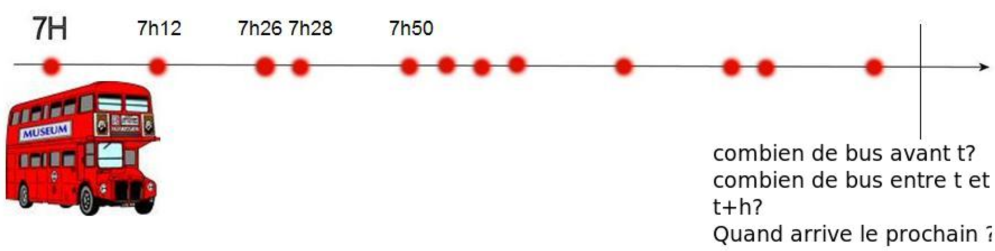
Théorie du renouvellement

Niveau : M1

Difficulté : Difficile
Durée : plusieurs heures, au moins quatre.

Rubrique(s) :
Analyse (densité, convolution, limites de fonctions et interversions de limites, théorème d'Ascoli)
Probabilités (Notions de base, loi des grands nombres)

La petite histoire... Ce sujet mélange intégrale par rapport à une mesure et intégrale de Riemann, en faisant ponctuellement appel à l'analyse fonctionelle via le théorème de Riesz ou d'Ascoli-Arzela, rappelés en Indications.
Mais la motivation pour ce problème vient d'une question naturelle de modélisation aléatoire et les deux dernières parties sont des probabilités, qui ne nécessitent néanmoins aucun résultat avancé.
Le problème ici est de comprendre la structure de l'ensemble aléatoire de points de $\mathbb{R}^+$ suivant. A chaque réalisation, l'ensemble est discret et les distances successives entre deux points forment des variables indépendantes identiquement distribuées. C'est un modèle naturel par exemple pour les instants de passage d'un bus à une station (voir l'application à la section 5), les instants de division d'une cellule, les instants où une reserve est vide... en fait lorsque des événements se renouvellement indépendamment du passé suivant une loi fixée.
Il faut ici tout l'outillage de l'intégration pour démontrer le théorème de renouvellement qui n'est pas aussi simple qu'il en a l'air et nécessite tout de même une hypothèse 'arithmétique' sur la loi de la distance entre deux points. On verra aussi qu'on aboutit ensuite rapidement à un paradoxe frappant, le paradoxe de l'autobus : si le temps moyen entre deux bus est de 10 min, le temps moyen d'attente du bus par un passager arrivant au hasard est strictement supérieur à 5 (excepté dans le cas dégénéré) et peut etre arbitrairement grand.



On considère une mesure positive λ sur les boréliens de $\mathbb{R}$ et on note supp λ son support :

$$\text{supp } \lambda := \{x \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0,\ \lambda([x-\epsilon, x+\epsilon]) > 0\}.$$

La convolution entre deux mesures positives λ et μ est notée $\lambda \star \mu$ et définie (quand elle existe) par

$$\lambda \star \mu(]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(]-\infty, x-y])\, \mu(\mathrm{d}y).$$

On s'intéresse à une *mesure de probabilité* λ *à support dans* $\mathbb{R}^+$:

$$\lambda(]-\infty, 0[) = 0, \quad \lambda([0,\infty)) = 1$$

et à ses convolées successives que l'on note $\lambda^{\star k}$

$$\lambda^{\star 0} = \delta_0, \quad \lambda^{\star k+1} = \lambda \star \lambda^{\star k}$$

où δ_0 est la masse de Dirac en 0. Plus précisement, on considère la mesure positive

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{\star k},$$

qui est la clef pour comprendre la répartition asymptotique des points disposés à intervalles indépendants identiquement distribués.

1 Densité à l'infini

1) Soient λ et μ deux mesures sur $\mathbb{R}^+$. Vérifier (ou admettre) que
(i) supp λ est fermé.
(ii) S'il existe $x \in \mathbb{R}^+$ et $\epsilon > 0$ tels que $B(x,\epsilon) \cap \text{supp } \lambda = \varnothing$, alors $\lambda(B(x,\epsilon)) = 0$.
(iii) supp $\lambda +$ supp $\mu \subset$ supp $\lambda \star \mu$.
2) Vérifier que supp $U = \text{Adh}\big(\cup_{k=0}^{\infty} \text{supp } \lambda^{\star k}\big)$ où Adh désigne l'adhérence.
3) Montrer que supp U contient 0 et est stable par addition, i.e. $0 \in$ supp U et $\forall a, b \in \text{supp } U, a+b \in \text{supp } U$.

Le support de U est un ensemble qui tend à se densifier quand x augmente et on va déterminer dans quel cas il devient dense à l'infini. On dit que $D \subset [0,\infty[$ est dense à l'infini ssi

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists x_0 \geq 0, \quad \forall x \geq x_0 : \quad D \cap [x, x+\epsilon] \neq \varnothing.$$

On pose $r = \inf\{b - a \ :\ a < b,\ a, b \in \text{supp } U\}$.
4) Montrer que si $r > 0$, alors supp $U \subset r\mathbb{N}$.
5) Montrer que si $r = 0$ alors supp U est dense à l'infini.
6) Montrer que si $\{1, \sqrt{2}\} \subset$ supp λ, alors supp U est dense à l'infini.

En conclusion, ou bien supp U est inclus dans un réseau, ou bien supp U est dense à l'infini.
Dans le premier cas, supp λ est lui même inclus dans un réseau et on dit que λ est *arithmétique*. On se place ici dans le deuxième cas, plus intéressant, λ n'est pas arithmétique et supp U est donc dense à l'infini.

2 Equation de convolution

On définit la convolution $f \star \mu$ entre une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une mesure positive μ (quand elle existe) comme

$$f \star \mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\mu(\mathrm{d}y).$$

On cherche ici à résoudre l'equation

$$f = g + f \star \lambda \qquad (R)$$

où g est une fonction mesurable par rapport aux boréliens de $\mathbb{R}$, bornée et à support compact inclus dans $\mathbb{R}^+$ et λ est une mesure de probabilité à support dans $\mathbb{R}^+$ qui n'est pas arithmétique (voir la question précédente). Pour cela on introduit la mesure U_n définie par

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{\star k}.$$

1) Montrer que pour tout $h \geq 0$, il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $x \geq 0$, $U([x, x+h]) \leq C$.

Ce résultat assure que U est une mesure finie sur tout compact et que l'intensité du nuage de points n'explose pas quand $x \to \infty$.

2) Montrer que $f_n = g \star U_n$ converge simplement vers $g \star U$ et est uniforment bornée en n sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que si $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée, uniformement continue vérifie $\zeta = \zeta \star \lambda$ et $\forall x \in \mathbb{R} : \zeta(x) \leq \zeta(0)$, alors $\forall x \in \mathbb{R} : \zeta(x) = \zeta(0)$.

4) Montrer que l'équation (R) admet une unique solution à support dans $\mathbb{R}^+$ et bornée sur tout compact, et que cette solution est égale à $g \star U$.

5) On suppose ici g continue à support dans $[0, K]$ et on note $f = g \star U$ la solution considérée dans la précédente question.
a) Montrer que f est bornée et uniformement continue.
b) En supposant que g est $\mathcal{C}^1$ à support dans $[0, K]$, montrer que f est dérivable puis que $\limsup_{x\to\infty} f'(x) = 0$ en considérant $\zeta_n(.) = f'(t_n + .)$ avec des temps t_n tels que $\lim_{n\to\infty} f'(t_n) = \limsup_{x\to\infty} f'(x)$.
En déduire que pour tout $a \geq 0$, $f(x+a) - f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.
c) Montrer que pour tout $a \geq 0$, $f(x+a) - f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

3 Théoremes de renouvellement

1) On note $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact que l'on munit de la norme infinie sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une suite de mesures ν_n converge faiblement vers ν quand pour tout $f \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\nu_n(\mathrm{d}x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\nu(\mathrm{d}x).$$

Soit ν_n des mesures positives sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout pour tout compact K, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(K) < \infty$.
a) Montrer qu'il existe une sous suite extraite $\nu_{\phi(n)}$ qui converge faiblement vers une

mesure positive ν.
b) Montrer que si ν_n converge faiblement vers la mesure de Lebesgue dx, que f est intégrable par rapport à ν_n et directement Riemann intégrable sur $\mathbb{R}$ (voir la définition à la fin de l'énoncé) alors,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\nu_n(\mathrm{d}x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2) Montrer que si une mesure positive ν finie sur tout compact vérifie que pour tous $z \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\nu(z+\mathrm{d}x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\nu(\mathrm{d}x)$, alors ν est proportionelle à la mesure de Lebsegue.

3) On peut maintenant démontrer le résultat fondamental de renouvellement, pour toute mesure λ non arithmétique. Ce résultat indique que quand $x \to \infty$, le nombre de points moyen du nuage qui se trouve dans $[x, x+h]$ devient proportionnel à h.
a) Montrer que si λ n'est pas arithmétique, pour toute fonction f directement Riemann intégrable sur $\mathbb{R}^+$,

$$\int_0^{\infty} f(x-y)U(\mathrm{d}y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} m^{-1}\int_0^{\infty} f(y)\mathrm{d}y$$

En particulier, pour tout $h > 0$, $U([x, x+h]) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} h/m$.
b) Montrer que ce dernier résultat est faux si λ est arithmétique.

4 Interprétation probabiliste

On considère maintenant un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$.

1) Pour tous λ, μ mesures de probabilité, vérifier que $\lambda \star \mu = \mu \star \lambda$ puis que $\lambda \star \mu$ est la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de loi respectives λ et μ.

Dorénavant, λ est une mesure dont le support est inclus dans $[0, \infty[$ et de moyenne finie : $\int_0^{\infty} x\lambda(\mathrm{d}x) < \infty$.
On considère $(X_i : i \geq 1)$ des v.a. sur $(\Omega, \mathbb{P})$ indépendantes identiquement distribuées de loi commune λ. On s'intéresse à l'ensemble aléatoire discret

$$\mathcal{E}(\omega) := \{\sum_{i=1}^{k} X_i(\omega) : k \geq 0\}.$$

C'est à dire que à chaque ω on associe un ensemble $\mathcal{E}(\omega)$ tel que la distance entre le $i$ème et le $i+1$ème point est égale à X_i.

On note

$$m = \int_0^{\infty} x\lambda(\mathrm{d}x) = \mathbb{E}(X_1), \quad N_x = \sup\{k : \sum_{i=1}^{k} X_i \leq x\}$$

On commence par un résultat simple qui dit que le nombre de points du nuage dans l'intervalle $[0, x]$ croit linéairement en x avec une vitesse inverse à m.

2) Montrer que $N_x/x \to 1/m$ p.s. quand $x \to \infty$.

L'étude plus fine de ce nuage de points repose sur son intensité donnée par la mesure U définie au début. En effet λ^k donne la loi de l'abscisse du $k$ème points de $\mathcal{E}$, $U([a,b])$ donne le nombre moyen de points de $\mathcal{E}$ entre a entre b.

3) Montrer que pour tout $0 \leq a \leq b$, $U([a,b]) = \mathbb{E}(\#\{z(\omega) \in \mathcal{E} \cap [a,b]\})$.

Le résultat 3.3.a) indique donc que si la loi de X n'est pas arithmétique, alors le nombre moyen de points de $\mathcal{E}$ entre x et $x+t$ converge vers t/m. Ce qui est très naturel mais tout de même faux si la loi de X est arithmétique. De plus on va voir maintenant que ce résultat naturel entraîne en fait facilement un paradoxe.

5 Application au paradoxe de l'autobus

On suppose toujours que la loi de X n'est pas arithmétique et on considère maintenant que les points de $\mathcal{E}$ sont les instants de passage d'un bus à une station. Ceci signifie que les temps successifs entre deux bus sont indépendants et identiquement distribués comme la variable aléatoire X.

Lorsqu'un passager arrive à l'instant $t \geq 0$, le bus suivant arrive lui à l'instant

$$T_t = \inf\{x \geq t : x \in \mathcal{E}\}$$

et il attend donc un temps

$$A_t = T_t - t.$$

1) Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(A_t \leq x) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} m^{-1} \int_0^x \mathbb{P}(X \geq y)\mathrm{d}y.$$

2) Montrer que si $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, alors

$$\mathbb{E}(A_t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathbb{E}(X^2)}{2\mathbb{E}(X)}.$$

Définition d'une fonction directement Riemann intégrable sur I C'est une notion plus forte que Riemann intégrable, même si elles coincident sur un segment. Pour un recouvrement de I par des intervalles disjoints

$$I = \sqcup_{i\in\mathbb{N}} I_n$$

on définit les petites et grandes sommes de Darboux par

$$d(f,(I_i : i \in \mathbb{N})) = \sum_{i\in\mathbb{N}} |I_i| \inf_{x\in I_i} f(x), \qquad D(f,(I_i : i \in \mathbb{N})) = \sum_{i\in\mathbb{N}} |I_i| \sup_{x\in I_i} f(x).$$

On dit alors que f est directement Riemann intégrable sur I d'intégrale $\int_I f(x)\mathrm{d}x$ quand pour toute suite de recouvrement $((I_i^n : i \in \mathbb{N})n \in \mathbb{N})$ dont le pas tend vers zéro :

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |I_i^n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

les sommes de Darboux convergent vers la même valeur, i.e.

$$D(f,(I_i^n : i \in \mathbb{N})) - d(f,(I_i^n : i \in \mathbb{N})) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et on note alors

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} D(f,(I_i^n : i \in \mathbb{N})) = \lim_{n\to\infty} d(f,(I_i^n : i \in \mathbb{N})).$$

Par les méthodes usuelles, on vérifie que cette définition est bien indépendante de la suite de recouvrement.

Indications et Commentaires : On rappelle le théorème d'Ascoli-Arzela et le théorème de representation de Riesz pour les formes linaires continues.

Théorème d'Ascoli Arzela Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un espace métrique compact (K,d) et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que (i) f_n est équicontinue : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta, \forall x,y \in K, \forall n \in \mathbb{N}, d(x,y) \le \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \le \epsilon$
(ii) Pour tout $x \in K$, $(f_n(x))_n$ est bornée.
Alors il existe une sous suite de (f_n) qui converge uniformément vers f.

Théorème de représentation de Riesz Soit X un espace séparé localement compact, et soit Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_K(X)$. Alors il existe une unique mesure μ sur les boréliens finie sur les compacts telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_K(X)$,

$$\Lambda(f) = \int_X f(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

Le théorème de renouvellement dit "simplement" que lorsque des points sont séparés par des distances aléatoires indépendantes et identiquement distribueés, le nombre moyen de points qui se trouvent dans un intervalle de taille h est proportionnel à h lorsque cet intervalle tend vers l'infini (et h est fixé). Le coefficient de proportionnalité est naturellement l'inverse de la moyenne de cette distance aléatoire entre deux points consécutifs.
Mais nous avons dû supposer que la loi de cette distance est non arithmétique. En effet le résultat n'est pas vrai pour tout h si cette distance est à valeurs dans un réseau $r\mathbb{N}$. Par exemple, quand la distance est égale à 1 avec probabilité 1, le nuage de points vaut $\mathbb{N}$ avec probabilité 1 et le nombre moyen de points dans $[x, x+1/2]$ alterne entre la valeur 0 et 1 quand x parcourt les réels positifs.
De plus, la preuve s'est avérée difficile, tandis que le paradoxe qui en découle est ensuite prouvé rapidement. Elle est très largement inspirée de la preuve classique, que l'on trouve notamment dans [1]. Il existe une approche et une preuve plus probabiliste du théorème de renouvellement utilisant une arme propre aux probabilités et très efficace : le couplage. On se reportera à [2, 4] pour des détails mais l'idée est la suivante. Commençons le nuage de points à une distance bien choisie de l'origine, qui rend ce nuage stationaire, c'est à dire invariant en loi par translation. Alors tout devient simple puisque le nombre moyen de points entre x et $x+h$ devient indépendant de x. La construction par couplage permet de se ramener à ce cas favorable en faisant coincider les nuages de points à partir d'un point bien choisi.
Dans le cas où la distance entre deux points (donnée par la loi λ) est arithmétique, c'est à dire incluse dans un réseau $r\mathbb{N}$, on peut prouver un analogue du theorème de renouvellement au sens suivant. Si le réel r précédent est choisit minimal, la probabilité u_n qu'il y ait un point à l'abscisse $r.n$ converge quand $n \to \infty$ vers r/m où m est la distance moyenne entre deux points.
Puisque le théorème de renouvellement établit une convergence, il est ensuite naturel de se demander à quelle vitesse celle ci a lieu. Intuitivement, plus la distance entre deux points peut prendre de grandes valeurs, plus la convergence va être lente. La convergence va ainsi être

plus rapide quand la queue de distribution $\lambda[x,\infty]$ de la distance entre deux points décroit rapidement en x. Dans le corollaire 2 de [5], une correspondance est établie dans ce sens. Enfin, si $\int_0^\infty x^k \lambda(\mathrm{d}x)$ est finie pour tout $k \in \mathbb{N}$, le théorème de Kendall [3] assure que la vitesse de convergence est exponentielle.

1.1) Pour (ii), extraire un sous recouvrement fini par des boules ouvertes de $B(x,\epsilon)$.
Pour (iii), utiliser que $z \in]y-\epsilon/2, y+\epsilon/2]$ implique $]x-\epsilon/2, x+\epsilon/2] \subset]x+y-\epsilon-z, x+y+\epsilon-z]$ et en déduire $\lambda(]x-\epsilon/2, x+\epsilon/2]).\mu(]y-\epsilon/2, y+\epsilon/2]) \le \lambda \star \mu(]x+y-\epsilon, x+y+\epsilon])$ pour conclure. (iii) est très naturel du point de vue probabiliste où la mesure donne la loi d'une variable aléatoire et la convolution revient à faire une sommes des variables.
1.2) Utiliser la question précédente.
1.3) Utiliser la question précédente et 1.1) iii).
1.4) Poser $h_0 = b-a \in$ supp U où $a < b$ et $r \le h_0 < 2r$. Faire un dessin en remarquant que les points de la forme $na + k(b-a) \in$ supp U pour $0 \le k \le n$. Montrer que $h_0 = r$ et supp $U \subset h_0\mathbb{N}$.
1.5) Faire un dessin. Soit $\epsilon > 0$, il existe $a, b \in$ supp U tel que $a < b \le a+\epsilon$. Considérer alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n+1)a \le nb$.
2.1) Considérer $U_n([0,x]) - \lambda \star U_n([0,x])$.
2.3) En utilisant $\zeta = \zeta \star \lambda^k$, montrer que $\zeta(-x) = \zeta(0)$ pour $x \in$ supp U puis $\zeta(-x) \to \zeta(0)$ quand $x \to \infty$.
3.1.a) Utiliser qu'il existe une suite de fonctions dense dans $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ (séparabilité). Faire alors une extraction diagonale et utliser le théorème de Riesz.
3.1.b) Encadrer une fonction directement Riemann intégrable sur un segment par ses sommes de Darboux.
3.2) Construire une suite de fonctions qui converge en croissant vers la fonction indicatrice d'un segment.
3.3) Il faut utiliser les différentes questions précédentes : la famille de mesures $(u(t+\mathrm{d}x) : t \ge 0)$ est faiblement compact, la limite est égale à $c\mathrm{d}x$ et on peut calculer c en utilisant $g(x) = \lambda([x,\infty[)$.
4.1) Utiliser Fubini avec $\lambda(]-\infty,x]) = \int_{-\infty}^x \lambda(\mathrm{d}y)$.
4.2) Utiliser la loi des grands nombres.

Corrections. 1.1) Pour (i), supposons que $x_n \in$ supp λ converge vers x. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe n tel que $x_n \in [x-\epsilon/2, x+\epsilon/2]$. Or $\lambda([x_n-\epsilon/2, x_n+\epsilon/2]) > 0$. Donc $\lambda([x-\epsilon, x+\epsilon]) \ge \lambda([x_n-\epsilon/2, x_n+\epsilon/2]) > 0$ et $x \in$ supp λ.
Pour (ii), on suppose que $B(x,\epsilon) \cap$ supp $\lambda = \varnothing$. Donc pour tout $y \in B(x,\epsilon)$, il existe $\epsilon(y)$ tel que $\lambda([y-\epsilon(y), y+\epsilon(y)]) = 0$. Pour tout $\epsilon' < \epsilon$, on extrait un recouvrement fini tel que $\mathrm{Adh}B(x,\epsilon') \subset \cup_{i=1}^N B(y_i, \epsilon(y_i))$. Donc $\lambda(B(x,\epsilon'))$ puis $\lambda(B(x,\epsilon)) = 0$ par limite croissante.

1.4) On pose $h_0 = b-a$ avec $a < b \in$ supp U et $r \le h_0 < 2r$. Introduire ensuite $n \ge 0$ tel que $(n+1)a \le nb$. Alors $(n+1)a \in [na, nb]$ et il existe $0 \le k \le n$ tel que $|(n+1)a - (na+kh_0)| < r$. Or $(n+1)a, (na+kh_0) \in$ supp U par additivité de supp U. Donc $(n+1)a = na + kh_0$. Ceci implique $a = kh_0$ et $b = (k+1)h_0$. On en déduit de même que pour tout $z \in$ supp U, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|z - nh_0| = |z+a-(a+nh_0)| < r$ et donc $z = nh_0$ puisque $z+a, (a+nh_0) \in$ supp U. D'où supp $U \subset h_0\mathbb{N}$.

2.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \ge 0$,

$$U_n([0,x]) - \lambda \star U_n([0,x]) = \int_0^x \lambda([x-y,\infty[) U_n(\mathrm{d}y) = 1 - \lambda^{\star n+1}([x,\infty[).$$

La deuxième égalité et le fait que pour tout $y \in [x-\tau, x]$, $\lambda([x-y,\infty[) \ge \lambda([\tau,\infty[)$ entraine que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \ge 0$, $\lambda([\tau,\infty[) U_n([x-\tau,x]) \le 1$. En posant $\tau > 0$ tel que $\lambda([\tau,\infty[) > 0$ et en faisant tendre $n \to \infty$, on a pour tout $x \ge 0$:

$$U([x-\tau,x]) \le 1/\lambda([\tau,\infty[).$$

Le résultat est alors en obtenu en écrivant $[x, x+h] \subset \cup_{i=0}^{n(h)} [x+i\tau, x+(i+1)\tau]$ avec $n(h) = \inf\{n \in \mathbb{N} : (n+1)\tau \geq h\}$.

2.2) On écrit $g \star U_n - g \star U = g \star (U_n - U)$. Comme g est à support compact $[0, K]$, on note $M = \sup\{g(x) : x \in [0, K]\}$ et on a

$$|g \star U_n(x) - g \star U(x)| = |\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)U_n(\mathrm{d}y) - \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)U(\mathrm{d}y)| \leq M.(U - U_n)([x-K, x]).$$

Le dernier terme tend vers zéro en utilisant la convergence de la somme partielle $U_n([x-K, x])$ vers $U([x-K, x])$ obtenue à la question précédente. Ceci assure la convergence simple. La majoration uniforme en n est obtenue en majorant U_n par U.

2.3) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\zeta = \zeta \star \lambda^k$ et donc $\int_0^\infty [\zeta(0) - \zeta(-x)]\lambda^{\star k}(\mathrm{d}x) = 0$. En utilisant la continuité de ζ et le fait que pour tout $x \geq 0$, $\zeta(-x) \leq \zeta(0)$, on obtient que $\zeta(-x) = \zeta(0)$ pour tout $x \in \mathrm{supp}\lambda^{\star k}$ et donc pour tout $x \in \mathrm{supp}\, U$.
Comme supp U est dense à l'infini et ζ est uniformement continue, $\zeta(-x) \to \zeta(0)$ quand $x \to \infty$. Fixons alors $x \geq 0$ et notons M un majorant de $|\zeta|$. Pour tout $A \geq 0$,

$$\begin{aligned} |\zeta(x) - \zeta(0)| &= \int_0^\infty |\zeta(x-y) - \zeta(-y)|\lambda^{\star k}(\mathrm{d}y) \\ &\leq 2M\lambda^k([0, A]) + \sup\{|\zeta(x-y) - \zeta(-y)| : y \geq A\}. \end{aligned}$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir $A \geq 0$ tel que $\sup\{|\zeta(x-y) - \zeta(-y)| : y \geq A\} \leq \epsilon$. Grace à 2.1), on peut ensuite trouver k tel que $\lambda^k([0, A]) \leq \epsilon$. Ceci implique que $\zeta(x) = \zeta(0)$.

2.4) On pose $f = g \star U$. Grâce à 2.2), $f_n \to f$ simplement et par convergence dominée, $f_n \star \lambda \to f \star \lambda$ simplement. En utilisant $f_{n+1} = g + f_n \star \lambda$, on obtient que $f \star \lambda$ est solution de (R).
Pour l'unicité, on considère la différence f de deux solutions de l'équation. Alors $f = f \star \lambda$ et pour tout $k \geq 1$, $f = f \star \lambda^{\star k}$. On conclut grace à $|f(x)| \leq \sup_{[0,x]} |f|.\lambda^{\star k}([0, x])$ puisque le deuxième terme tend vers 0 quand $k \to \infty$ par 2.1).

2.5.a) En remarquant que $|f(x)| = |g \star U(x)| \leq U([x-K, x]) \sup |g|$, on obtient que f est bornée sur $\mathbb{R}$ grace à 2.1). Comme pour tout $a \geq 0$, $f(a+.) - f(.) = [g(a+.) - g(.)] \star U$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|g(x+a) - g(x)| \leq U([x-K, x+a]) \sup_{y \in \mathbb{R}} |g(x+a-y) - g(x-y)|$$

et le membre de droite tend vers 0 uniformement en x quand $a \to 0$ en utilisant 2.1) et le théorème de Heine qui assure l'uniforme continuité de g.

2.5.b) Grace à 2.1), on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale et $f' = g' \star U = g' + f' \star \lambda$. Comme g' est continue à support compact, la question précédente assure que f' est bornée et uniformement continue.
On note $L = \limsup_{x \to \infty} f'(x)$ et on introduit une suite $t_n \to \infty$ tel que $\lim_{n \to \infty} f'(t_n) = L$. Considérons la suite de fonctions sur $\mathbb{R}$: $\zeta_n(.) = f'(t_n + .)$. $(\zeta_n : n \in \mathbb{N})$ est une famille bornée de fonctions en norme infinie car f' bornée. De plus c'est une famille equicontinue par uniforme continuité de f'. Donc, par le théorème d'Ascoli Arzela rappelé en indications, on peut extraire une sous suite qui converge uniforment sur un compact donné. Par extraction diagonale, on peut extraire une suite qui converge uniformement vers ζ sur tout compact de $\mathbb{R}$.
Or $\zeta_n = g(t_n + .) + \zeta_n \star \lambda$ implique que $\zeta = \zeta \star \lambda$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\zeta(x) \leq L = \zeta(0)$ et on peut appliquer 2.3). On obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\zeta(x) = L$ et donc $f'(t_n + x) \to L$ quand $n \to \infty$.
Alors pour tout $a \geq 0$, $f(t_n + a) - f(t_n) = \int_0^a f'(t_n + x)\mathrm{d}x \to aL$ quand $n \to \infty$ par convergence dominée ou convergence uniforme sur un compact. Mais f bornée donc $L = 0$.

Par symétrie, on obtient que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ et de même pour tout $a \geq 0$, $f(x+a) - f(x) = \int_0^a f'(x+y)\mathrm{d}y \to 0$ par convergence dominée.

2.5.c) On considère une suite g_n de fonctions $\mathcal{C}^1$ à support dans $[0, K+1]$ qui converge uniformement vers g. Elle peut etre obtenue par exemple facilement à partir de g grace à un noyau régularisant.
Alors $f_n = g_n \star U$ converge uniformément vers $f = g \star U$ en utilisant 2.1) et

$$|g_n \star U(x) - g \star U(x)| \leq U([x-K-1, x]) \parallel g_n - g \parallel_\infty .$$

Le résultat se dérive alors directement de la question précédente.

3.1.a) On construit d'abord une suite de fonctions continues denses dans les fonctions continues à support dans $[-N, N]$ où $N \in \mathbb{N}$. Pour cela, on peut utiliser la densité de la suite formée par les polynomes à coefficients rationnels dans les fonctions continues pour la norme uniforme sur $[-N, N]$. On obtient alors une suite dense $(f_k : k \in \mathbb{N})$ dans $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ en faisant une extraction diagonale à partir de ces suites pour $N \in \mathbb{N}$.

Or par hypothèse, pour tout segment I, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(I) < \infty$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\nu_n(\mathrm{d}x) : n \in \mathbb{N})$ est bornée. Elle admet donc une sous suite convergente et par extraction diagonale, il existe une sous suite $\widetilde{\nu}_n$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\widetilde{\nu}_n(\mathrm{d}x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha_k.$$

On définit ainsi une application ϕ de $(f_k : k \in \mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$. Or cette application est uniformement continue puisque pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$,

$$|\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\widetilde{\nu}(\mathrm{d}x) - \int_{-\infty}^{\infty} f_{k'}(x)\widetilde{\nu}(\mathrm{d}x)| \leq \parallel f_k - f_{k'} \parallel_\infty . \sup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\nu}_n(I)$$

où I est un intervalle contenant le support de f_k et de $f_{k'}$. De plus $(f_k : k \in \mathbb{N})$ est dense dans $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ qui est complet donc ϕ se prolonge en une application uniformement continue de $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
Cette application est positive et le théorème de Riesz implique qu'il existe une mesure positive ν telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$, $\phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\nu(\mathrm{d}x)$.
On conclut en montrant que pour tout $f \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}&|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\nu_n(\mathrm{d}x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\nu_n(\mathrm{d}x)| \\ &\quad \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(\mathrm{supp} f \cup \mathrm{supp} f_k) \parallel f - f_k \parallel_\infty + |\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\widetilde{\nu}_n(\mathrm{d}x) - \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\nu(\mathrm{d}x)|.\end{aligned}$$

Le terme de gauche tend vers zéro quand $n \to \infty$ en utilisant une sous suite de f_k qui converge uniformement vers f et qui est à support dans un segment $[-N, N]$ qui contient le support de f. Ceci achève la preuve.

3.1.b) Commencons par montrer que la convergence a lieu pour $f = \mathbb{1}([a, b])$ la foncton indicatrice du segment $[a, b]$. Pour cela, encadrons f par deux fonctions continues f_k^1, f_k^2 dans $[0, 1]$ qui valent 0 sur $]-\infty, a] \cup [b, \infty[$ et 1 sur $[a + 1/n, b - 1/n]$. Alors

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\nu_n(\mathrm{d}x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\nu_n(\mathrm{d}x) \\ \leq\ &\limsup_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_k^2(x)\nu_n(\mathrm{d}x) - \int_{-\infty}^{\infty} f_k^1(x)\nu(\mathrm{d}x) \\ \leq\ &\int_{-\infty}^{\infty} f_k^2(x)\nu(\mathrm{d}x) - \int_{-\infty}^{\infty} f_k^1(x)\nu(\mathrm{d}x) \\ \leq\ &\nu(]a, a+1/k[\cup]b-1/k, b[).\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $k \to \infty$.
On obtient alors que la convergence a lieu pour les fonctions de la forme $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k \mathbb{1}([a_i, b_i])$ puis pour les fonctions f directement Riemann intégrable sur $\mathbb{R}$ à nouveau par encadrement puisque que les petites et grandes sommes de Darboux $d_n(f), D_n(f)$ convergent vers la même valeur : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

3.2)Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on construit f_n une suite de fonctions à support dans $[a, b]$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $f_n(x)$ croit vers 1. Ceci se fair par exemple en posant f_n la fonction affine par morceaux qui vaut 0 sur $]-\infty, a] \cup [b, \infty[$ et 1 sur $[a + 1/n, b - 1/n]$. Alors en faisant tendre $n \to \infty$ dans $\int_{-\infty}^{\infty} f_n \nu(\mathrm{d}x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n \nu(z + \mathrm{d}x)$, la convergence monotone implique que $\nu(]a, b[) = \nu(]z + a, z + b[)$, puis $\nu([a, b[) = \nu([z + a, z + b[)$.
On peut maintenant prouver que ν est proportionelle à la mesure de Lebesgue. Posons $C = \nu([0, 1[)$. Pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $\nu([k/n, (k + 1)/n[) = \nu([0, 1/n[)$ et par sommation on obtient $\nu([k/n, (k + 1)/n[) = C/n$. Enfin pour tout $a < b$, en écrivant $[a, b[$ comme limite croissante d'ensemble de la forme $\cup_{k=k_1}^{k_2} [k/n, (k + 1)/n[$, on en déduit $\nu([a, b[) = C(b - a)$.

3.3.a) Par 2.1), pour tout intervalle borné I, $U(I + t)$ est borné pour $t \in \mathbb{R}$. On sait que $U(t+\mathrm{d}x)$ admet une valeur d'adhérence quand $t \to \infty$ d'après 3.1.a). Pour obtenir la convergence faible de $U(t + \mathrm{d}x)$ quand $t \to \infty$, il suffit de prouver que l'unique valeur d'adhérence possible de cette suite est $\mathrm{d}x/m$.
Soit donc une suite $t_k \to \infty$ telle que $U(t_k + \mathrm{d}x)$ converge faiblement vers $\nu(\mathrm{d}x)$.
Pour tout g à support compact, pour tout $a, k \geq 0$

$$f(t_k + a) = \int_{-\infty}^{\infty} g(-a)U(\mathrm{d}x + t_k + a) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} g(-y)\nu(a + \mathrm{d}x).$$

D'après 2.5.c), $f(t_k + a) - f(t_k) \to 0$ quand $k \to \infty$ et on obtient $\int_{-\infty}^{\infty} g(-y)\nu(a + \mathrm{d}x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(-y)\nu(\mathrm{d}x)$. D'après 3.3), il existe donc $c > 0$ tel que $\nu(\mathrm{d}x) = c\mathrm{d}x$.
Il reste à prouver que $c = 1/m$. On considère pour cela $g(x) = \lambda([x, \infty[)$ pour $x \geq 0$ et $g(x) = 0$ pour $x < 0$. On constate que $f(x) = g \star U(x) = 1$ pour $x \geq 0$. De plus on peut appliquer 3.1.b) puisque g est monotone d'intégrale finie sur $\mathbb{R}$ et donc directement intégrable sur $\mathbb{R}$. On obtient que $f(t_k + x) \to c \int_{-\infty}^{\infty} g(-y)\mathrm{d}y = cm$ quand $x \to \infty$.

3.3.b) Prenons le cas où $\lambda = \delta_1(\mathrm{d}x)$ est la masse de Dirac en 1. Le support de U est alors $\mathbb{N}$ et $U = \sum_{i\geq 1} \delta_i(\mathrm{d}x)$. Par exemple, pour $h = 1/2$, $U([x, x + 1/2])$ oscille entre deux valeurs 0 et 1 suivant que $[x, x + 1/2]$ contient un entier ou non.

4.2) En notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, on a $S_{N_x} \leq x < S_{N_x+1}$. Or par la loi des grands nombres, $S_n/n \to m$ quand $n \to \infty$ et $N_x \to \infty$ quand $x \to \infty$. Donc $S_{N_x}/N_x \to m$ et $S_{N_x+1}/N_x \to m$ quand $x \to \infty$ p.s. Le précédent encadrement implique que N_x/x converge p.s. vers $1/m$.

5.1) On note $T_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ le temps de passage du $n$ième bus à la station. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_t \geq x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_k < t,\ T_{k+1} \geq t + x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_k < t,\ X_{k+1} \geq t + x - T_k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(X_k \in \mathrm{d}y)\mathbb{P}(X \geq t + x - y) = \int_0^t \mathbb{P}(X \geq t + x - y)U(\mathrm{d}y) \\
&\to m^{-1} \int_0^t \mathbb{P}(X \geq t + x - y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

en utilisant 3.3.a). En intégrant cette limite, on obtient la convergence de l'espérance de A_t quand $t \to \infty$.

Références

[1] Feller W ; (1971). *Introduction to Probability Theory and its Applications. Tome II.* Wiley series in probability and mathematical statistics.

[2] Grimmett G., Stirzaker D. *Probability and Random Processes*. Broché.

[3] Kendall D. (1959). Unitary dilations of Markov transition operators, and the corresponding integral representations for transition-probability matrices. *Probability and statistics* : The Harald Cramér volume (edited by Ulf Grenander.) 139-161.

[4] Lindvall T. (1977). A probabilistic proof of Blackwell's renewal theorem. *Ann. probability* 5 . 482-485.

[5] Ney P (1980). A refinement of the coupling method in renewal theory. *Stoch. Proc. Applic.*