Représentation des C^* algèbres.

Nicolas Jacquet

Niveau : M1

Difficulté : Difficile
Durée : plusieurs heures, au moins cinq

Rubrique(s) :
Analyse (analyse complexe)
Analyse fonctionnelle (espaces de Hilbert,...)

Une algèbre de Banach complexe est une $\mathbb{C}$-algèbre A munie d'une norme $\|.\|$ qui rend cet espace complet et telle que pour $a, b \in A$, on ait $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. Elle est unifère si elle possède un élément neutre, noté 1_A, tel que $\|1_A\| = 1$.
Une C^*-algèbre est une algèbre de Banach complexe $(A, \|.\|)$, munie d'une involution $*$ vérifiant pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a, b \in A$

$$(a^*)^* = a, \qquad (\lambda a + b)^* = \overline{\lambda} a^* + b^* \ , \quad (ab)^* = b^* a^* \ , \quad \|aa^*\| = \|a\|^2.$$

On a immédiatement que $\|a^*\| = \|a\|$ pour $a \in A$.
Un élément est dit autoadjoint si $a^* = a$. On voit immédiatement que dans le cas d'une C^*-algèbre unifère, 1_A est autoadjoint.
Un morphisme $\Phi : A \to B$ de C^*-algèbres est un morphisme d'algèbre vérifiant de plus $\Phi(a^*) = (\Phi(a))^*$, pour tout $a \in A$. Il sera dit unital lorsque A et B sont des C^*-algèbres unifères et que $\Phi(1_A) = 1_B$.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On note $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'ensemble des endomorphismes continus de $\mathcal{H}$. Lorsque l'on munit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de la norme subordonnée et que l'involution $*$ est l'adjoint, cet espace est une C^*-algèbre unifère. Nous remarquons que la notion de C^*-algèbre généralise les propriétés que l'on rencontre sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. D'autre part, toute sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ unifère, fermée et stable par l'adjoint est une C^*-algèbre unifère. Le but de ce problème est de montrer la réciproque.

1 Spectre d'un élément dans une algèbre de Banach

Soit A une algèbre de Banach complexe et unifère et soit $a \in A$. Le spectre de a, que l'on note $Sp(a)$, est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda 1_A - a$ ne soit pas inversible. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on notera $D(z, r)$ le disque dans $\mathbb{C}$ de centre z et de rayon r. Le but de cette section est de montrer que $Sp(a)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$ non vide et de déterminer une borne supérieure de $\{|\lambda|,\ \lambda \in Sp(a)\}$.

1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a^n \neq 0$ et on pose $u_n = \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.
   (a) Montrer que pour tout $r, s \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a $u_{rs} \leq u_r$.
   (b) Soient $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n \geq k + 1$. Montrer que $u_n \leq u_k \left(u_1/u_k\right)^{k/n}$.

(c) On pose
$$\rho(a) = \inf_{n\geq 1}\{\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\}.$$
En déduire que la suite $(\|a^n\|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\rho(a)$ et que $\rho(a) \leq \|a\|$.

(d) Généraliser ce résultat s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

2. Montrer que si $\rho(a) < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a^n$ est normalement convergente et que $(1_A - a)$ est inversible avec la relation
$$(1_A - a)^{-1} = \sum_{n\geq 0} a^n.$$
3. Montrer que si $|\lambda| > \rho(a)$, alors $\lambda \notin Sp(a)$.
4. Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de A, que l'on note A^{inv}, est un ouvert de A. En déduire que $Sp(a)$ est compact.
5. (a) Soit φ une forme linéaire continue de A. Montrer que la fonction $f_\varphi : z \mapsto \varphi\left((z1_A - a)^{-1}\right)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus Sp(a)$.

   (b) En déduire que $Sp(a)$ est non vide.
6. On suppose que $\rho(a) = 0$. Montrer que $Sp(a) = \{0\}$.
7. Soit $r = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in Sp(a)\}$. On suppose que $r < \rho(a)$. Soit φ une forme linéaire continue de A.

   (a) Montrer que la fonction $g_\varphi : z \mapsto \varphi\left((1_A - za)^{-1}\right)$ est décomposable en série entière au voisinage de zéro et que sur $D(0, 1/r)$, elle est égale à $\sum_{n\geq 0} z^n\varphi(a^n)$.

   (b) En déduire que pour $r < s < \rho(a)$, on a
$$|\varphi(a^n)| \leq s^n\|\varphi\| \sup_{|z|=s^{-1}} \|(1_A - za)^{-1}\|.$$
   (c) En déduire une contradiction et que $r = \rho(a)$ et $r \leq \|a\|$.
8. Soit $f \in \mathbb{C}[T]$. Montrer que $Sp(f(a)) = f(Sp(a))$.

A partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, A désignera une C^*-algèbre unifère.

2 Spectre d'un élément d'une C^*-algèbre et calcul fonctionnel

Le but de cette section est de généraliser la relation obtenue à la question 8 de la partie précédente aux fonctions continues. Soit B une autre C^*-algèbre unifère et $\Phi : A \to B$ un morphisme unital de C^*-algèbres. Soit $a \in A$.

1. Montrer que $Sp(a^*) = \overline{Sp(a)}$

   On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette section que a est **autoadjoint**.

2. (a) Soit $\lambda = x + iy \in Sp(a)$, avec x et y réels. Soit $t \in \mathbb{R}$. Remarquer que $Sp(a + it1_A) = Sp(a) + it$ puis montrer que

$$|\lambda + it|^2 \leq \|a\|^2 + t^2.$$

   (b) En déduire que $Sp(a) \subset \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\rho(a) = \|a\|$ et que $\|a\|$ ou $-\|a\|$ est dans $Sp(a)$. En déduire que le seul élément autoadjoint ayant un spectre réduit à $\{0\}$ est 0.
4. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $b \in A$, on a $\|\Phi(b)\| \leq \|b\|$.
5. Soit $\mathcal{C}(Sp(a))$ la C^*-algèbre formée des fonctions continues défines sur $Sp(a)$ à valeurs complexes , munie de la norme uniforme.
   (a) Montrer que pour $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ telles que les fonctions polynomiales associées coïncident sur $Sp(a)$, on a $P(a) = Q(a)$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique morphisme continu de C^*-algèbres

$$\begin{cases} \mathcal{C}(Sp(a)) & \rightarrow & A \\ f & \mapsto & f(a) \end{cases}$$

   qui envoie la fonction constante égale à un sur 1_A et $id_{Sp(a)}$ sur a.
   (c) Montrer que pour $f \in \mathcal{C}(Sp(a))$, on a $Sp(f(a)) = f(Sp(a))$ et $f(a)$ est autoadjoint si f est à valeurs réelles.
6. (a) Montrer que pour $f \in \mathcal{C}(Sp(a))$, on a $\Phi(f(a)) = f(\Phi(a))$.
   (b) On suppose de plus Φ injective. Soit $x \in A$. En utilisant la fonction $h : t \mapsto \sup(|t| - \|\Phi(xx^*)\|, 0)$, montrer que $\|\Phi(x)\| = \|x\|$.

3 Cône positif d'une C^*-algèbre et états

On note A_{sa} l'ensemble des éléments autoadjoints et A_+ l'ensemble des éléments autoadjoints dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Le but de cette section est de comprendre la structure de A_+ afin de pouvoir ensuite définir les formes linéaires positives puis les états.
On rappelle qu'un cône positif $\mathfrak{c}$ est un ensemble stable par scalaire positif, i.e. $\forall x \in \mathfrak{c}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, $\lambda x \in \mathfrak{c}$.

1. Soit $a \in A_{sa}$ tel que $\|a\| \leq 1$. Montrer que $a \in A_+$ si et seulement si $\|1_A - a\| \leq 1$.
2. Soient $a, b \in A$.
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On suppose que $\lambda 1_A - ab$ est inversible. Montrer que $\lambda 1_A - ba$ est inversible d'inverse $\lambda^{-1}\left(1_A + b(\lambda 1_A - ab)^{-1}a\right)$.
   (b) En déduire que $Sp(ab) \cup \{0\} = Sp(ba) \cup \{0\}$.
3. Monter que A_+ est un cône positif convexe fermé de A_{sa}.
4. Montrer que $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$.
5. Soit $a \in A_{sa}$. Montrer que $a \in A_+$ si et seulement s'il existe $b \in A_{sa}$ tel que $a = b^2$.
6. Soit $b \in A$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \inf(t, 0)$. En utilisant la question 5 de la partie précédente, on peut prendre l'image par f d'un élément autoadjoint et on pose $c = bf(b^*b)$.

(a) Montrer que $-cc^*$ et $-c^*c$ sont dans A_+.

(b) Montrer qu'il existe un couple $(u,v) \in A_{sa}^2$ tels que $c = u + iv$. En considérant $cc^* + c^*c$, en déduire que bb^* est dans A_+, puis que $A_+ = \{a \in A;\ \exists d \in A,\ a = dd^*\}$.

Une forme linéaire ϕ sera dite positive lorsque $\phi(A_+) \subset \mathbb{R}_+$ et lorsque celle-ci est de plus de norme un, on l'appelle état.

7. Soit ϕ une forme linéaire positive.
   (a) Montrer que $\phi(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour $a, b \in A$, on a
   $$|\phi(b^*a)|^2 \leq \phi(b^*b)\phi(a^*a).$$
   (c) En déduire que ϕ est continue et que $\|\phi\| = \phi(1_A)$.
8. Soit $a \in A \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe un état ϕ tel que $\phi(a^*a) > 0$.

4 Construction GNS et théorème de Gelfand-Neimark

1. Soit ϕ un état et on pose $V_\phi = \{a \in A,\ \phi(aa^*) = 0\}$.
   (a) Montrer que l'application $(a,b) \mapsto \phi(b^*a)$ définit un produit scalaire hermitien sur A/V_ϕ.
   (b) Soit $\mathcal{H}_\phi$ un espace de Hilbert complétant A/V_ϕ, tel que $\overline{A/V_\phi} = \mathcal{H}_\phi$. Soit $a \in A$ et L_a la multiplication à gauche par a sur A/V_ϕ. Montrer que L_a est bien définie et s'étend en un endomorphisme continu sur $\mathcal{H}_\phi$.
   (c) En déduire la construction GNS : il existe un espace de Hilbert $(\mathcal{H}_\phi, \langle ., . \rangle)$ et un morphisme de C^*-algèbres unital $\pi_\phi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)$ et un vecteur $\xi_\phi \in \mathcal{H}_\phi$ tel que pour $a \in A$, on ait $\phi(a) = \langle \xi_\phi, \pi_\phi(a)\xi_\phi \rangle$.
2. Soit $a \in A \setminus \{0\}$ et ϕ_a un état tel que $\phi_a(a^*a) > 0$ (existe grâce à la question **3)**8). On note $\pi_a : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\phi_a})$ la construction GNS correspondante. On note $\langle ., . \rangle_a$ le produit scalaire sur $\mathcal{H}_{\phi_a}$. On pose $\mathcal{H} := \left\{(h_a)_{a\in A} \in \bigoplus_{a\in A} \mathcal{H}_{\phi_a},\ \sum_{a\in A} \|h_a\|_a^2 < +\infty\right\}$. $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit hermitien suivant :
   $$\langle (h_a)_{a\in A}, (h'_a)_{a\in A} \rangle = \sum_{a\in A} \langle h_a, h'_a \rangle_a.$$
   Construire un morphisme unital de C^*-algèbres injectif de A dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. En déduire que A peut être vue comme une sous-algèbre unifère fermé de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ et stable par l'adjoint.

Indications et Commentaires : Rappelons deux théorèmes de Hahn Banach.

Théorème de prolongement de Hahn Banach Soit E un espace vectoriel normé. Pour tout $x \in E$, non nul, il existe $\phi \in E^*$ tel que $\| \phi \| = 1$ et $\phi(x) = \| x \|$.
Théorème de séparation de Hahn-Banach. Soit E un espace vectoriel normé, A et B deux ensembles convexes disjoints.

Si A ouvert, alors il existe une forme linéaire continue ϕ (ou un hyperplan fermé $\{\phi(x) = \alpha\}$) qui sépare A et B au sens large :

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B\ :\ \phi(x) \geq \alpha, \quad \phi(y) \leq \alpha.$$

Si A est fermé et B compact, alors il existe ue forme linéaire continue ϕ (ou un hyperplan fermé $\{\phi(x) = \alpha\}$) qui sépare A et B au sens strict :

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall x \in A,\ \forall y \in B\ :\ \phi(x) \geq \alpha + \epsilon, \quad \phi(y) \leq \alpha.$$

On a montré dans ce problème que toute C^*-algèbre peut être vue comme une algèbre d'opérateurs agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Ceci s'appelle une représentation sur $\mathcal{H}$. Cette représentation est dite unitaire lorsque l'on a une algèbre d'opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$. Une représentation est appelée irréductible lorsque les seuls sous-espaces stables de $\mathcal{H}$ par tous les opérateurs sont $\{0\}$ et $\mathcal{H}$. L'ensemble des états forme évidemment un ensemble convexe et les points extremaux de cet ensemble s'appellent les états purs. Dans la construction GNS, une représentation est irréductible si et seulement si elle est associée à un état pur.

Les C^*-algèbres et leurs théorèmes s'appliquent en physique. D'ailleurs l'utilisation du mot « état »pour désigner les formes linéaires positives de norme un est issue de la physique. Le recours aux C^*-algèbres provient du problème de notre géométrie classique pour unifier la théorie de la relativité générale et la physique quantique. Aucune description à l'aide de la géométrie classique, c'est à dire un ensemble constitué de points, n'est valable pour des très petites échelles de l'ordre de la longueur de Planck (10^{-33} cm). Ceci s'explique grâce à la relation d'incertitude de Heisenberg qui montre que plus on saura avec précision qu'une particule occupe un certain point à un instant donné, moins on pourra prédire sa position à l'instant suivant. La géométrie classique qui a pour base le point, est dite commutative. Expliquons-en la raison afin d'avoir un éclairage sur la géométrie non commutative qui pourrait être une solution pour unifier les théories physiques. Pour X un espace localement compact on peut lui associer une C^*-algèbre commutative $\mathcal{C}_0(X)$, l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini. Cette correspondance nous permet de voir que pour comprendre un espace X, il faut faire des observations ou des mesures, c'est à dire appliquer des fonctions aux points de cet espace. On appelle observables ces fonctions. Ainsi dans le cadre de la géométrie commutative, l'espace de fonctions ou l'espace des observables considéré forme une C^*-algèbre commutative.

Changeons de point de vue et ne considérons plus le point comme objet de départ d'un espace. Partons de l'espace des observables, ce qui revient à s'intéresser à une C^*-algèbre. Dans le cadre de la géométrie non commutative, cette C^*-algèbre n'est plus commutative. Donc la géométrie que l'on considère n'est plus vue comme une collection de points. Cette idée a été initiée et développée par Alain Connes dans les années 1980. Cette évolution de la géométrie commutative à la géométrie non commutative revient à passer d'un raisonnement local (autour du point) à un raisonnement avec des entités globales, l'idée étant de faire des moyennes. Les états purs sembleraient jouer le rôle des « points »de l'espace non commutatif, mais ceci n'est qu'une analogie et non une définition stricte. On pourra consulter la thèse de Pierre Martinetti [3] si l'on désire approfondir ce sujet.

Donnons maintenant une application des C^*-algèbres en théorie des groupes. L'étude des représentations irréductibles unitaires d'un groupe G localement compact (c'est-à-dire un morphisme de groupe T de G dans les endomorphismes unitaires d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont les seuls sous-epsaces stables par $T(G)$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{H}$) est étroitement liée avec les représentations irréductibles unitaires d'une certaine C^*-algèbre . Cette étude a des retombées importantes en analyse harmonique. En effet nous cherchons un équivalent de la formule de Plancherel pour le groupe G. Celle-ci se traduit dans le cas du groupe $\mathbb{R}$ par la relation $\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2$, pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ et dans le cas du groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, par la relation $\int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$, pour $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dans le cas de $\mathbb{R}$ les représentations irréductibles unitaires sont les caractères $x \mapsto e^{iyx}$, pour $y \in \mathbb{R}$, que l'on voit apparaître dans la transformée de Fourier et dans le cas $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ les représentations irréductibles unitaires sont les caractère $x \mapsto e^{inx}$, pour $n \in \mathbb{Z}$, que l'on voit apparaître dans les coefficients de Fourier. Ainsi les représentations irréductibles unitaires semblent jouer un rôle important et on notera $\hat{G}$ les classes d'équivalence des représentations irréductibles unitaires de G. Pour généraliser la formule de Plancherel, il faut relier $\int_G |f|^2 d\lambda$, ou λ est une mesure de Haar, à une intégrale sur $\hat{G}$. Mais il faut définir une mesure sur $\hat{G}$ et donc munir cet espace d'une topologie. Dans certains cas, l'étude de $\hat{G}$ se ramène à l'étude des représentations unitaires irréductibles d'une C^*-algèbre. Etudions ce lien dans la situation simple du groupe fini. Si H est un groupe fini et si on note $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des fonctions complexes sur H, pour laquelle la multiplication est le produit de convolution, alors $\mathcal{L}(H)$ est isomorphe en tant que C^*-algèbre à $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$. Les nombres n_i donnent les dimensions des éléments de $\hat{H}$. Dans un premier temps on établit une bijection entre $\hat{G}$ et l'ensemble des représentations irréductibles unitaires d'une C^*-algèbre A. Grâce à la construction GNS, ce dernier ensemble est en bijection avec l'ensemble des états purs de A. Cet ensemble étant un espace de fonctions il est assez aisé de le munir d'une certaine topologie puis de la transférer sur l'ensemble des représentations irréductibles unitaires de A puis sur $\hat{G}$. Pour plus de détails, on pourra consulter [1].

1)1)b) Par division euclidienne il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![1;k]\!]$ tels que l'on ait $n = pk + r$.
1)1)c) Soit $\varepsilon > 0$, donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\rho(a) \leq u_k < \rho(a) + \varepsilon$. Utiliser la question précédente avec $n \geq k + 1$.
1)5)a) Pour $z_0 \in \mathbb{C} \setminus Sp(a)$, poser $a_0 = z_0 1_A - a$ et pour $h \in \mathbb{C}$ petit, montrer la décomposition en séries entières $f_\varphi(z_0 + h) = \sum_{n \geq 0} h^n \varphi(a_0^{-1-n})$.
1)5)b) Montrer que si $Sp(a)$ est vide, alors a est inversible et considérer une forme linéaire continue φ telle que $\varphi(a^{-1}) \neq 0$. Utiliser la fonction f_φ et trouver une contradiction à l'aide du théorème de Liouville.
1)7)a) Décomposer g_φ en séries entières au voisinage de 0 et à l'aide de f_φ, montrer que g_φ est holomorphe sur $D(0, 1/r)$.
1)7)b) Utiliser l'inégalité de Cauchy.
1)7)c) Pour chaque entier n, choisir une forme linéaire φ telle que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(a^n) = \|a^n\|$.
1)8) Pour $f(Sp(a)) \subset Sp(f(a))$, écrire $f(T) - f(\lambda) = (T - \lambda)g(T)$, pour $\lambda \in Sp(a)$. Pour l'autre inclusion, écrire $f(T) - \mu = \alpha \prod_{i=1}^n (T - \lambda_i)$, pour $\mu \in Sp(f(a))$.

2)3) Etudier la suite extraite $(\|a^{2k}\|^{\frac{1}{2k}})_{k \in \mathbb{N}}$ en utilisant la relation $\|a^* a\| = \|a\|^2$.
2)4) Poser $a = bb^*$ qui est autoadjoint. Remarquer que $Sp(\Phi(a)) \subset Sp(a)$ et utiliser la question précédente.
2)5)c) Pour l'inclusion $f(Sp(a)) \subset Sp(f(a))$, prendre une suite de polynômes $(f_n)_n$ qui converge uniformément vers f et utiliser **1)**8, en se rappelant que $A \setminus A^{inv}$ est fermé. Pour l'inclusion inverse, pour $\mu \notin f(Sp(a))$, considérer sur $Sp(a)$ la fonction $g = (\mu - f)^{-1}$.
2)6)b) Pour a autoadjoint, montrer à l'aide de **2)**3) et 5)b) que $h(a) = 0$ si et seulement si $\|a\| \leq \|\Phi(xx^*)\|$. Conclure grâce à la question précédente.

3)1) Utiliser **2)**3).
3)3) Pour la convexité de A_+, montrer à l'aide de **3)**1) que $\frac{a+b}{2} \in A_+$. Pour montrer que A_+ est fermé , remarquer que $a \in A_+$ si et seulement si $\|\|a\|1_A - a\| \leq \|a\|$.
3)5) Si $Sp(a) \subset \mathbb{R}_+$, grâce à **2)**5)a), on peut définir $b = \sqrt{a}$.
3)6)a) Remarquer que $tf(t)^2 = f(t)^3$ et que f est à valeurs négatives.
3)6)b) Montrer que $cc^* = 2u^2 + 2v^2 - c^* c$ qui est dans A_+. Remarquer que pour x autoadjoint, $f(x) = 0$ implique que $Sp(x) \subset \mathbb{R}_+$.
3)7)a) Montrer d'abord que $\phi(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$, en remarquant que $\|a^* a\| 1_A - a^* a \in A_+$.
3)7)b) Montrer que $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$ en utilisant la décomposition de **3)**6)b). Enfin penser à Cauchy-Schwartz.
3)7)c) Remarquer que $\|a^* a\| 1_A - a^* a \in A_+$
3)8) Utiliser le théorème de Hahn-Banach sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel A_{sa}, version fermé (A_+)/compact $(-a^* a)$. Prolonger la forme linéaire obtenue sur A tout entier.

4)1)a) Montrer que $V_\phi = \{a \in A,\ \phi(b^*a) = 0,\ \forall b \in A\} = \{a \in A,\ \phi(a^*b) = 0,\ \forall b \in A\}$.
4)1)b) Pour majorer $\|L_a(\overline{b})\|^2_{\mathcal{H}_\phi}$, avec $\overline{b} \in A/V_\phi$, remarquer que la forme linéaire $c \mapsto \phi(b^*cb)$ est positive.
4)1)c) Prendre $\pi_\phi(a)$ le prolongement de L_a sur $\mathcal{H}_\phi$ et ξ_ϕ la projection de 1_A sur A/V_ϕ.
4)2) Pour $b \in A$, prendre $\pi(b) = (\pi_a(b))_{a\in A}$. Pour l'injectivité, montrer que $\pi_a(a)(\xi_{\phi_a})$ est non nul.

Corrections. 1) Spectre d'un élément dans une algèbre de Banach

1. (a) On a $\|a^{rs}\| \leq \|a^r\|^s$ et donc $u_{rs} \leq u_r$.
   (b) Par division euclidienne il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![1;k]\!]$ tels que l'on ait $n = pk+r$. On a $\|a^n\| \leq \|a^{kp}\| \cdot \|a^r\|$ et grâce à la question 1)a), pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ on a $u_l = u_{l\cdot 1} \leq u_1$. Ainsi
   $$u_n \leq u_k^{kp/n} u_r^{r/n} \leq u_k^{kp/n} u_1^{r/n} = u_k \left(\frac{u_1}{u_k}\right)^{r/n} \leq u_k \left(\frac{u_1}{u_k}\right)^{k/n}.$$
   (c) Clairement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $\rho(a) \leq u_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_k < \rho(a) + \varepsilon$. Grâce à la question précédente, on a $u_n \leq u_k \left(\frac{u_1}{u_k}\right)^{k/n}$. Ainsi, comme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_1}{u_k}\right)^{k/n} = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \geq N$, on ait $u_n < \rho(a) + \varepsilon$. Ainsi on a $\lim_{n\to+\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(a)$.
   L'inégalité $\rho(a) \leq \|a\|$ résulte des propriétés des normes d'algèbre.
   (d) S'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^N = 0$, alors $a^n = 0$, pour tout $n \geq N$. Donc dans ce cas le résultat est immédiat.
2. Soit $r \in]\rho(a), 1[$. A partir d'un certain rang, on a $\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r$, soit $\|a^n\| \leq r^n$. Donc la série $\sum_n a^n$ est normalement convergente dans un espace de Banach, donc convergente. La relation se montre par passage à la limite dans l'égalité $(1_A - a)\sum_{k=0}^n a^k = 1_A - a^{n+1}$.
3. En remarquant que λ est non nul et $\lambda 1_A - a = \lambda(1_A - \lambda^{-1}a)$, la relation $\rho(\lambda^{-1}a) = |\lambda|^{-1}\rho(a) < 1$ permet de conclure grâce à la question précédente.
4. Soit $a \in A^{inv}$. Grâce aux question **1)**1) et 2), $1_A + a^{-1}h$ est inversible pour $h \in D(0, \|a^{-1}\|^{-1})$. La relation $a + h = a(1_A + a^{-1}h)$ permet d'avoir l'inclusion $D(a, \|a^{-1}\|^{-1}) \subset A^{inv}$, pour tout $a \in A^{inv}$, donc A^{inv} est un ouvert de A. En considérant l'application continue $\psi : \mathbb{C} \to A, \lambda \mapsto \lambda 1_A - a$, on conclut que $\psi^{-1}(A^{inv}) = \mathbb{C} \setminus Sp(a)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Donc $Sp(a)$ est un fermé de $\mathbb{C}$ et borné grâce à la question **1)**3), donc compact.
5. (a) Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus Sp(a)$ quelconque et on pose $a_0 = z_0 1_A - a \in A^{inv}$. Pour $h \in D(0, \|a_0^{-1}\|^{-1}/2)$, on a $((z_0 + h)1_A - a)^{-1} = (h1_A + a_0)^{-1} = a_0^{-1}(1_A + ha_0^{-1})^{-1} = \sum_{n\geq 0} h^n a_0^{-1-n}$ et comme φ est une forme linéaire continue, alors $f_\varphi(z_0 + h) = \sum_{n\geq 0} h^n \varphi(a_0^{-1-n})$. Mais
   $$|h^n \varphi(a_0^{-1-n})| \leq \|\varphi\||h|^n \|a_0^{-1}\|^{n+1} \leq \|\varphi\|\|a_0^{-1}\|/2^n.$$
   Ceci permet d'affirmer que f_φ est décomposable en séries entières au voisinage de z_0. Donc f_φ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus Sp(a)$.
   (b) Supposons que $Sp(a) = \emptyset$. Ainsi a est inversible et il existe une forme linéaire continue de A telle que $\varphi(a^{-1}) \neq 0$. La fonction f_φ est entière. Pour $|z| > \|a\|$, en raisonnant comme dans la question précedente , on a $f_\varphi(z) = z^{-1}\sum_{n\geq 0} z^{-n}\phi(a^n)$ et donc $|f_\varphi(z)| \leq \|\varphi\|/(|z| - \|a\|)$. Donc $\lim_{|z|\to+\infty} |f_\varphi(z)| = 0$. Grâce au théorème de Liouville, f est identiquement nulle sur $\mathbb{C}$. Mais $f_\varphi(0) = \varphi(a^{-1}) \neq 0$ apporte une contradiction, donc $Sp(a)$ est non vide.
6. La question **1)**3) implique que $Sp(a) \subset \{0\}$. Comme $Sp(a) \neq \emptyset$, alors $Sp(a) = \{0\}$.

7. (a) Soit $z \in D(0, \rho(a)^{-1}/2)$. A partir d'un certain rang, $\|a^n\| \leq \left(\frac{5}{4}\rho(a)\right)^n$ et donc $\|z^n a^n\| \leq \left(\frac{5}{8}\right)^n$. En raisonnant comme à la question **1)**5)a), g_φ est décomposable en séries entières sur $D(0, \rho(a)^{-1}/2)$ et $g_\varphi(z) = \sum_{n\geq 0} z^n \varphi(a^n)$. Pour $0 < |z| < 1/r$, on a $(1_A - za) = z(z^{-1}1_A - a)$ qui est inversible car $|z^{-1}| > r$. Ainsi g_φ est bien définie sur $D(0, 1/r)$, et pour $z \in D(0, 1/r) \setminus \{0\}$, on a la relation $g_\varphi(z) = z f_\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$. Par conséquent g est holomorphe sur $D(0, 1/r)$ et pour $z \in D(0, 1/r)$, on a $g(z) = \sum_{n\geq 0} z^n \varphi(a^n)$.

   (b) Comme $1/s \in D(0, 1/r)$, en utilisant l'inégalité de Cauchy pour g_φ, on a

$$|\varphi(a^n)s^{-n}| \leq \sup_{|z|=s^{-1}} \|\varphi((1_A - za)^{-1})\| \leq \|\varphi\| \sup_{|z|=s^{-1}} \|(1_A - za)^{-1}\|.$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de prolongement de Hahn Banach, il existe une forme linéaire telle que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(a^n) = \|a^n\|$. Ainsi, grâce à la question précédente,

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq s \left(\sup_{|z|=s^{-1}} \|(1_A - za)^{-1}\| \right)^{\frac{1}{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Donc par passage à la limite sur n, on a $\rho(a) \leq s$, ce qui est contradictoire avec la définition de s. Ainsi $r \geq \rho(a)$ et la question **1)**3) permet d'obtenir $r = \rho(a)$.

8. Soit $\lambda \in Sp(a)$ et g un polynôme tel que $f(T) - f(\lambda) = (T - \lambda)g(T)$. Donc $f(a) - f(\lambda)1_A = (a - \lambda 1_A)g(a)$ n'est pas inversible, donc $f(\lambda) \in Sp(f(a))$.
Soit $\mu \in Sp(f(a))$. On peut écrire le polynôme $f(T) - \mu$ sous la forme $\alpha \prod_{i=1}^n (T - \lambda_i)$. Ainsi $f(a) - \mu 1_A = \alpha \prod_{i=1}^n (a - \lambda_i 1_A)$ qui n'est pas inversible. Ainsi comme tous les termes du produit commutent entre eux, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a - \lambda_i 1_A$ ne soit pas inversible et donc $\lambda_i \in Sp(a)$. Comme $f(\lambda_i) = \mu$, alors $\mu \in f(Sp(a))$.

2) Spectre d'un élément d'une C^*-algèbre et calcul fonctionnel

1. L'équivalence $a - \lambda 1_A$ est inversible si et seulement si $a^* - \overline{\lambda} 1_A$ l'est, donne le résultat.
2. (a) En utilisant que $Sp(a + it1_A) = Sp(a) + it$, la question **1)**1) et 7)c) permettent d'avoir les inégalités suivantes :

$$|\lambda + it|^2 \leq (\rho(a + it1_A))^2 \leq \|a + it1_A\|^2 = \|(a + it1_A)(a^* - it1_A)\|.$$

   Comme a est autoadjoint, on obtient finalement,

$$|\lambda + it|^2 \leq \|a^2 + t^2 1_A\| \leq \|a\|^2 + t^2.$$

   (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + (y + t)^2 \leq \|a\|^2 + t^2$, soit $2yt \leq \|a\|^2 - x^2 - y^2$. Donc $y = 0$ et $Sp(a) \subset \mathbb{R}$.
3. Comme la suite $(\|a^n\|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\rho(a)$ alors la sous-suite $(\|a^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}})_{k\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers la même limite. Comme a est autoadjoint, alors $\|a^2\| = \|aa^*\| = \|a\|^2$. Par récurrence on montre que $\|a^{2^k}\| = \|a\|^{2^k}$, d'où $\rho(a) = \|a\|$.
Ceci permet de trouver $\lambda \in Sp(a)$ tel que $|\lambda| = \|a\|$. Comme $Sp(a) \subset \mathbb{R}$, alors $\lambda = \pm\|a\|$.
Soit b autoadjoint. Si $Sp(b) = \{0\}$, alors $\rho(b) = 0$, donc $\pm\|b\| = 0$ et $b = 0$.
4. Soit $a = bb^*$. Si $\lambda 1_A - a$ est inversible, alors $\lambda 1_B - \Phi(a)$ aussi. Donc $Sp(\Phi(a)) \subset Sp(a)$. De plus $\Phi(a) = \Phi(b)(\Phi(b))^*$ étant autoajoint on a les inégalités :

$$\|\Phi(b)\|^2 = \|\Phi(b)(\Phi(b))^*\| = \|\Phi(a)\| = \sup\{|\lambda|, \ \lambda \in Sp(\Phi(a))\}$$

$$\leq \sup\{|\lambda|, \ \lambda \in Sp(a)\} = \|a\| = \|b\|^2.$$

5. (a) Grâce aux questions **1)**8) et **2)**3), on a

$$\|P(a) - Q(a)\| = \sup_{\lambda \in Sp(a)} \{|P(\lambda) - Q(\lambda)|\} = 0.$$

(b) Ce morphisme doit envoyer une fonction polynôme P sur $P(a)$. Il est bien défini sur l'algèbre des fonctions polynômes définies sur $Sp(a)$ grâce à la question précédente. Les questions **1)**8) et **2)**3) permettent aussi de voir que ce morphisme défini sur l'algèbre des fonctions polynômes sur $Sp(a)$ est isométrique et donc il est uniformément continu. Le théorème de Stone-Weierstrass et la complétude de A permettent de conclure qu'il existe un unique prolongement de ce morphisme sur la C^*-algèbre $\mathcal{C}(Sp(a))$.

(c) Soit $\mu \in f(Sp(a))$. Il existe $\lambda \in Sp(a)$ tel que $\mu = f(\lambda)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur $Sp(a)$. Ainsi par continuité du morphisme construit dans la question précédente, $f_n(a) - f_n(\lambda)1_A$ converge vers $f(a) - f(\lambda)1_A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'élément $f_n(a) - f_n(\lambda)1_A$ n'est pas inversible grâce à **1)**8) et comme $A \setminus A^{inv}$ est un fermé de A, alors $f(a) - f(\lambda)1_A$ n'est pas inversible et donc on a $f(\lambda) = \mu \in Sp(f(a))$.
Soit $\mu \notin \mathbb{C} \setminus f(Sp(a))$. Soit $g = (\mu - f)^{-1}$ qui est un élément de $\mathcal{C}(Sp(a))$. Comme $(\mu - f)g = 1$ sur $Sp(a)$, alors grâce à l'application de la question précédente on a $(\mu 1_A - f(a))g(a) = 1_A$ et donc $\mu \notin Sp(f(a))$.
On suppose que f est une fonction continue à valeurs réelles sur $Sp(a)$. Pour tout polynôme P, on a $(P(a))^* = \overline{P}(a)$. $*$ est une application continue car pour $x \in A$, on a $\|x^*\| = \|x\|$, alors grâce au théorème de Stone-Weierstrass et la continuité de $*$, on en déduit que $(f(a))^* = \overline{f}(a) = f(a)$.

6. (a) Comme $\Phi(P(a)) = P(\Phi(a))$, pour tout polynôme P et que Φ est nécéssairement continue grâce à la question **2)**4), on conclut grâce au théorème de Stone-Weierstrass et la continuité de l'application de la question **2)**5)a).

   (b) Grâce à la question **2)**5)b), $\rho(h(a)) = \sup\{\sup(|\lambda| - \|\Phi(xx^*)\|, 0),\ \lambda \in Sp(a)\}$. Grâce à la question **2)**3), $h(a) = 0$ si et seulement si $h|_{Sp(a)} = 0$, si et seulement si $\|a\| = \rho(a) \leq \|\Phi(xx^*)\|$. Par conséquent, pour $a = \Phi(xx^*) = \Phi(x)(\Phi(x))^*$, on a $0 = h(\Phi(xx^*)) = \Phi(h(xx^*))$. Ainsi par injectivité de Φ, on a $h(xx^*) = 0$ soit $\|x\|^2 = \|xx^*\| \leq \|\Phi(xx^*)\| = \|\Phi(x)\|^2$, d'où le résultat.

3) Cône positif d'un C^*-algèbre et états

1. Si $a \in A_+$, alors $Sp(a) \subset [0; \|a\|] \subset [0; 1]$. Donc on a $Sp(1_A - a) \subset [0; 1]$, grâce à **1)**8). Donc on a $\|1_A - a\| = \rho(1_A - a) \leq 1$.
Si $\|1_A - a\| \leq 1$, alors $Sp(a - 1_A) \subset [0; 1]$, donc $Sp(a) \subset [0; 2]$, grâce à **1)**8) puis $a \in A_+$.
2. (a) Calcul immédiat en utilisant la relation $ab(\lambda 1_A - ab)^{-1} = \lambda(\lambda 1_A - ab)^{-1} - 1_A$.

   (b) Immédiat grâce à la question précédente.
3. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $a \in A_+$, alors λa est autoadjoint et $Sp(\lambda a) \subset \mathbb{R}_+$, donc A_+ est un cône. Pour la convexité, il suffit de montrer que pour $a, b \in A_+$, on a $\frac{a+b}{2} \in A_+$. Comme A_+ est un cône, on peut supposer que $\|a\| \leq 1$ et $\|b\| \leq 1$. On a $\left\|\frac{a+b}{2}\right\| \leq 1$ et $\frac{a+b}{2}$ est autoadjoint, ainsi grâce à la question **3)**1), comme on a $\left\|\frac{a+b}{2} - 1_A\right\| \leq \frac{1}{2}\|a - 1_A\| + \frac{1}{2}\|b - 1_A\| \leq 1$ alors on a $\frac{a+b}{2} \in A_+$.
Soit $a \in A_{sa}$. Toujours grâce à la question **3)**1), a est dans A_+ si et seulement si $\frac{a}{\|a\|} \in A_+$ si et seulement si $\left\|1_A - \frac{a}{\|a\|}\right\| \leq 1$ si et seulement si $\|\|a\|1_A - a\| \leq \|a\|$. Ce qui permet de voir que A_+ est fermé dans A_{sa}.
4. Si $a \in A_+ \cap (-A_+)$, alors $Sp(a) = \{0\}$ et donc $a = 0$.
5. Si $a \in A_+$, alors $Sp(a) \subset \mathbb{R}_+$ et a est autoadjoint. Donc on peut définir $b = \sqrt{a}$, grâce à l'application de la question **2)**5)b). Comme cette application est un morphisme d'algèbre, alors $b^2 = a$. On montre comme dans la question **2)**6)b) que b est autoadjoint.
Si $b^2 = a$, alors la question **1)**8) implique que $Sp(a) \subset \mathbb{R}_+$.
6. (a) On a $c^*c = f(b^*b)b^*bf(b^*b) = (f(b^*b))^3$, car $tf(t)^2 = f(t)^3$ pour t dans $\mathbb{R}$. La fonction f étant négative sur $\mathbb{R}$, on a $Sp(c^*c) \subset \mathbb{R}_-$, soit $-c^*c \in A_+$. La question **3)**2)b), permet d'avoir $-cc^* \in A_+$.

(b) $u = \frac{c+c^*}{2}$ et $v = \frac{c-c^*}{2i}$ est l'unique solution du problème. D'autre part $cc^* + c^*c = 2u^2 + 2v^2$, donc $c^*c = 2u^2 + 2v^2 - cc^*$, qui est donc dans A_+, car cet ensemble est un cône convexe. Ainsi $c^*c \in A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$. Grâce au calcul de la question précédente, on a $f(b^*b)^3 = 0$, donc $\{0\} = Sp(f(b^*b)^3) = f^3(Sp(b^*b))$, grâce à la question **2)**5)c) et donc $f|_{Sp(b^*b)} = 0$ et par conséquent $Sp(b^*b) \subset \mathbb{R}_+$. D'où l'inclusion $A_+ \supset \{a \in A;\ \exists d \in A,\ a = dd^*\}$. L'inclusion inverse est donnée par la question **3)**5).

7. (a) Soit $a \in A_{sa}$. Alors $a + \|a\|1_A$ est dans A_+ par **1)**8) et donc on a $\phi(a) + \|a\|\phi(1_A) \in \mathbb{R}_+$. Comme 1_A est dans A_+, on en déduit que $\phi(1_A)$ est réel et donc $\phi(a)$ aussi.

(b) Montrons que pour $a \in A$, on a $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$. Grâce à la question **3)**6)b), il existe $u, v \in A_{sa}$ tels que $a = u + iv$. Ainsi $\phi(a) = \phi(u) + i\phi(v)$ et comme $a^* = u - iv$, alors $\phi(a^*) = \phi(u) - i\phi(v) = \overline{\phi(a)}$, grâce à al question précédente. Donc $(a, b) \mapsto \phi(b^*a)$ est une forme sesquilinéaire positive. L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de conclure.

(c) Soit $a \in A$. Comme $\|a^*a\|1_A - a^*a$ est dans A_+, alors

$$\phi(a^*a) \leq \|a^*a\|\phi(1_A) = \|a\|^2\phi(1_A).$$

La question précédente permet d'écrire

$$|\phi(a)|^2 \leq \phi(1_A)\phi(a^*a) \leq \|a\|^2\phi(1_A)^2.$$

D'où $\|\phi\| = \phi(1_A)$.

8. a^*a est non nul, donc $-a^*a$ n'appartient pas à A_+. De plus A_+ est un convexe fermé de A_{sa}, donc dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel A_{sa}, on peut utiliser le théorème de Hahn-Banach. Il existe une forme linéaire continue ϕ de A_{sa} et de norme un telle que $\inf\{\phi(a),\ a \in A_+\} > -\phi(a^*a)$. S'il existe $b \in A_+$ tel que $\phi(b) < 0$, alors comme pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on a $\lambda b \in A_+$, alors $\inf\{\phi(a),\ a \in A_+\} = -\infty$, ce qui est impossible. Donc comme $\phi(0) = 0$, alors $\inf\{\phi(a),\ a \in A_+\} = 0 > -\phi(a^*a)$. De plus tout élément s'écrit d'une unique façon sous la forme $u + iv$, où u et v sont dans A_{sa}, alors on peut prolonger ϕ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel A qui vérifie donc les propriétés souhaitées.

4) Construction GNS et théorème de Gelfand-Neimark

1. (a) On voit immédiatement grâce à l'inégalité de la question **3)**7)b) que

$$V_\phi = \{a \in A,\ \forall b \in A,\ \phi(b^*a) = 0\} = \{a \in A,\ \forall b \in A,\ \ \phi(a^*b) = 0\}.$$

Ainsi ϕ est bien définie sur A/V_ϕ et définit un produit scalaire hermitien dessus.

(b) Pour $a \in A$, on note $\overline{a}$ sa projection sur A/V_ϕ et on note $\langle ., . \rangle_{\mathcal{H}_\phi}$ le produit scalaire sur $\mathcal{H}_\phi$. Grâce à la relation que l'on a donnée à la question précédente, on voit que $L_a(V_\phi) \subset V_\phi$. Ainsi L_a définit bien un endomorphisme de A/V_ϕ. Montrons que celui-ci est continu sur A/V_ϕ. Pour $\overline{b} \in A/V_\phi$, on a $\langle L_a(\overline{b}), L_a(\overline{b})\rangle_{\mathcal{H}_\phi} = \phi(b^*a^*ab)$. Mais la forme linéaire $c \mapsto \phi(b^*cb)$ définie sur A est positive, donc en utilisant la question **3)**7)c) pour cette forme linéaire positive, on a

$$\|L_a(\overline{b})\|^2_{\mathcal{H}_\phi} \leq \phi(b^*b)\|a^*a\| = \|\overline{b}\|^2_{\mathcal{H}_\phi}\|a\|^2.$$

On en déduit que L_a s'étend sur $\mathcal{H}_\phi$ en une application linéaire continue de norme plus petite que $\|a\|$.

(c) On note $\pi_\phi(a)$ l'application qui prolonge L_a sur $\mathcal{H}_\phi$. L'application π_ϕ est clairement un morphisme d'algèbre unital. Montrons que $\pi_\phi(a^*) = (\pi_\phi(a))^*$, où $*$ dans le membre de droite de cette dernière égalité représente l'adjoint dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)$. Pour $c, d \in A$, on a

$$\langle \pi_\phi(a)(\overline{c}), \overline{d}\rangle_{\mathcal{H}_\phi} = \phi(d^*ac) = \langle \overline{c}, \pi_\phi(a^*)(\overline{d})\rangle_{\mathcal{H}_\phi}.$$

Par densité de A/V_ϕ dans $\mathcal{H}_\phi$, cette égalité reste vraie pour $\overline{c}, \overline{d} \in \mathcal{H}_\phi$. D'où le résultat. Ainsi π_ϕ est un morphisme de C^*-algèbres. De plus si on pose $\xi_\phi = \overline{1_A}$, alors $\langle \pi_\phi(a)(\xi_\phi), \xi_\phi\rangle_{\mathcal{H}_\phi} = \phi(a)$.

2. Soit $b \in A$. On pose $\pi(b) = (\pi_a(b))_{a\in A}$. Grâce à la question **2)**4) ou la fin de la correction de la question **4)**1)b), on a $\|\pi_a(b)\| \leq \|b\|$. Soit $h = (h_a)_{a\in A} \in \mathcal{H}$. On a

$$\sum_{a\in A} \|\pi_a(b)(h_a)\|_a^2 \leq \sum_{a\in A} \|\pi_a(b)\|^2 \|h_a\|_a^2 \leq \sum_{a\in A} \|b\|^2 \|h_a\|_a^2 \leq \|b\|^2 \|h\|^2.$$

Donc $\pi(b)$ est dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. De plus π est clairement un morphisme de C^*-algèbres. Il est injectif car pour $a \in A \setminus \{0\}$, on a

$$\|\pi_a(a)(\xi_{\phi_a})\|^2 = \langle \pi_a(a^*a)(\xi_{\phi_a}), \xi_{\phi_a}\rangle_a = \phi_a(a^*a) > 0$$

et donc $\pi(a) \neq 0$. Grâce à la question **2)**6)b), on a $\|\pi(a)\| = \|a\|$, pour tout $a \in A$. Cette dernière égalité permet de vérifier que $\pi(A)$ est complet donc fermé dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ainsi A peut être vue comme une sous-algèbre unifère fermé de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ et stable par l'adjoint.

Références

[1] J.M.G. Fell, R.S. Doran, "Representation of *-algebras, locally compact groups, and Banach *-algebraic bundles," Volume 1 : Basic Representation Theory of Groups and Algebras, Academic Press, 1988.

[2] P. de la Harpe and V. Jones, "An introduction to C*-algebras", Publication de l'Université de Genève, 1995.

[3] P. Martinetti, "Distances en géométrie non commutative", thèse de doctorat, 2001, http ://arxiv.org/abs/math-ph/0112038.