 1}{2} t^{s/2-1} dt.$$

Preuve : On calcule

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\theta(t) - 1}{2} t^{s/2-1} dt &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{\pi n^2} \right)^{s/2} \frac{du}{u} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \pi^{-s/2} n^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

Proposition : Pour $\Re s > 2$,

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\theta(t) - 1}{2} (t^{s/2} + t^{(1-s)/2}) \frac{dt}{t} + \frac{1}{s(s-1)}.$$

Preuve : On calcule

$$\begin{aligned} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{\theta(t) - 1}{2} t^{s/2-1} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\theta(t) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty} \frac{\theta(1/u) - 1}{2} u^{-s/2} \frac{du}{u} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\theta(t) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{u} \theta(u) - 1}{2} u^{-s/2} \frac{du}{u} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\theta(t) - 1}{2} \left\{ t^{s/2} + t^{(1-s)/2} \right\} \frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{u}} \right) u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} du. \end{aligned}$$

Corollaire : La fonction $\Lambda : s \mapsto \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} dont les seuls pôles sont en 0 et 1, et qui vérifie

$$\forall s \in \mathbb{C} - \{0, 1\}, \quad \Lambda(s) = \Lambda(1-s).$$

Preuve : On voit qu'on peut prolonger pour $\Re s > 0$ la formule précédente. Comme elle a un sens pour tout $s \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$, et qu'elle est clairement invariante par la transformation $s \mapsto 1-s$, elle permet de définir la fonction méromorphe $s \mapsto \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$.

Corollaire : La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} dont le seul pôle est en $s = 1$. Les seuls zéros de ζ dans $\{s \in \mathbb{C}, \Re s \notin]0, 1[\}$ sont les $-2n, n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve : Pour $\Re s \leq 0$, on pose

$$\zeta(s) = \pi^{s-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s).$$

Comme Γ n'a pas de zéros dans \mathbb{C} , et ζ n'a pas de zéros dans $\{s \in \mathbb{C}, \Re s \geq 1\}$, les seuls zéros de ζ (de partie réelle négative) correspondent aux pôles de Γ .

De plus, comme Γ n'a pas de pôles dans $\{s \in \mathbb{C}, \Re s \geq 1\}$, le seul pôle de ζ dans \mathbb{C} est en 1.

Les exercices suivants donnent d'autres méthodes de prolongement de ζ à \mathbb{C} tout entier :

Exercice : On se donne a priori la fonction ζ définie pour $\Re z > 1$ par la série habituelle.

1) On considère la fonction $f_z : w \mapsto \pi w^{-z} \cotan(\pi w)$ (ou w^{-z} est la détermination de la puissance $-z$ -ième de w) et le rectangle (fermé plein) Γ_n de sommets $(n + \frac{1}{2})(1 - i)$, $(n + \frac{1}{2})(1 + i)$, $\frac{1}{2} + (n + \frac{1}{2})i$ et $\frac{1}{2} - (n + \frac{1}{2})i$. Montrer que

$$2i\pi \sum_{k=1}^n k^{-z} = \int_{\partial\Gamma_n} f_z,$$

le bord de Γ_n étant orienté dans le sens positif.

2) Montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$d(w, \mathbb{Z}) \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |\cotan(\pi w)| \leq C.$$

En déduire que pour $w \in \partial\Gamma_n - [\frac{1}{2} - (n + \frac{1}{2})i, \frac{1}{2} + (n + \frac{1}{2})i]$, on a

$$|f_z(w)| \leq \pi C \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-\Re z} e^{\pi |\Im z|}.$$

3) Montrer que pour $\Re z > 1$,

$$2i\pi \sum_{k=1}^n k^{-z} = -i \int_{-(n+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} \pi \left(\frac{1}{2} + it\right)^{-z} \cotan\left(\frac{\pi}{2} + i\pi t\right) dt + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

En déduire que

$$\zeta(z) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh(\pi t)}{\left(\frac{1}{4} + t^2\right)^{z/2}} e^{-iz \arctan(2t)} dt.$$

4) Montrer que pour $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, on a l'égalité

$$\int_0^{\pi/2} \sin(z\phi) (\cos\phi)^{z-2} d\phi = \frac{1}{z-1}.$$

5) En utilisant le changement de variables $t = \frac{1}{2} \tan\phi$ et la formule $\tanh w = 1 - 2(1 + e^{2w})^{-1}$, montrer que pour $\Re z > 1$,

$$\zeta(z) = \frac{2^{z-1}}{z-1} - 2^z \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(z\phi) (\cos\phi)^{z-2}}{1 + e^{\pi \tan\phi}} d\phi.$$

6) Montrer que ζ peut se prolonger en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , dont l'unique pôle est situé en 1.

Exercice : On se donne de nouveau la fonction ζ définie pour $\Re z > 1$ par la série habituelle.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re z > 1$, on a

$$\frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} e^{-nu} u^{z-1} du.$$

En déduire que (pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re z > 1$)

$$\Gamma(z) \zeta(z) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} du.$$

2. On définit la suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation

$$\frac{u}{e^u - 1} = \sum_{n=0}^k \frac{\beta_n}{n!} u^n + o_{u \rightarrow 0}(u^k).$$

Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n!} u^n.$$

3. Montrer que (pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re z > 1$)

$$\Gamma(z) \zeta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{(n+z-1)n!} + \int_1^{+\infty} \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} du.$$

4. En déduire que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} .

9.5 Etude asymptotique des Λ_n

On va donner une suite de lemmes qui permet d'utiliser l'information sur les zéros de la fonction ζ de Riemann.

On commence par rappeler que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont les dérivées de n'importe quel ordre décroissent aussi vite que n'importe quelles puissances négatives en $\pm\infty$. Cet espace est muni des semi-normes

$$\|f\|_{p,q} = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)^p |f^{(q)}(x)|$$

pour $p, q \in \mathbb{N}$. Il est stable pour la transformée de Fourier et dense pour la norme $\|\cdot\|_{L^1}$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

Lemme : Toute fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est limite (pour la norme $\|\cdot\|_{L^1}$) de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact.

Preuve : Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\chi_n \phi \rightarrow \phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, lorsque χ_n est une suite de fonctions de C^∞ qui vaut 1 sur $[-n, n]$, 0 en dehors de $]-n+1, n+1[$, et dont les dérivées de n'importe quel ordre sont bornées. La transformée de Fourier inverse de $\chi_n \phi$ converge alors vers la transformée de Fourier inverse de ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donc toute fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est limite (pour les semi-normes $\|\cdot\|_{p,q}$) de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact. Il suffit alors pour conclure de remarquer que toute fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est limite (pour la norme $\|\cdot\|_{L^1}$) de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et que les semi-normes $\|\cdot\|_{p,q}$ sont plus fortes que la norme $\|\cdot\|_{L^1}$.

Lemme : Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et $F : s \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-(s-1)t} \phi(t) dt$. On suppose que $F \in \mathcal{H}(\{z, \operatorname{Re} z > 1\})$ et que F se prolonge en une fonction $F^* \in \mathcal{C}(\{z, \operatorname{Re} z \geq 1\})$. Alors pour tout $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \phi(t) dt = 0.$$

Preuve : On considère $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat{g} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On remarque alors que (pour $\varepsilon > 0, x > 0$), les quantités

$$I_{\varepsilon,g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau x} \hat{g}(\tau) \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-(\varepsilon+i\tau)t} \phi(t) dt \right\} d\tau$$

et

$$J_{\varepsilon,g}(x) = 2\pi \int_0^{+\infty} \phi(t) e^{-\varepsilon t} g(x-t) dt$$

sont bien définies, puis, en vertu du théorème de Fubini, sont égales. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x > 0, \quad I_{\varepsilon,g}(x) = J_{\varepsilon,g}(x).$$

Comme ϕ est bornée et $g \in L^1$, il est clair que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{\varepsilon,g}(x) = 2\pi \int_0^{+\infty} \phi(t) g(x-t) dt.$$

De plus, comme \hat{g} a son support dans $[-R, R]$ (avec $R > 0$), on a

$$|e^{i\tau x} \hat{g}(\tau) F^*(1 + \varepsilon + i\tau)| \leq |\hat{g}(\tau)| 1_{|\tau| \leq R} \sup_{|\tau| \leq R, 0 \leq \varepsilon \leq 1} |F^*(1 + \varepsilon + i\tau)|.$$

On en déduit (à partir du théorème de convergence dominée) que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon,g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau x} \hat{g}(\tau) F^*(1 + i\tau) d\tau.$$

Comme $\tau \mapsto \hat{g}(\tau) F^*(1 + i\tau)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, on en déduit grâce au lemme de Riemann-Lebesgue que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \phi(t) g(x-t) dt = 0.$$

On approxime alors (d'après le lemme précédent) la fonction $1_{] - \alpha, \alpha[}$ par une suite de fonction $g_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat{g}_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, pour la norme $\|\cdot\|_{L^1}$.

Lemme : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}_+ vérifiant

1.
$$\sum_{n \leq x} a_n = O_{x \rightarrow +\infty}(x), \quad (1)$$

2.
$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \Psi(s), \quad (2)$$

où $\Psi \in \mathcal{H}(\{z \in \mathbb{C}, \Re z > 1\})$, et Ψ se prolonge en une fonction Ψ^* de $\mathcal{C}(\{z \in \mathbb{C}, \Re z \geq 1\})$.

Alors

$$\sum_{n \leq x} a_n \sim_{x \rightarrow +\infty} x.$$

Preuve : On considère $\phi : t \mapsto (e^{-t} \sum_{1 \leq n \leq e^t} a_n) - 1$. On voit alors que

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-1)t} \phi(t) dt = \frac{\Psi(s) + 1}{s}.$$

Donc $F \in \mathcal{H}(\{z \in \mathbb{C}, \Re z > 1\})$, et elle se prolonge en une fonction F^* de $\mathcal{C}(\{z \in \mathbb{C}, \Re z \geq 1\})$. Comme ϕ est bornée (d'après la première hypothèse du lemme), on voit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \phi(t) dt = 0.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} & \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} e^{-t} \sum_{1 \leq n \leq e^t} a_n dt \\ & \geq e^{-(x+\alpha)} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sum_{1 \leq n \leq e^{x-\alpha}} a_n dt \\ & \geq 2\alpha e^{-2\alpha} e^{-(x-\alpha)} \sum_{1 \leq n \leq e^{x-\alpha}} a_n. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$2\alpha \geq 2\alpha \limsup(e^{-t} \sum_{1 \leq n \leq e^t} a_n) e^{-2\alpha}.$$

On passe à la limite quand α tend vers 0, puis on fait le même travail avec des majorations. On en déduit que

$$\lim e^{-t} \sum_{1 \leq n \leq e^t} a_n = 1,$$

puis le résultat demandé.

Corollaire : Les Λ_n vérifient la propriété $\sum_{n \leq x} \Lambda_n \sim_{x \rightarrow +\infty} x$.

Preuve : Il suffit de montrer que les Λ_n vérifient la première propriété. On sait déjà que $\sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq x} \log p \leq \pi(x) \log x = O_{x \rightarrow +\infty}(x)$, on conclut grâce au lemme suivant:

Lemme : On a $\sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{n=p^l, p \in \mathcal{P}, n \leq x} \log p = O_{x \rightarrow +\infty}(\sqrt{x} \log x)$.

Preuve :

$$\begin{aligned} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{n=p^l, p \in \mathcal{P}, n \leq x} \log p &\leq \sum_{l=2}^{\frac{\log x}{\log 2}} \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq x^{1/l}} \log p \\ &\leq \left(\frac{\log x}{\log 2} - 1\right) \frac{1}{2} \log x \pi(x^{1/2}). \end{aligned}$$

9.6 Le théorème des nombres premiers

Théorème (Hadamard, De la Vallée-Poussin) : Le nombre $\pi(x)$ de nombres premiers inférieurs à x vérifie la formule asymptotique

$$\pi(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log x}.$$

Preuve : On commence par remarquer que grâce au lemme précédent,

$$\sum_{p \leq x} \log p \sim_{x \rightarrow +\infty} x.$$

On en déduit que

$$\sum_{p \leq x} 1 \geq \frac{x + o(x)}{\log x} \geq \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} 1 &\leq \sum_{p \leq x^{1-\varepsilon}} 1 + \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x} 1 \\ &\leq \frac{C_\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{x^{1-\varepsilon}}{\log x} + \frac{1}{(1-\varepsilon) \log x} \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x} \log p \\ &\leq \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right). \end{aligned}$$

10 Les algèbres de Banach et le théorème de Wiener

10.1 Définition des algèbres de Banach

Définition : Soit A un espace de Banach sur \mathbb{C} muni d'une loi de composition interne (simplement notée $(x, y) \mapsto xy$) supposée commutative, associative et distributive par rapport à l'addition. On suppose de plus que pour $\alpha \in \mathbb{C}, x, y \in A$, on a $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ et

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|.$$

Enfin on suppose qu'il existe dans A un élément neutre e de norme 1. On dit alors que A est une algèbre de Banach commutative et unitaire.

Remarque : On peut ne pas faire l'hypothèse de commutativité ni celle d'existence d'un élément neutre de norme 1 (un élément neutre est toujours de norme plus grande que 1). On dit alors simplement que l'on a une algèbre de Banach. Ainsi $M_n(\mathbb{C})$ muni de la multiplication usuelle des matrices et d'une norme subordonnée à une norme sur \mathbb{C}^n est une algèbre de Banach unitaire pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais elle n'est commutative que lorsque $n = 1$.

Exemple : Soit X un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^N . On considère l'espace vectoriel $C(X, \mathbb{C})$ des fonctions continues de X à valeur dans \mathbb{C} , muni de la norme uniforme, et de la multiplication ponctuelle. C'est une algèbre de Banach commutative et unitaire. Son unité est la fonction constante égale à 1.

Soit A l'espace vectoriel des fonctions périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C} de la forme $f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$, avec $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$. Il s'agit exactement des séries de Fourier qui convergent normalement. On munit A de la norme

$$\|f\|_A = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|,$$

et de la multiplication ponctuelle. On obtient alors une algèbre de Banach commutative et unitaire. Son unité est la fonction constante égale à 1.

10.2 Spectre d'un élément

Définition : On dit d'un élément x d'une algèbre de Banach A (commutative et unitaire) qu'il est inversible lorsqu'il existe $y \in A$ (noté x^{-1}) tel que $xy = e$. Pour $x \in A$, on note $\sigma(x) = \{\alpha \in \mathbb{C}, x - \alpha e \text{ n'est pas inversible}\}$. Cet ensemble est appelé spectre de x .

Proposition : Soit x un élément inversible d'une algèbre de Banach A (commutative et unitaire). On suppose que $h \in A$ et $\|h\| < \|(x^{-1})\|^{-1}$ (x est

nécessairement non nul, et $\|h x^{-1}\| < 1$). Alors $x + h$ est encore un élément inversible de A . De plus

$$\|(x + h)^{-1} - x^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \frac{\|h x^{-1}\|}{1 - \|h x^{-1}\|},$$

et

$$\|(x + h)^{-1} - x^{-1} + h x^{-2}\| \leq \frac{\|h x^{-1}\|^2}{1 - \|h x^{-1}\|}.$$

En particulier l'ensemble des éléments inversibles de A est ouvert, et l'application $x \mapsto x^{-1}$ est continue sur cet ensemble.

Preuve : On commence par remarquer que $g = h x^{-1}$ vérifie $\|g\| \leq \|h\| \|x^{-1}\| < 1$. On considère la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k g^k$. Elle converge car elle converge absolument (grâce à la propriété sur la norme d'un produit). C'est là qu'on utilise de manière décisive la complétude de A . On voit facilement que sa somme est l'inverse de $e + g$. On a alors

$$x^{-1} (e + g)^{-1} = (x + xg)^{-1} = (x + h)^{-1}.$$

De plus

$$\begin{aligned} \|(x + h)^{-1} - x^{-1}\| &\leq \|x^{-1}\| \|(e + g)^{-1} - e\| \\ &\leq \|x^{-1}\| \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k g^k \right\| \\ &\leq \|x^{-1}\| \frac{\|g\|}{1 - \|g\|}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \|(x + h)^{-1} - x^{-1} + h x^{-2}\| &\leq \|x^{-1}\| \|(e + g)^{-1} - e + g\| \\ &\leq \|x^{-1}\| \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k g^k \right\| \\ &\leq \|x^{-1}\| \frac{\|g\|^2}{1 - \|g\|}. \end{aligned}$$

Proposition : Soit x un élément de A . Alors $\sigma(x)$ est un ensemble compact non vide de \mathbb{C} inclus dans $\overline{B}(0, \|x\|)$.

Preuve : Si $|\alpha| > \|x\|$, alors $\|\alpha^{-1} x\| < \|e\|$, donc $e - \alpha^{-1} x$ est inversible d'après la proposition précédente et finalement $x - \alpha e$ également. Donc $\sigma(x)$ est inclus dans $\overline{B}(0, \|x\|)$.

De plus, si $x - \alpha e$ est inversible, alors pour β tel que

$$|\beta - \alpha| < \|(x - \alpha e)^{-1}\|^{-1},$$

on a $\|(\beta - \alpha)e\| < \|(x - \alpha e)^{-1}\|^{-1}$, si bien que $x - \beta e$ est encore inversible. Donc $\sigma(x)^c$ est ouvert et $\sigma(x)$ est compact.

Si maintenant $\sigma(x)$ est vide, alors pour tout $\Phi \in A'$, on peut montrer que $f_{\Phi,x}(z) = \Phi((x - ze)^{-1})$ est entière. En effet, cette application est dans ce cas bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$, et

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f_{\Phi,x}(z+h) - f_{\Phi,x}(z)}{h} - \Phi((x - ze)^{-2}) \right| \\ & \leq \|\Phi\|_{A'} \frac{|h| \|(x - ze)^{-1}\|^2}{1 - |h| \|(x - ze)^{-1}\|} \end{aligned}$$

dés que $|h| \leq \|(x - ze)^{-1}\|^{-1}$. De plus, du fait de la continuité de l'application $x \mapsto x^{-1}$, on voit que $zf_{\Phi,x}(z) \rightarrow -\Phi(e)$ lorsque $|z| \rightarrow +\infty$. On a donc que $f_{\Phi,x}$ tend vers 0 à l'infini, si bien que d'après le théorème de Liouville, $f_{\Phi,x}(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Le théorème de Hahn-Banach implique alors que $(x - ze)^{-1} = 0$, ce qui est impossible.

Corollaire (Gelfand-Mazur) : Soit A une algèbre de Banach (commutative et unitaire) qui est également un corps. Alors il existe une isométrie (morphisme d'algèbre bijectif qui conserve la norme) de A dans \mathbb{C} .

Preuve : Soit $x \in A$. D'après la proposition précédente, on sait que $\sigma(x)$ contient au moins un élément de \mathbb{C} . Mais dans un corps, seul l'élément nul n'est pas inversible, si bien que $\sigma(x)$ ne peut contenir plus d'un élément. On note $\sigma(x) = \{\lambda(x)\}$. On a donc $x = \lambda(x)e$. L'application $x = \lambda(x)e \mapsto \lambda(x)$ est clairement une isométrie de A dans \mathbb{C} .

10.3 Idéaux

Définition : Soit A une algèbre de Banach commutative et unitaire. Un sous-ensemble I de A est dit idéal lorsque I est un idéal de A en tant qu'anneau et un sous-espace vectoriel de A . On dit de I qu'il est un idéal strict (ou propre) lorsque $I \neq A$.

Proposition : Soit A une algèbre de Banach commutative et unitaire, et I un idéal strict de A que l'on suppose fermé. Alors, l'espace vectoriel quotient A/I (dont on note les éléments sous la forme $x + I$, pour $x \in A$) muni de la multiplication $(x + I)(y + I) = xy + I$, de l'élément unité $e + I$ et de la norme

$$\|x + I\|_{A/I} = \inf\{\|x + y\|, y \in I\}$$

est une algèbre de Banach commutative et unitaire.

Preuve : Comme I est un sous-espace vectoriel de A , on sait que A/I est un espace vectoriel. Montrons que $\|\cdot\|_{A/I}$ est une norme sur cet espace. En effet

d'une part si $x \in I$, on a $\|x + I\|_{A/I} \leq \|x + (-x)\| = 0$. Réciproquement comme I est supposé fermé, si $x \notin I$, on a $\|x + I\|_{A/I} = d(x, I) > 0$. Comme pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = I$, on a $\|\lambda(x + I)\|_{A/I} = |\lambda| \|x + I\|_{A/I}$. Pour $x_1 + I, x_2 + I \in A/I$ et $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $y_1, y_2 \in I$ tels que $\|x_i + y_i\| \leq \|x_i + I\|_{A/I} + \varepsilon, i = 1, 2$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \|(x_1 + I) + (x_2 + I)\|_{A/I} &\leq \|(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\| \\ &\leq \|x_1 + y_1\| + \|x_2 + y_2\| \\ &\leq \|x_1 + I\|_{A/I} + \|x_2 + I\|_{A/I} + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient l'inégalité triangulaire, si bien que $\|\cdot\|_{A/I}$ est une norme.

On montre à présent que A/I , muni de cette norme, est un espace de Banach. Pour cela, on considère une suite de Cauchy $(x_n + I)_{n \in \mathbb{N}}$ de A/I . Pour $p \in \mathbb{N}$, on peut alors trouver $\sigma(p) \in \mathbb{N}$ tel que (si $p > 0$) $\sigma(p) > \sigma(p - 1)$ et pour tout $q, r \geq \sigma(p)$, $\|(x_q + I) - (x_r + I)\|_{A/I} \leq 2^{-p}$. On a alors $\|(x_{\sigma(p+1)} + I) - (x_{\sigma(p)} + I)\|_{A/I} \leq 2^{-p}$. On peut par conséquent trouver une suite $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $\|x_{\sigma(p+1)} - x_{\sigma(p)} + w_p\| \leq 2^{1-p}$. En considérant la suite définie par récurrence par $y_0 = 0, y_{p+1} - y_p = w_p$ pour $p \in \mathbb{N}$, on voit que $\|(x_{\sigma(p+1)} + y_{p+1}) - (x_{\sigma(p)} + y_p)\| \leq 2^{1-p}$. La suite $(x_{\sigma(p)} + y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est alors de Cauchy de A (c'est le terme général d'une série convergente), si bien qu'elle converge dans A vers une limite l . La suite $(x_{\sigma(p)} + I)_{p \in \mathbb{N}}$ converge alors vers $l + I$ dans A/I . Mais une suite de Cauchy dont une sous-suite converge est en fait une suite convergente, si bien que $(x_n + I)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans A/I vers $l + I$. En définitive, A/I est un espace de Banach.

On sait d'autre part que comme I est un idéal, la loi de multiplication sur A passe au quotient et fait de A/I une algèbre (commutative et unitaire). Il reste à vérifier que la norme $\|\cdot\|_{A/I}$ vérifie les propriétés des normes d'algèbres de Banach. Pour cela on se donne $x_1 + I, x_2 + I \in A/I$ et $\varepsilon > 0$, et $y_1, y_2 \in I$ tels que $\|x_i + y_i\| \leq \|x_i + I\|_{A/I} + \varepsilon, i = 1, 2$. On voit alors que

$$\begin{aligned} \|(x_1 + I)(x_2 + I)\|_{A/I} &\leq \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\| \\ &\leq \|(x_1 + y_1)\| \|(x_2 + y_2)\| \\ &\leq (\|x_1 + I\|_{A/I} + \varepsilon) (\|x_2 + I\|_{A/I} + \varepsilon), \end{aligned}$$

et on conclut en faisant tendre ε vers 0. Enfin, on remarque que

$$\|e + I\|_{A/I} \leq \|e\| \leq 1.$$

Définition : Soit A une algèbre de Banach, et I un idéal de A . On dit qu'il est maximal s'il est strict et si pour tout J idéal strict de A contenant I , on a $J = I$.

Proposition : Tout idéal strict de A est inclus dans un idéal maximal de A . Tout idéal maximal de A est fermé. Si un idéal I de A est maximal, alors l'algèbre A/I est un corps.

Preuve : La première assertion est une conséquence immédiate du lemme de Zorn, l'ordre partiel étant simplement l'inclusion.

Lorsque I est un idéal strict de A , son adhérence \bar{I} est encore un idéal de A . De plus comme I est strict, il ne contient pas l'ouvert des éléments inversibles de A . Il en est donc de même pour \bar{I} , qui en conséquence est strict.

Soit I un idéal maximal de A , et $x + I$ un élément non nul de A/I , c'est-à-dire tel que $x \notin I$. L'ensemble $xA + I$ est encore un idéal qui contient I strictement. Comme I est maximal, on a $xA + I = A$. En particulier il existe $y \in A$ tel que $xy \in e + I$, et $y + I$ est élément inverse de $x + I$.

10.4 Le théorème de Wiener

Proposition : Soit A une algèbre de Banach, et $x \in A$. Si pour tout morphisme d'algèbres h de A dans \mathbb{C} de norme (d'opérateurs) ≤ 1 (i.-e. une forme linéaire multiplicative h telle que $h(e) = 1$ et $\|h(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in A$), on a $h(x) \neq 0$, alors x est inversible.

Preuve : Si x n'est pas inversible, alors xA est un idéal strict de A , si bien qu'il existe M idéal maximal de A contenant xA .

Donc A/M est une algèbre de Banach qui est aussi un corps. D'après le théorème de Gelfand-Mazur, il existe une isométrie d'algèbres de Banach $j : A/M \rightarrow \mathbb{C}$. On considère alors $j \circ \phi$, où ϕ est le morphisme canonique d'algèbres de A dans A/M . Il s'agit d'un morphisme d'algèbres de A dans \mathbb{C} qui s'annule en x . Sa norme (d'opérateurs) est inférieure au produit des normes (d'opérateurs) de j et de ϕ . Or la première est inférieure à 1, et la deuxième est exactement 1 (c'est une isométrie).

Théorème (Wiener) : Soit f une fonction 2π -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , qui ne s'annule pas et qui s'écrit sous la forme

$$f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta},$$

avec $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$. Alors on a également

$$\frac{1}{f(\theta)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{in\theta},$$

avec $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\gamma_n| < +\infty$.

Preuve : On considère l'algèbre de Banach A déjà vue en exemple, des fonctions f 2π -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , qui s'écrivent sous la forme

$$f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta},$$

avec $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$. On note sa norme $\| \cdot \|_A$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (ou mieux $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$), on peut définir le morphisme d'algèbres de A dans \mathbb{C} : $h_\theta(f) = f(\theta)$. Réciproquement soit h un morphisme d'algèbres de A dans \mathbb{C} de norme (d'opérateurs) inférieure à 1. On considère la fonction $f_0 : \theta \mapsto e^{i\theta}$. On a pour $n = 1, -1$,

$$|h(f_0)|^n = |h(f_0^n)| = |h(f_0^n)| \leq \|f_0^n\| = 1.$$

On en déduit que $|h(f_0)| = 1$. Donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $h(f_0) = e^{i\theta}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a alors $h(f_0^n) = e^{in\theta}$, puis pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$, on a $h(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n f_0^n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$. En d'autres termes, $h = h_\theta$.

Si l'on sait maintenant que $f \in A$ et que f ne s'annule pas, on a $h_\theta(f) \neq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Mais comme tous les morphisme d'algèbres de A dans \mathbb{C} de norme (d'opérateurs) inférieure à 1 sont de la forme h_θ , on en déduit que f est inversible dans A . En d'autres termes, $1/f \in A$, ce qui permet de conclure.

11 Compléments

11.1 Quelques aspects classiques de l'analyse complexe qui ne sont pas abordés dans ce cours

11.1.1 Le point de vue de Weierstrass

Il s'agit d'étudier les fonctions holomorphes à partir des séries entières. On peut par exemple commencer par étudier les séries formelles (et les opérations que l'on peut effectuer dessus : produit de Cauchy, inverse, séries composées, série réciproque). Ensuite il est possible de voir comment s'agencent les domaines de convergence de ces séries. Un théorème de base exprime que la somme d'une série entière est développable en séries entières sur son disque ouvert de convergence. Ce point de vue est celui qui est adopté dans [3], Ch. I.

11.1.2 Formes différentielles

On peut présenter les théorèmes de Cauchy (sur les ouverts convexes, ou pour les lacets homotopes) comme des conséquences de théorèmes analogues sur les formes différentielles. Ainsi, sur un ouvert convexe (de \mathbb{R}^2 , mais également de \mathbb{R}^N), le lemme de Poincaré affirme que toute forme différentielle (plus précisément toute 1-forme) fermée est exacte. Le lien entre les deux présentations apparaît lorsque l'on interprète les relations de Cauchy–Riemann comme relations de fermeture d'une forme différentielle. C'est ce qui est fait dans [3], Ch. II.1. Certains ouvrages utilisent également la notion de compact orienté, ou la notion de chaîne. Chacune de ces notions a son intérêt, et permet une présentation alternative de la théorie.

11.1.3 La sphère de Riemann

On la définit comme la sphère unité S^2 de \mathbb{R}^3 . On construit une bijection de $S^2 - \{(0,0,1)\}$ dans \mathbb{C} en associant à chaque point de la sphère (excepté le pôle nord) l'intersection entre un certain plan et la droite passant par le point considéré et le pôle nord. On peut ainsi identifier cette sphère à \mathbb{C} auquel on a adjoint un point à l'infini. Les applications homographiques (non dégénérées) se prolongent de manière naturelle en bijection de la sphère de Riemann dans elle-même. L'étude du groupe formé par l'ensemble de ces applications muni de la composition (ce groupe est parfois noté $PGL(2, \mathbb{C})$) constitue la géométrie analogmatique. Les "droites ou cercles" de \mathbb{C} correspondent à des cercles de la sphère de Riemann et sont (globalement) conservés par le groupe. Il suffit de vérifier que c'est le cas pour les générateurs du groupe : les similitudes affines directes $z \mapsto az + b$ et l'inversion $z \mapsto 1/z$. De nombreux problèmes de géométrie plane faisant intervenir des cercles peuvent se simplifier notablement par transformation par une homographie envoyant un point "à l'infini". Les propriétés élémentaires de la sphère de Riemann sont décrites dans [3], Ch. III.5.

11.1.4 Les fonctions harmoniques

Ce sont les fonctions de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \int_{\omega \in S^{N-1}} f(x + \alpha \omega) d\omega.$$

Lorsque la fonction f est régulière, on peut voir que cette condition équivaut à $\Delta f = 0$. On a vu que les fonctions holomorphes possèdent une partie réelle (et imaginaire) harmonique. On a également montré en exercice que, au voisinage d'un point donné, les fonctions qui sont partie réelle d'une fonction holomorphe sont les fonctions harmoniques. Les fonctions harmoniques sur le disque unité ouvert de \mathbb{R}^2 et qui se prolongent de manière naturelle en fonctions L^p sur le cercle unité forment un espace fonctionnel important noté H^p (à ne pas confondre avec les espaces de Sobolev notés de la même manière). Lorsque $p = 2$ il s'agit d'un espace de Hilbert séparable, donc isométrique à tous les autres espaces de Hilbert séparables. Le fait qu'il soit constitué de fonctions holomorphes permet de traiter certains problèmes, puis d'exporter la solution vers l^2 par exemple. Pour un exposé élémentaire sur les fonctions harmoniques, on pourra consulter [3], Ch. IV.3 et 4, et [9], Ch. 11 et 17.

11.1.5 Les séries de fonctions méromorphes

On peut étendre aux fonctions méromorphes les notions de convergence relatives aux fonctions holomorphes, et en particulier ce qui concerne la convergence des séries. Il faut pour cela tenir compte des pôles des fonctions (et utiliser le fait que dans tout compact, il n'y en a qu'un nombre fini). C'est la théorie des familles sommables (uniformément sur tout compact) de fonctions méromorphes

qui permet d'avoir le cadre le mieux adapté pour définir la fonction \mathcal{P} ou pour écrire le développement Eulérien du sinus. Les principales définitions relatives à cette théorie sont disponibles dans [3], Ch. V.2.

11.1.6 Les produits de Weierstrass

On peut généraliser le chapitre 7.3 à n'importe quelle fonction holomorphe ne croissant pas trop vite (en module) à l'infini (c'est-à-dire, grosso-modo, pas plus vite qu'une exponentielle de polynôme). Si on connaît a priori tous ses zéros, elle est (presque) entièrement descriptible explicitement (sous forme, donc, de produit infini). Pour cette théorie, on se réfère à [9], Ch. 15.

11.1.7 L'approximation par des fractions rationnelles

On peut voir que sous certaines hypothèses, des fonctions holomorphes peuvent être approchées uniformément sur des compacts par des fractions rationnelles dont les pôles sont fixés à l'avance (et situés en dehors des compacts en question). Cela constitue la théorie de Runge. Comme conséquence, on peut citer le théorème de Mittag-Leffler, qui permet de construire une fonction méromorphe dont les pôles (et la partie singulière de la fonction au voisinage de ces pôles) sont fixés à l'avance. On trouvera l'ensemble de cette théorie dans [9], Ch. 13.

11.1.8 Les équations différentielles dans le cadre holomorphe

Les solutions des équations différentielles "résolues" à coefficients holomorphes sont naturellement holomorphes (Cf. [3], Ch. VII). On l'a vu en exercice dans le cadre des systèmes "linéaires avec second membres". Lorsque les équations ne sont pas "résolues", il y a apparition de singularités, comme on peut s'en convaincre en regardant l'équation $z f'(z) = 1$. Les fonctions spéciales classiques de la physique mathématique (fonctions de Bessel ou fonctions hypergéométriques) présentent dans certains cas de telles singularités.

11.1.9 Compléments au théorème de représentation de Riemann

Il est possible de caractériser les ouverts simplement connexes de \mathbb{C} (différents de \mathbb{C} lui-même) pour lesquels la bijection holomorphe à valeur dans $B(0, 1)$ se prolonge sur la frontière de l'ouvert en une bijection sur $\overline{B(0, 1)}$. Il est également possible d'étudier quels sont les anneaux de \mathbb{C} qui sont conformément équivalents. Enfin, il existe des preuves "constructives" du théorème du Riemann. Tous ces compléments sont disponibles dans [9], Ch. 14.

11.1.10 Propriétés algébriques de l'anneau des fonctions holomorphes

Comme conséquence du théorème de Mittag-Leffler et de l'utilisation des produits de Weierstrass, on peut citer les théorèmes qui permettent de montrer l'existence de fonctions holomorphes prenant des valeurs fixées à l'avance en des

points fixés à l'avance. Ceci permet en particulier de montrer que les idéaux de l'anneau $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ qui sont engendrés par un nombre fini d'éléments sont en fait principaux.

11.1.11 Fonctions holomorphes et transformée de Fourier

La transformée de Fourier échange les propriétés de régularité et de décroissance à l'infini. On s'attend donc à ce que les propriétés de compacité de support (très forte décroissance à l'infini) s'échangent avec la propriété d'avoir une extension holomorphe (très forte régularité). On voit facilement que les transformées de Fourier de fonctions à support compact se prolongent sur \mathbb{C} en fonctions entières (il suffit de remplacer la variable réelle x par une variable complexe z dans $e^{ix\xi}$ pour s'en convaincre). Le théorème de Paley-Wiener est une réciproque de ce type de résultat. On le trouve énoncé dans [9], Ch. 19.

11.2 Pour aller plus loin

11.2.1 Surfaces de Riemann et géométrie analytique

Lorsque l'on considère des variétés sur \mathbb{C} avec des cartes analytiquement compatibles, on aboutit à la géométrie analytique. Dans le cas de la dimension 1 sur \mathbb{C} (i.e. de dimension 2 sur \mathbb{R}), on appelle ces variétés des surfaces de Riemann. On trouvera une introduction à cette théorie dans [11].

11.2.2 Topologie algébrique

Le groupe fondamental d'un ensemble (topologique) est formé des lacets à valeur dans cet ensemble quotienté par la relation d'équivalence d'homotopie (de lacets). L'idée d'associer une structure algébrique de cette manière à un ensemble topologique est l'idée de base de la topologie algébrique. Une présentation "autocontenue" de cette théorie est disponible dans [6].

11.2.3 Aspects mathématiques de la mécanique des fluides

Les problèmes issus de la mécanique des fluides constituent un des enjeux les plus importants des mathématiques (ils sont au coeur du sixième problème de Hilbert et l'existence de solutions régulières aux équations de Navier-Stokes des fluides incompressibles est récompensée par un prix de la fondation Clay). La théorie des équations des fluides compressibles est décrite par exemple dans [10].

11.2.4 Opérateurs

Les opérateurs (i.e. les applications linéaires continues ou pas entre espaces de Banach) s'étudient en particulier grâce aux fonctions holomorphes. Pour un exposé très complet de la théorie, Cf. [4].

11.2.5 Théorie analytique des nombres

Le théorème des nombres premiers est un exemple typique d'application de la théorie des fonctions de la variable complexe à la théorie des nombres. De nombreux autres résultats peuvent être obtenus de manière analogue. On trouvera de nombreux exemples de tels résultats dans [1].

11.2.6 Formes modulaires

Les fonctions elliptiques et les fonctions qui leurs sont associées (formes modulaires, fonctions θ , etc.) sont au coeur des mathématiques théoriques modernes. Ainsi, la démonstration du théorème de Fermat par A. Wiles utilise très fortement cette théorie. On trouvera une introduction aux mathématiques mises en jeu dans cette démonstration dans [7].

References

- [1] APOSTOL, T. *Introduction to analytic number theory*. Undergraduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [2] BEARDON, A. *Iterations of rational functions*. Graduate texts in mathematics, **132**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [3] CARTAN, H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'un ou plusieurs variables complexes*. 4^{ème} éd. Hermann, Paris, 1961.
- [4] DUNFORD, SCHWARTZ, L. *Linear Operators. Parts I,II,III* Pure and applied mathematics, **7**, Interscience publishers, New York, 1967.
- [5] FEISTAUER, M. *Mathematical methods in fluid dynamics*. Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics, **67**, Longman scientific and technical, Londres, 1993.
- [6] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. Disponible en version ps sur la page web de l'auteur.
- [7] HELLEGOUARCH, Y. *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles*. Masson, Paris, 1997.
- [8] RICKART, C. *Banach algebras*. The university series in higher mathematics, D. Van Nostrand Company, Princeton, 1960.
- [9] RUDIN, W. *Real and complex analysis*. 2^{ème} éd. Tata McGraw-Hill publishing, New Delhi, 1974.
- [10] SERRE, D. *Systèmes de Lois de Conservation I et II*. Diderot Editeur, Paris, 1996.
- [11] SPRINGER, G. *Introduction to Riemann surfaces*. Chelsea publishing company, New York, 1981.