OPERATEURS ELLIPTIQUES DU 2ème ORDRE

OPERATEURS ELLIPTIQUES DU 2eme ORDRE

I INTRODUCTION

1.1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On se donne N^2 fonctions a_{ij}

$$a_{ij} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dans tout le cours, nous ferons les hypothèses suivantes sur les fonctions a_{ij}

(H1) : Les fonctions a_{ij} sont bornées, i.e il existe $C>0$ t.q

$$|a_{ij}(x)| \leq C, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall i,j$$

(H2) : Les fonctions a_{ij} sont symétriques, i.e

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall i,j$$

(H3) (ellipticité) Il existe $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$ t.q que $\forall \ \xi = (\xi_1, \dots \xi_N) \in \mathbb{R}^N$

$$\alpha_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leq \alpha_1 |\xi|^2 \quad , \forall x \in \Omega$$

(où $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots \xi_N^2$).
[en fait, l'existence de α_1 résulte de (H1)]

L'hypothèse d'ellipticité montre en particulier que pour tout x la matrice $A(x) \in M_n(\mathbb{R})$, définie par

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq N}$$

est une matrice symétrique définie positive $(\forall x \in \Omega)$. De plus, sa plus petite valeur propre est minorée par α_0.

Nous considérerons, dans ce cours, essentiellement des opérateurs elliptiques sous forme divergence, de la forme

$$(1)\quad L = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\quad\right) \equiv \operatorname{div}(A(x)\,\nabla\quad)$$

Il s'agit d'un opérateur différentiel du deuxième ordre. Il agit en particulier sur les fonctions C^∞ à support compact, i.e $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on peut définir

$$(2)\quad L\varphi = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right).$$

Si on ne fait d'hypothèse supplémentaire de régularité sur les coefficients a_{ij} (du style $a_{ij} \in C^1, \dots$), alors $L\varphi$ est définie au sens des distribution. De manière générale, si v appartient à un espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, où pour $1 \leq p \leq +\infty$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega)\ ,\ \forall j \in \{1,\dots,N\} \right\}$$

alors on peut définir $Lv = f$ comme une distribution par

$$(3)\quad \langle Lv, \psi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\ ,\quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega)$$

La classe la plus générale pour laquelle (3) a encore un sens est

$$W^{1,1}_{loc}(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{loc}(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^1_{loc}(\Omega)\ ,\ \forall j \in \{1,\dots,N\} \right\}$$

[Rappel

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ g \in L^1(K),\quad \forall K \text{ compact} \subset \Omega \right\}.]$$

<u>CONCLUSION</u> : Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3), Lv peut être défini, au sens des distributions, pour tout $v \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$

I.2 Coefficients réguliers. Si les coefficients a_{ij} sont des fonctions plus régulières, alors on peut définir Lv pour des classes plus larges de fonctions, voire de distributions.

Par exemple, si $a_{ij} \in C^\infty(\Omega)$, $\forall i,j$ alors Lv peut être défini pour toute distribution $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, par

$$\langle Lv, \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \sum_{i,j} \langle v, \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

L'expression du membre de gauche appartient à $C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ car $a_{ij}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \in C_c^\infty(\Omega)$.

I.3 Le Laplacien : L'exemple le plus simple d'un opérateur elliptique est celui où les coefficients a_{ij} sont constants, en particulier le cas où

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij} \quad , \forall x \in \Omega, \quad \forall i,j$$

i.e

$$A(x) = Id_{\mathbb{R}^N}.$$

On a alors
$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Dans ce cas L est appelé Laplacien, et on note

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

(si $N=1$ $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$]. Au vu de la discussion précédente, on peut définir Δv, $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$, distribution sur Ω.

Exercice I.1 Soit L un opérateur elliptique du 2^{eme} ordre à coefficients constants. Montrer qu'en changeant de base, on peut se ramener au Laplacien.

A 4

I.4 Opérateurs qui ne sont pas sous forme divergence. On peut considérer également des opérateurs sous forme

$$\tilde{L} = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Bien entendu, si les coefficients a_{ij} sont constants, les deux opérateurs L et $\tilde{L}$ coïncident. En revanche, si on ne fait pas d'hypothèse de régularité sur les coefficients a_{ij} on voit que $\tilde{L}$ ne peut être défini pour des fonctions de $W^{1,1}_{loc}$: néanmoins il est facile de voir que $\tilde{L}v$ peut être défini pour $v \in W^{2,1}_{loc}(\Omega)$, où

$$W^{2,1}_{loc}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^1_{loc}(\Omega), \forall i,j \right\}.$$

Dans toute la suite de cette partie A, nous nous intéresserons au problème "inverse" : étant donné f une fonction sur Ω et v tel que

$$Lv = f \qquad \text{ds } \Omega$$

que peut-on dire de v ? Dans un premier temps, nous supposerons qu'un tel v existe, et nous nous intéresserons aux propriétés de régularité de v. Le cas le plus simple est bien entendu $f = 0$, i.e nous considérerons des solutions du problème homogène

$$(4) \qquad Lv = 0,$$

L'étude de ce problème est l'objet des paragraphes qui suivent (le cas général f fonction sera considéré dans les Sections suivantes).

II DISTRIBUTIONS HARMONIQUES

On considère dans cette partie les solution $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ de l'équation

$$(1) \qquad \Delta v = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

L'équation (1) signifie, au sens des distributions

$$(2) \qquad \langle \Delta v, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle v, \Delta\varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \quad , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$$

Les solutions de (1) (ou (2)) sont appelées distributions harmoniques. Il existe beaucoup d'exemples de distributions harmoniques :

- Si $N = 1$, $\Omega = I$ intervalle de $\mathbb{R}$, les solutions de (1) vérifient

$$v'' = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(I)$$

et les solutions sont alors des fonctions affines

$$v(x) = ax + b \qquad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$$

On a donc un espace vectoriel de dimension 2 de solutions.

Si $N \geq 2$ L'ensemble des solutions de (1) forment un espace vectoriel qui n'est plus de dimension finie. En particulier, pour $N = 2$ toutes les fonctions holomorphes sont des fonctions harmoniques.

On démontre, grâce aux techniques de la théorie des distributions

THÉORÈME II.1 . Toute distribution harmonique, i.e tout distribution v solution de (1) est une fonction de $C^\infty(\Omega)$.

Nous admettrons la preuve de ce résultat. Le Théorème II.1 fait partie de ce que l'on appelle les propriétés régularisantes du Laplacien.

Il est souvent utile, en pratique d'avoir des propriétés plus "quantitatives" Un exemple de tels résultats est l'inégalité de Cacciopoli, qui joue également un rôle impotant pour des operateurs généraux

<u>Proposition II.1</u>. Soit $x_0 \in \Omega$, $0<\rho'<\rho$ tels que

$$B(x_0,\rho) \subset \Omega.$$

Il existe une constante universelle $C>0$, telle que si

$$\Delta w = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

alors
$$\int_{B(x_0,\rho')} |\nabla w|^2 \leq \frac{C}{(\rho-\rho')^2} \int_{B(x_0,\rho)} |w|^2$$

(Inégalité de Caccioppoli).

<u>Remarques</u>: 1) Si w est harmonique, il en est de même de $w - C$, pour n'importe quelle constante $C \in \mathbb{R}$. En particulier on peut prendre

$$C = \frac{1}{B(x_0,\rho)} \int_{B(x_0,\rho)} w \equiv \overline{w}_{x_0,\rho} \quad (\text{moyenne de } w \text{ sur } B(x_0,\rho))$$

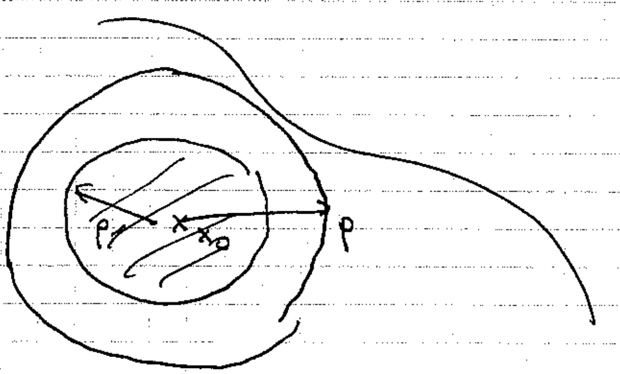
On a donc

$$(1) \quad \int_{B(x_0,\rho')} |\nabla w|^2 \leq \frac{C}{(\rho-\rho')^2} \int_{B(x_0,\rho)} |w - \overline{w}_{x_0,\rho}|^2$$

2) L'inégalité (1) est à rapprocher de l'inégalité de Poincaré Wirtinger, (dont elle est une sorte d'inverse pour les fcts harmoniques)

$$\int_{B(x_0,\rho)} |w - \overline{w}_{x_0,\rho}|^2 \leq \frac{C}{\rho^2} \int_{B(x_0,\rho)} |\nabla w|^2$$

vérifiée pour toute fonction w de $W^{1,2}_{loc}(\Omega) = H^1_{loc}(\Omega)$.



A 7

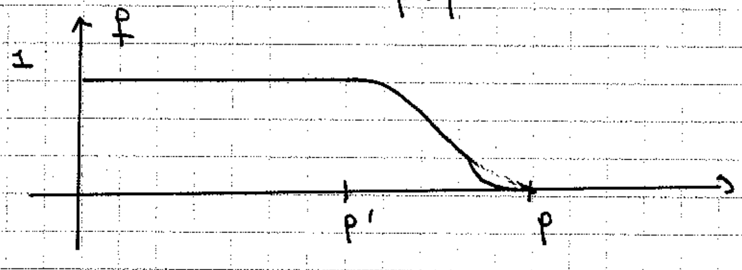
Preuve de l'inégalité de Caccioppoli : L'idée est de multiplier l'équation (1) par la solution w elle même : bien entendu, ceci n'est pas possible car w n'est pas à support compact. Pour remédier à ce problème, on construit une fonction plateau η tel que $\eta \equiv 1$ sur $B(x_0,\rho')$, $\eta \equiv 0$ sur $\Omega \setminus B(x_0,\rho)$.

A cet effet, soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, et

$$\begin{cases} f(t) \equiv 1 & , \text{si } |t| \leq \rho' \\ f(t) \equiv 0 & \text{si } |t| \geq \rho \end{cases}$$

et qui vérifie de plus

$$|f'(t)| \leq \frac{2}{\rho - \rho'}$$



Soit alors η la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ par

$$\eta(x) = f(|x - x_0|)$$

On vérifie alors que η a bien les propriétés désirées :

$$\begin{cases} - \eta \in C_c^\infty(\Omega), \text{ et même } \eta \in C_c^\infty(B(x_0,\rho)) \\ \eta \equiv 1 \text{ si } B(x_0,\rho') \quad \eta \equiv 0 \text{ sur } \Omega \setminus B(x_0,\rho) \\ |\nabla \eta|_{L^\infty} \leq \dfrac{2}{(\rho - \rho')} \end{cases}$$

Rappelons que l'équation

$$\Delta w = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

est équivalente à $\sum_i \left\langle \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = 0$, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

c'est à dire

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \varphi = 0 \quad , \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

On choisit alors pour fonction test φ la fonction

$$\varphi = w\eta^2 \quad \in C_c^\infty(\Omega).$$

On a donc

$$(*) \quad \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla (w\eta^2) = 0$$

Développons cette expression : on a

$$\nabla w \cdot \nabla(w\eta^2) = \nabla w \cdot \nabla(w\eta)\cdot \eta + \nabla w \cdot \nabla\eta \,(w\eta)$$
$$= |\nabla(w\eta)|^2 - \nabla\eta\, \nabla(w\eta)\, w + \nabla(w\eta)\cdot\nabla\eta \cdot w - |\nabla\eta|^2 w^2$$
$$= |\nabla(w\eta)|^2 - |\nabla\eta|^2 w^2.$$

En intégrant, $(*)$ donne donc

$$\int_\Omega |\nabla(w\eta)|^2 = \int_\Omega |\nabla\eta|^2 w^2 = \int_{B(x_0,\rho)} |\nabla\eta|^2 w^2$$

Par définition de η, $\eta \equiv 1$ sur $B(x_0,\rho')$ et donc $|\nabla(w\eta)|^2 = |\nabla w|^2$ sur $B(x_0,\rho')$. On a donc par l'égalité précédente

$$\int_{B(x_0,\rho')} |\nabla w|^2 \leq \int_\Omega |\nabla(w\eta)|^2 = \int_{B(x_0,\rho)} |\nabla\eta|^2 w^2$$
$$\leq \frac{4}{(\rho-\rho')^2}\int_{B(x_0,\rho)} |w|^2 .$$

ce qui termine la preuve.

L'inégalité de Caccioppoli montre que l'on peut majorer une norme forte, la norme H^1, sur une boule $B(x_0,\rho')$ incluse dans Ω, par une norme "faible", la norme L^2 sur une boule plus grande $B(x_0,\rho)$.

contenant $B(x_0,\rho')$. Nous allons voir, par dérivation de l'équation que la norme L^2 sur $B(x_0,\rho)$ "contrôle" toutes les normes sur $B(x_0,\rho')$.

II.2 Majorations de norme $H^s(B(x_0,\rho'))$

Le Laplacien étant un opérateur différentiel à coefficients constants on peut dériver l'équation (1), i.e si w est solution de

$$\Delta w = 0,$$

alors $\forall i \in \{1,\dots,N\}$

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_i} w\right) = 0.$$

De manière générale, si α est un multiindice d'ordre k, alors

$$\Delta(\partial^\alpha w) = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

Par itération, on en déduit alors

Proposition II.2 : Soit $x_0 \in \Omega$ $0<\rho'<\rho$ tels que $B(x_0,\rho) \subset \Omega$.

On a, si $\Delta w = 0$ sur Ω

$$\|u\|^2_{H^k(B(x_0,\rho'))} \leq C(\rho',\rho,k)\ \|u\|^2_{L^2(B(x_0,\rho))}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et de meme, par injection de Sobolev

$$\|u\|^2_{C^k(B(x_0,\rho'))} \leq C'(\rho',\rho,k)\ \|u\|^2_{L^2(B(x_0,\rho))}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Preuve : Voyons d'abord la preuve pour $k=2$.

Soit $\rho_1 = \frac{\rho'+\rho}{2}$ de sorte que $\rho_1 \in]\rho',\rho[$. Pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$ la fonction $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ est harmonique, on a donc par l'inégalité de Caccioppoli appliquée à $\frac{\partial w}{\partial x_i}$.

$$\int_{B(x_0,\rho')} \left|\nabla\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\right|^2 \leq \frac{4}{(\rho_1-\rho')^2}\int_{B(x_0,\rho_1)} \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^2 \leq \frac{4}{(\rho_1-\rho')^2}\int_{B(x_0,\rho_1)} |\nabla w|^2$$

En appliquant l'inégalité de Cacciopoli entre ρ_1 et ρ à w, on a

$$\int_{B(x_0,\rho_1)} |\nabla w|^2 \leq \frac{4}{(\rho-\rho_1)^2} \int_{B(x_0,\rho)} |w|^2$$

En combinant, il vient

$$\int_{B(x_0,\rho')} \left|\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_i} w\right)\right|^2 \leq C \int_{B(x_0,\rho)} |w|^2$$

d'où

$$\|w\|^2_{H^2(B(x_0,\rho'))} \leq C \|w\|^2_{B(x_0,\rho)} .$$

Le cas k quelconque se fait par itération.

<u>Remarque</u> : La méthode précédente permet de retrouver le fait que si $u \in H^1(\Omega)$ est harmonique, alors $u \in C^\infty(\Omega)$, sans utiliser le Théorème II. 1. Le résultat néanmoins est plus précis, puisqu'on dispose de majorations.

<u>Exercice II. 1</u>. Soit $b \in \mathbb{R}^N$, $c \in \mathbb{R}$. Montrer que l'inégalité de Cacciopoli et les résultats de la proposition II. 1 se généralisent aux solutions $w \in H^1(\Omega)$ de

$$-\Delta w + b.\nabla w + cw = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad \left(b.\nabla w = \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)$$

II. 3 Résultats de compacité pour les distributions harmoniques

Une conséquence intéressante de l'inégalité de Cacciopoli et de la Proposition II. 2 est la suivante :

<u>Proposition II. 3</u> Soit $\rho > 0$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions harmoniques sur $B(\rho)$, i.e telles que

$$\Delta w_n = 0, \quad \text{sur } B(\rho) .$$

On suppose que la suite est bornée dans $L^2(B(\rho))$ c'est à dire qu'il existe

$c>0$ tel que

$$\int_{B(\rho)} |w_n|^2 \leq C.$$

Alors, pour tout $0<\rho'<\rho$, et $k\in\mathbb{N}$, il existe une s-suite de w_n, $(w_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $w\in C^k(B(\rho))$ t.q

$$w_{\sigma(n)} \longrightarrow w \quad \text{dans } C^k(B(\rho'))$$

De plus, on a alors

$$\Delta w = 0 \quad \text{ds } B(\rho).$$

__Preuve__ : Comme la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(B(\rho))$, on peut en extraire une s-suite $w_{\sigma(n)}$ telle que

$$w_{\sigma(n)} \rightharpoonup w \quad \text{dans } L^2(B(\rho)).$$

En passant à la limite dans l'équation, on déduit que

$$\Delta w = 0.$$

La fonction $w_{\sigma(n)} - w$ est donc harmonique. Soit $\rho_1 = \frac{\rho'+\rho}{2}$. Par l'inégalité de Caccioppoli on a

$$\int_{B(\rho_1)} |\nabla w_n - w|^2 \leq C \int_{B(\rho)} |w_n - w|^2 \leq C$$

La suite $(w_{\sigma(n)} - w)$ est donc bornée dans $H^1(B(\rho_1))$,

$$w_{\sigma(n)} - w \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } H^1(B(\rho_1))$$

par injection compacte de Rellich, il résulte

$$w_{\sigma(n)} - w \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(B(\rho_1))$$

Ecrivons maintenant l'inégalité de Caccioppoli pour ρ' et ρ_1

$$\int_{B(\rho')} |\nabla(w_{\sigma(n)} - w)|^2 \leq C \int_{B(\rho_1)} |w_{\sigma(n)} - w|^2 \longrightarrow 0$$

et donc

$$w_{\sigma(n)} \longrightarrow w \quad \text{fortement dans } H^1(B(\rho'))$$

En raisonnant comme dans la proposition II.2, on montre que

$$w_{\sigma(n)} \longrightarrow w \quad \text{dans } H^k(B(\rho')) \text{ fortement}.$$

III EQUATION HOMOGENE POUR DES OPERATEURS SOUS FORME DIVERGENCE

On considère ici un operateur général, sous forme divergence vérifiant les hypothèses (H1), (H2), (H3)

$$L = \operatorname{div}(A(x)\nabla\ )$$

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq N}$$

On considère des fonctions $u \in H^1(\Omega)$ de

$$(1) \qquad Lu = 0 \qquad \text{ds } \Omega.$$

<u>Remarque</u>. Noter que $H^1(\Omega) \subset W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, et l'on peut donc définir Lu, au sens des distributions.

Rappelons que (1) est équivalent à

$$\langle Lu, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

c'est à dire

$$\sum_{i,j=1}^{N} \langle a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0$$

ou encore

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0.$$

On a donc

<u>Proposition III.1</u> : $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ est solution de (1) ssi

$$(2) \qquad \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Si $u \in H^1(\Omega)$, on vérifie alors par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ que l'expression (2) a un sens, et st vérifiée pour $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, c.q.f.d

<u>Proposition III. 2</u> $u \in H^1(\Omega)$ est solution de (1) ssi

$$(3) \quad \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} = 0, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

L'inégalité de Caccioppoli s'étend alors aux solutions de (1). On a

<u>Proposition III. 3</u> (Inégalité de Caccioppoli) Soit $w \in H^1_{loc}(\Omega)$ solution de

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla w) = 0 \qquad \text{sur } \Omega$$

Soit $0<\rho'<\rho$ tels que $B(x_0,\rho) \subset \Omega$. Il existe alors une constant $C>0$ ne dépendant que de α_0 et α_1 telle que

$$\int_{B(x_0,\rho')} |\nabla w|^2 \leq \frac{C}{(\rho-\rho')} \int_{B(x_0,\rho)} |w|^2,$$

et donc

$$\int_{B(x_0,\rho')} |\nabla w|^2 \leq \frac{C}{(\rho-\rho')} \int_{B(x_0,\rho)} |w - \bar{w}_{x_0,\rho}|^2, \text{ où } \bar{w}_{x_0,\rho} = \frac{1}{|B(x_0,\rho)|} \int_{B(x_0,\rho)} w$$

<u>Preuve</u> : La preuve est similaire à la preuve de la proposition II. 1. En utilisant les mêmes notations, on vérifie que $w\eta^2 \in H_0^1(B(x_0,\rho))$ car $w \in H^1_{loc}(\Omega)$, par hypothèse. On peut donc appliquer la proposition III. 2 pour conclure que

$$(4) \quad \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial (w\eta^2)}{\partial x_j} = 0.$$

On développe ensuite l'intégrande :

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial (w\eta^2)}{\partial x_j} = \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_j} \eta + \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} (w\eta)$$

$$= \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_i} \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_i} w + \frac{\partial (w\eta)}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} w$$

$$- \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} w^2$$

Par symétries des a_{ij}, on a alors

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial (w z^2)}{\partial x_j} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial (wz)}{\partial x_i} \frac{\partial (wz)}{\partial x_j} - \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} w^2$$

L'égalité (4) donne donc

$$\alpha_0 \int_\Omega |\nabla(wz)|^2 \leq \int_\Omega \sum a_{ij} \frac{\partial (wz)}{\partial x_i} \frac{\partial (wz)}{\partial x_j} = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} w^2 \leq \alpha_1 \int_\Omega |\nabla z|^2 w^2$$

i.e

$$\int_\Omega |\nabla(wz)|^2 \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \int_\Omega |\nabla z|^2 w^2 .$$

Le reste de la preuve est ensuite identique à celui de la proposition II-1.

Une différence essentielle avec le cas du Laplacien (ou de manière générale, les opérateurs à coefficients constants ou réguliers) est qu'on ne peut espérer obtenir plus de régularité sur la solution w (i.e on ne peut espérer qu'elle appartienne à des espaces $H^k_{loc}(\Omega)$, pour $k > 1$). Pour s'en convaincre il suffit de considérer le cas $N = 1$.

Dans ce cas, en effet

$$L = \frac{d}{dx}\left(a(x) \frac{du}{dx}\right),$$

où la fonction $a \in L^\infty(I)$. L'hypothèse d'ellipticité signifie alors

$$0 < \alpha_0 \leq a(x) \leq \alpha_1, \qquad \forall x \in I .$$

Si u est solution de $Lu = 0$, ie

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\left(a(x) \frac{du}{dx}\right) = 0,$$

on peut intégrer cette équation directement et donner la forme de TOUTES les solutions, à savoir

$$u(x) = \lambda_1 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{a(s)}\, ds + \lambda_2, \qquad \text{où } x_0 \in I \text{ est fixé}$$

on voit en particulier que si $\frac{1}{a(s)} \notin H^1$, alors $u \notin H^2$.

conclusion : si $u \in H^1_{loc}(\Omega)$, est solution de $Lu=0$, on ne peut espérer pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, et pour des coefficients a_{ij} généraux, avoir $u \in H^k_{loc}(\Omega)$

En revanche, nous verrons plus loin d'autres propriétés impliquées par l'équation $Lu=0$, en particulier

$$u \in L^\infty_{loc}(\Omega).$$

[On peut aussi montrer, mais c'est un résultat difficile, que si $u \in H^1(\Omega)$, $Lu=0$, alors $\exists p > 2$, t.q $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Dans le cas où la matrice $A(x)$ est proche de l'identité, nous verrons une preuve de ce résultat par la méthode de Schauder.]

III.2 Résultats de compacité

Le résultat de la partie II se généralise de la façon suivante :

Proposition III.4 : Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions de

$$Lw_n = 0,$$

telle que $w_n \in H^1(B(\rho))$, $\forall n$. On suppose que la suite est bornée dans $L^2(B(\rho))$, i.e qu'il existe $C>0$, t.q.

$$\int_{B(\rho)} |w_n|^2 \leq C \quad, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit $0<\rho'<\rho$. Il existe une sous-suite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(w_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$w_{\sigma(n)}|_{B(\rho')} \longrightarrow w \quad \text{fort dans } H^1(B'(\rho))$$

où $w \in H^1(B(\rho'))$ vérifie

$$Lw = 0 \quad \text{sur } B(\rho').$$

Preuve : elle est identique à celle de la Proposition II.3.

IV. Autres propriétés des solutions de $Lu = 0$

Dans cette partie, nous allons étudier des propriétés des solutions $\overset{\circ}{H}^1$ de $Lu=0$. Nous verrons tout d'abord que

$$(1) \qquad u \in L^p_{loc}(\Omega), \qquad \forall\ p > 2.$$

grâce à une généralisation de l'inégalité de Cacciopoli. Ensuite en utilisant une méthode itérative, due à J. Moser, nous en déduisons que

$$(2) \qquad u \in L^\infty_{loc}(\Omega).$$

Un résultat difficile dû à E. de Giorgi affirme en fait que toute solution de $Lu=0$, ds H^1 est en fait une fonction continue sur Ω, et même qu'il existe $\alpha > 0$ t.q

$$u \in C^{0,\alpha}(\Omega).$$

Ce résultat sort malheureusement du cadre de ce cours.

IV.1. Une généralisation de l'inégalité de Cacciopoli

Dans cette partie, nous allons établir

Lemme IV.1 Soit $u \in H^1(\Omega)$ une solution de

$$Lu = 0.$$

Soit $p \geq 1$, $x_0 \in \Omega$, et $\rho > 0$, tels que

$$(3) \qquad |u|^{p+1} \in L^1(B(x_0,\rho)).$$

Alors pour toute fonction $\eta \in C^\infty_c(B(x_0,\rho))$, $|u|^{\frac{p+1}{2}}\eta \in H^1(B(x_0,\rho))$ et

$$(4) \int_{B(x_0,\rho)} \left|\nabla\left(|u|^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)\right|^2 \leq C\,(p+1)^2 \int_{B(x_0,\rho)} |u|^{p+1}\,|\nabla\eta|^2.$$

Commentaire 1) Dans le cas $p=1$, cette inégalité a été établie dans le cadre de la preuve de l'inégalité de Cacciopoli.

2) Pour $p \leq 2^*-1$, où 2^* est l'exposant conjugué de

Sobolev $2^* = \frac{2N}{N-2}$, la propriété (3) est automatiquement vérifiée, en raison de l'injection

$$H^1(B(x_0,\rho)) \hookrightarrow L^{2^*}(B(x_0,\rho)).$$

Notons que $2^*-1 = \frac{N+2}{N-2} > 1$, $2^* > 2$.

Preuve : Rappelons que $u \in H^1(\Omega)$ est solution de $Lu=0$ si et seulement si, $\forall v \in H^1_0(\Omega)$

$$(5) \quad \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} = 0.$$

Comme dans l'inégalité de Caccioppoli, le calcul repose sur un choix adéquat de fonction test v. L'idée de base est de prendre comme fonction test

$$v_+ = |u_+|^p \eta^2, \quad v_- = (-u_-)^p \eta^2,$$

où les fonctions u_+, u_- sont données par $u_+ = \operatorname{Max}\{u,0\}$, $u_- = \operatorname{Inf}\{u,0\}$ de sorte que

$$\begin{cases} u = u_+ + u_- \\ |u| = u_+ - u_- \end{cases}$$

- Pour une fonction $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, on a alors $u_+ \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ $u_- \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, et

$$\begin{cases} \nabla u^+ = \nabla u, \text{ si } u \geq 0, & \nabla u^+ = 0 \text{ si } u \leq 0, & \nabla u^+ = \nabla u \, \chi_{\{u \geq 0\}} \\ \nabla u^- = \nabla u \text{ si } u \leq 0 & \nabla u^- = 0 \text{ si } u \geq 0, & \nabla u^- = \nabla u \, \chi_{\{u \leq 0\}} \end{cases}$$

Si $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, on a alors,

$$\nabla u_+^p = p u_+^{p-1} \nabla u_+ = p u_+^{p-1} \nabla u \, \chi_{\{u \geq 0\}}$$

Au vu de cette formule, on voit que v_+, (resp v_-) ne sont pas nécessairement dans H^1. C'est pourquoi nous commencerons par démontrer l'inégalité (4) sous l'hypothèse supplémentaire $u \in L^\infty(\Omega)$. Dans un deuxième temps nous verrons comment nous débarasser de cette hypothèse.

A) Démonstration de (4) lorsque $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$

Si $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, on vérifie que v_+ et v_- sont des fonctions de $H^1_0(\Omega)$. On peut donc les utiliser comme fonctions test dans (5). Nous allons commencer par effectuer le calcul pour v_+.

On a par (5)

$$\int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_+^p \eta^2) = 0, \qquad \text{car } v_+ \in H^1_0(\Omega)$$

Développons l'intégrande

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_+^p \eta^2) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_+^p)\eta^2 + \frac{\partial u}{\partial x_i} u_+^p \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j}$$

$$= p u_+^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_+ \eta^2 + u_+^p \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j}$$

$$= p u_+^{p-1} \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial u_+}{\partial x_j} \eta^2 + u_+^p \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j}$$

[Seule la fonction u_+ apparaît dans ce calcul]. Nous avons les identités

$$\frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_j} = \frac{(p+1)^2}{4} u_+^{p-1} \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial u_+}{\partial x_j}$$

et

$$\frac{\partial (u_+^{\frac{p+1}{2}} \eta)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial (u_+^{\frac{p+1}{2}} \eta)}{\partial x_j} = \frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}}{\partial x_j} \eta^2 + u_+^{p+1} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}$$

$$+ \frac{p+1}{4} u_+^p \left[\frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_+}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \eta^2}{\partial x_i} \right]$$

et en combinant

$$p u_+^{p-1} \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_+}{\partial x_j} \eta^2 = \frac{4p}{(p+1)^2} \left[\frac{\partial (u_+^{\frac{p+1}{2}} \eta)}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial (u_+^{\frac{p+1}{2}} \eta)}{\partial x_j} \right]$$

$$- \frac{4p}{(p+1)^2} \left[u_+^{p+1} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \frac{p+1}{4} u_+^p \left(\frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_+}{\partial x_j} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_i} \right) \right]$$

et donc

$$\frac{(p+1)^2}{4p} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_+^p \eta^2) = a_{ij} \frac{\partial (u_+^{\frac{p+1}{2}} \eta)}{\partial x_i} \frac{\partial (u_+^{\frac{p+1}{2}} \eta)}{\partial x_j}$$

$$- a_{ij} u_+^{p+1} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}$$

$$+ u_+^p \left[\frac{(p+1)^2}{4p} a_{ij} \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} - \frac{p+1}{4} a_{ij} \left[\frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_+}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \eta^2}{\partial x_i} \right] \right]$$

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)}{\partial x_i} \frac{\partial(u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)}{\partial x_j} = \int_\Omega u_+^{p+1} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}$$

$$+\left(\frac{p+1}{2} - \frac{(p+1)^2}{4p}\right) \int_\Omega \sum_{i,j} u_+^p a_{ij} \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j}.$$

En utilisant l'ellipticité de $A(x)$, on obtient alors

$$\alpha_0 \int_\Omega |\nabla (u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)|^2 \leq \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial (u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)}{\partial x_j}$$

et

$$0 \leq \int_\Omega u_+^{p+1} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \leq \alpha_1 \int_\Omega u_+^{p+1} |\nabla \eta|^2$$

$$\left| \int_\Omega u_+^p \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u_+}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right| \leq \alpha_1 \int_\Omega u_+^p |\nabla u_+| \, |\nabla \eta|$$

En regroupant, on trouve donc

$$\alpha_0 \int_\Omega |\nabla (u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)|^2 \leq \alpha_1 \int_\Omega u_+^{p+1} |\nabla \eta|^2 + \frac{(p+1)}{2} \int_\Omega u_+^p |\nabla u_+| |\nabla \eta|$$

i.e

$$(T) \quad \boxed{\int_\Omega |\nabla (u_+^{\frac{p+1}{2}}\eta)|^2 \leq C \left[\int_\Omega |u_+|^{p+1} |\nabla \eta|^2 + (p+1) \int_\Omega u_+^p |\nabla u_+| |\nabla \eta| \right]}$$

Cette inégalité correspond "presque" à l'inégalité désirée. Il reste à nous débarasser du dernier terme, en l'absorbant par les deux autres

A cet effet, on écrit

$$u_+^p = u_+^{\frac{p+1}{2}} \, u_+^{\frac{p-1}{2}}$$

et

$$\eta u_+^p |\nabla u_+| |\nabla \eta| = (\eta u_+^{\frac{p-1}{2}} |\nabla u_+|)(|u|^{\frac{p+1}{2}} |\nabla \eta|)$$

On remarque que

$$u_+^{\frac{p-1}{2}} |\nabla u_+| = |\nabla u_+^{\frac{p+1}{2}}| \cdot \frac{2}{p+1}$$

Enfin, on majore

$$\left(\zeta u_+^{\frac{p-1}{2}} |\nabla u_+|\right) \leq \left(|\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\zeta)| + |\nabla\zeta|\, |u_+|^{\frac{p+1}{2}}\right)\frac{2}{p+1}.$$

Pour conclure, on utilise la majoration, pour $\varepsilon > 0$ et deux nombres positifs a, b

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(\varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2\right)$$

avec

$$a = \zeta u_+^{\frac{p-1}{2}} |\nabla u_+|, \qquad b = u_+^{\frac{p+1}{2}} |\nabla\zeta|$$

Il vient : $\forall \varepsilon > 0$

$$\zeta u_+^p |\nabla u_+| |\nabla\zeta| \leq \frac{1}{2}\left[\varepsilon\left([\zeta u_+^{\frac{p-1}{2}} |\nabla u_+|\right)^2 + \varepsilon^{-1}\left(|u_+|^{p+1} |\nabla\zeta|^2\right)\right)$$

Soit

$$\boxed{\begin{aligned}\zeta u_+^p |\nabla u_+| |\nabla\zeta| \leq C\Big[\frac{\varepsilon}{(p+1)^2}\left(|\nabla(|u_+^{\frac{p+1}{2}}\zeta|\right)^2 + 2|\nabla\zeta|^2 |u|^{p+1}\right) \\ + C\varepsilon^{-1} |u|^{p+1} |\nabla\zeta|^2\end{aligned}}$$

En intégrant, il en résulte

$$(p+1)\int_\Omega \zeta u_+^p |\nabla u_+| |\nabla\zeta| \leq C\frac{\varepsilon}{(p+1)}\int_\Omega |\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\zeta)|^2$$

$$+$$

$$C\left(\frac{\varepsilon}{p+1} + \varepsilon^{-1}(p+1)\right)\int_\Omega u_+^{p+1} |\nabla\zeta|^2$$

En revenant à (7),

$$\left(1 - \frac{C\varepsilon}{p+1}\right)\int_\Omega |\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\zeta)|^2 \leq C\left(1 + \frac{\varepsilon}{p+1} + \frac{p+1}{\varepsilon}\right)\int_\Omega |u_+|^{p+1} |\nabla\zeta|^2$$

On conclut en choisissant

$$\varepsilon = \frac{p+1}{2C}$$

que

$$\int_\Omega |\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\zeta)|^2 \leq C\int_\Omega |u|^{p+1} |\nabla\zeta|^2$$

On procède de même pour v_- ce qui donne la conclusion.

B) CAS GENERAL

Dans cette partie, on ne suppose plus que $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. Indiquons brièvement les adaptations nécessaires. Au lieu de prendre les fonctions test v_+ et v, on introduit des troncatures au niveau N, puis on passe à la limite $N \to +\infty$. Plus précisement, posons, pour $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} u_{+,N} = u_+ & \text{si} \quad u_+ \leq N \\ u_{+,N} = N & \text{si} \quad u_+ \geq N \end{cases}$$

de sorte que

$$\begin{cases} \nabla u_{+,N} = \nabla u & \text{si} \quad 0 \leq u(x) \leq N \\ \nabla u_{+,N} = 0 & \text{si} \quad u(x) \geq N \quad \text{ou} \quad u(x) \leq 0. \end{cases}$$

On prend comme fonction test la fonction

$$v_{+,N} = u_{+,N}^{p-1}\, u\, \eta^2$$

de sorte que $v_{+,N} \in H^1_0(\Omega)$. On a donc, par (5)

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{+,N}^{p-1}\, u\, \eta^2\right) = 0$$

On développe ensuite l'intégrande. Il vient

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{+,N}^{p-1}\, u\, \eta^2\right) = (p-1)\, u_{+,N}^{p-2}\, u\, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_{+,N}}{\partial x_j}\, \eta^2$$

$$+ \; u_{+,N}^{p-1}\, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}\, \eta^2 \; +$$

$$+ \; u_{+,\eta}^{p-1}\, u\, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j}$$

$$= (p-1)\, u_{+,N}^{p-1}\, \frac{\partial u_{+,N}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_{+,N}}{\partial x_j}\, \eta^2 + N^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}\, \eta^2\, \chi_{\{u \geq N\}}$$

$$+ \; u_{+,N}^{p}\, \frac{\partial u_{+,N}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j} + N^{p-1}\, u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \eta^2}{\partial x_j}\, \chi_{\{u \geq N\}}$$

Des calculs similaires à ceux de la partie A permettent alors de montrer la majoration suivante :

$$(8)\quad \int_\Omega |\nabla(u_{+,N}^{\frac{p+1}{2}}\zeta)|^2 + \int_\Omega N^{p-1}|\nabla u|^2\zeta^2\,\chi_{\{u\geq N\}}$$

$$\leq C\int_\Omega |u_+|^{p+1}|\nabla\zeta|^2$$

Comme $u_{+,N}\longrightarrow u_+$ pour presque tout $x\in\Omega$, et que la suite $u_{+,N}^{\frac{p+1}{2}}\zeta$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ d'après (8), on en déduit que $u_+^{\frac{p+1}{2}}\zeta$ appartient à $H_0^1(\Omega)$, et que

$$u_{+,N}^{\frac{p+1}{2}}\zeta \rightharpoonup u_+^{\frac{p+1}{2}}\zeta \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega)$$

[Rappelons le raisonnement : posons $w_N = u_{+,N}^{\frac{p+1}{2}}\zeta$. D'après (8) la suite $(w_N)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, donc toute suite extraite de w_n possède une sous-suite qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, et donc fortement dans $L^2(\Omega)$ par injection de Rellich. Comme $w_n\longrightarrow u_+^{\frac{p+1}{2}}\zeta$ simplement, la limite est forcément $u_+^{\frac{p+1}{2}}\zeta$.

Par unicité de la limite toute la suite converge].

Par semi-continuité-inférieure on a

$$\int |\nabla(u_+^{\frac{p+1}{2}}\zeta)|^2 \leq \liminf_{N\to+\infty}\int_\Omega |\nabla(u_{+,N}^{\frac{p+1}{2}}\zeta^2)|^2 \leq C\int_\Omega |u|^{p+1}|\nabla\zeta|^2$$

et la conclusion en découle.

IV.2 Majorations dans $L^q_{loc}(\Omega)$.

Le Lemme IV.1 permet de démontrer le résultat suivant, qui nous permettra ensuite, par itération de prouver que toute solution de $Lu=0$, dans $H^1_{loc}(\Omega)$ appartient en fait à $L^q_{loc}(\Omega)$, $\forall q<+\infty$. On posera à cet effet

$$\lambda = \frac{2^*}{2} = \frac{N}{N-2} > 1.$$

<u>Lemme IV.2</u> : Soit $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ une solution de $Lu = 0$. On suppose de plus qu'il existe $q > 2$ tel que $u \in L^q_{loc}(\Omega)$.
Alors $\forall x \in \Omega$, $0 < \rho' < \rho$ tels que $B(x_0, \rho) \subset \Omega$, on a

$$\left(\int_{B(x_0,\rho')} |u|^{\lambda q} \right)^{1/\lambda} \leq C \frac{(1+q)^2}{(\rho - \rho')^2} \int_{B(x_0,\rho)} |u|^q$$

En particulier, $\forall K$ compact $\subset \Omega$, $u \in L^{\lambda q}(K)$, i.e $u \in L^{\lambda q}_{loc}(\Omega)$

<u>Preuve</u> : On part du Lemme IV.1, et on prend pour fonction η la fonction "plateau" définie dans la preuve de l'inégalité de Cacciopoli, i.e telle que $\eta \in C^\infty_c(B(x_0, \rho))$, $\eta \geq 0$, et

$$\begin{cases} \eta \equiv 1 & \text{sur } B(x_0,\rho') \\ \eta \equiv 0 & \text{en dehors de } B(x_0,\rho) \\ |\nabla \eta| \leq \dfrac{2}{\rho - \rho'} & \end{cases}$$

D'après le Lemme IV.1, $|u|^{\frac{q}{2}} \eta \in H^1_0(B(x_0,\rho))$, et par injection de Sobolev $H^1_0 \hookrightarrow L^{2^*}$, on a donc

$$\left| \int_{B(x_0,\rho)} |u|^{\frac{q}{2} 2^*} \eta^{2^*} \right|^{\frac{4}{2^*}} \leq C \left[\int_{B(x_0,\rho)} |\nabla(|u|^{\frac{q}{2}} \eta)|^2 \right]^{1/2},$$

où C est une constante universelle (sans dimension), [ici on a pris $p = q-1$, i.e $q = p+1$]

Comme $\eta \geq 0$, $\eta \equiv 1$ sur $B(x_0,\rho')$, on obtient donc ($\lambda = \frac{2^*}{2} > 1$)

$$(1) \quad \left(\int_{B(x_0,\rho')} |u|^{\lambda q} \right)^{\frac{4}{\lambda}} \leq C \int_{B(x_0,\rho)} |\nabla(|u|^{q/2} \eta)|^2$$

Le résultat du Lemme IV.1 donne alors

$$\int_{B(x_0,\rho)} |\nabla(|u|^{q/2}\zeta)|^2 \leq C(1+q)^2 \int_{B(x_0,\rho)} |u|^q |\nabla\zeta|^2$$

Comme $|\nabla \zeta| \leq \frac{2}{\rho-\rho'}$, on a donc

$$(10) \int_{B(x_0,\rho)} |\nabla(|u|^{q/2}\zeta)|^2 \leq \frac{C(1+q)^2}{(\rho-\rho')^2} \int_{B(x_0,\rho)} |u|^q$$

En combinant (9) et (10), on obtient la majoration du Lemme IV.2

Une conséquence directe du Lemme IV.2 est la suivante

<u>Proposition IV.1.</u> Soit $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ une solution de $Lu = 0$. Soit $x_0 \in \Omega$ et $\rho > 0$ tels que $B(x_0,\rho) \subset \Omega$. Alors, pour tout $r < +\infty$, $u \in L^r(B(x_0, \frac{\rho}{2}))$, et

$$\left(\int_{B(x_0,\frac{\rho}{2})} |u|^r\right)^{1/r} \leq C(\rho, r)\left(\int_{B(x_0,\rho)} |u|^2\right)^{1/2}$$

Il en résulte en particulier que $u \in L^r(K)$, $\forall K$ compact $\subset \Omega$ et donc $u \in L^q_{loc}(\Omega)$.

<u>Preuve</u>: Elle repose sur une méthode d'itération due à J. Moser. Comme $u \in H^1_{loc}(\Omega)$, on sait que $u \in L^2(B(x_0,\rho))$ (et m. $u \in L^r(B(x_0,\rho))$ pour $r = 2^*$). Pour $i = 0, \dots,$ ds $\mathbb{N}$ on pose

$$q_i = 2\lambda^i = \lambda q_{i-1}, \quad \text{avec } q_0 = 2$$

où $\lambda = \frac{2^*}{2} = \frac{N}{N-2} > 1$. On pose également

$$\rho_i = \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2^{i+1}}$$

de sorte que la suite $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ décroît de $\rho_0 = \rho$ vers $\frac{\rho}{2}$, et

$$\rho_i - \rho_{i+1} = \frac{\rho}{2^{i+1}}$$

On a alors

$$\left(\int_{B(x_0,\varrho_{i+1})} |u|^{q_{i+1}}\right)^{\frac{1}{\lambda^{i+1}}} = \left(\int_{B(x_0,\varrho_{i+1})} |u|^{\lambda q_i}\right)^{\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{q_i}}$$

Par le Lemme IV.2, on a si $u \in L^{q_i}(B(x_0,\varrho_i))$

$$\left(\int_{B(x_0,\varrho_{i+1})} |u|^{\lambda q_i}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \frac{C(1+q_i)^2}{2^{-2(i+1)}\varrho^2} \int_{B(x_0,\varrho_i)} |u|^{q_i}$$

et donc

$$\left(\int_{B(x_0,\varrho_{i+1})} |u|^{q_{i+1}}\right)^{\frac{1}{\lambda^{i+1}}} \leq \left(C\left(\frac{(1+q_i)^2}{2^{-2(i+1)}\varrho^2}\right)\right)^{1/\lambda^i} \left(\int_{B(x_0,\varrho_i)} |u|^{q_i}\right)^{\frac{1}{\lambda^i}}$$

et on en déduit donc que si $u \in L^{q_i}(B(x_0,\varrho_i))$, alors $u \in L^{q_{i+1}}(B(x_0,\varrho_{i+1}))$

Comme pour $i=0$ $u \in L^2(B(x_0,\varrho_0))$ $\varrho_0 = \varrho$, $q_0 = 2$, on en déduit par récurrence que $u \in L^{q_{i+1}}(B(x_0,\varrho_{i+1}))$ et que

$$\left(\int_{B(x_0,\varrho_i)} |u|^{q_i}\right)^{\frac{1}{\lambda^i}} \leq \prod_{k=0}^{i-1}\left(\frac{c(1+q_k)^2}{\rho^2\, 4^{-(k+1)}}\right)^{\frac{1}{\lambda^k}} \int_{B(x_0,\varrho)} |u|^2$$

ce qui conclut la preuve, car $q_i \to +\infty$ lorsque $i \to +\infty$, et $\forall i,\ \varrho_i \geq \frac{\varrho}{2}$

Le calcul précédent nous a fourni une constante explicite, à savoir

$$K(i,\varrho) = \prod_{k=0}^{i}\left(\frac{c(1+q_k)^2}{\rho^2\, 4^{-(k+1)}}\right)^{\frac{1}{\lambda^k}}$$

Nous allons étudier le comportement de cette constante lorsque $i \to +\infty$. On a

Lemma IV.3. Il existe une constante K_0, ne dependant que de α_0 et α_1 telle que

$$K(i,\rho) \longrightarrow \rho^{-N} K_0$$

Lorsque $i \longrightarrow +\infty$

Preuve. Ecrivons.

$$K(i,\rho) = \prod_{k=0}^{i} \alpha(k,\rho)$$

où pour $k \in \mathbb{N}$, on a posé

$$\alpha(k,\rho) = \left(\frac{c(1+q_k)^2}{\rho^2\, 4^{-(k+1)}} \right)^{\frac{1}{\lambda^k}}$$

Passons au logarithme pour étudier le produit. On a

$$\log \alpha(k,\rho) = \lambda^{-k} \log \frac{c(1+q_k)^2}{\rho^2\, 4^{-(k+1)}}$$

$$= 2\lambda^{-k} \left(\frac{1}{2} \log c - \log \rho + \log \left(\frac{1+q_k}{2^{-(k+1)}} \right) \right)$$

Il en résulte

$$(11) \quad \log K(i,\rho) = \sum_{k=0}^{i} \left(\frac{2}{\lambda^k} \left[\log \sqrt{c} - \log \rho + \log \frac{(1+q_k)}{2^{-(k+1)}} \right] \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{\lambda^k} \left[\log c - 2 \log \rho \right] + 2 \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{\lambda^k} \log \frac{(1+q_k)}{2^{-(k+1)}} \Bigg]$$

Comme $\lambda > 1$ le premier terme converge, car

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^k} = \frac{1}{1-\lambda^{-1}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{\frac{N}{N-2}}{\frac{N}{N-2} - 1} = \frac{N}{2}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{i} \left(\frac{1}{\lambda^k} \left[\log c - 2 \log \rho \right] \xrightarrow[i \to +\infty]{} \frac{N}{2} \left[\log c - 2 \log \rho \right] \right.$$

ie

$$\boxed{\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{\lambda^k} \left[\log c - 2 \log \rho \right) \longrightarrow \log c \rho^{-N}}$$

Le dernier terme de la somme (11) est indépendant de ρ.

Notons que

$$\log\left(\frac{1+q_k}{2^{-(k+1)}}\right) = \underbrace{\log(1+q_k)}_{\geq 0} + \underbrace{(k+1)\log 2}_{\geq 2}.$$

Or $q^k = 2\lambda^k$.

Donc $0 \leq \log(1+q_k) = \log(1+2\lambda^k) \simeq k\log\lambda$ lorsque $k \to +\infty$

et donc

$$\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{\lambda^k}\log(1+q_k) \sim \sum_{k=0}^{i} (\log 2 + k\log\lambda)\frac{1}{\lambda^k} \to C_1 < +\infty$$

En regroupant les calculs précédents, on obtient

$$\log K(i,\rho) \to \log(\rho^{-N}) + C_0,$$

où C_0 est une constante. Le Lemme en découle.

IV. 3 Estimations $L^\infty_{loc}(\Omega)$

Les calculs précédents vont nous permettre de montrer que $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. A cet effet, pour passer des majorations L^r aux majorations L^∞, nous allons utiliser le résultat suivant, de la théorie de la mesure.

Lemme IV. 4 : Soit A un ensemble borélien de $\mathbb{R}^N$, de mesure non nulle. Soit f une fonction mesurable sur A. On suppose qu'il existe une constante M_0 positive, $r_0 > 1$ telle que

$$\left[\int_A |f(x)|^r dx\right]^{1/r} \leq M_0, \quad \forall r \geq r_0.$$

alors $f \in L^\infty(A)$ et

$$|f(x)| \leq M_0, \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}$$

Preuve : Pour $\varepsilon > 0$, considérons l'ensemble

$$W_\varepsilon = \{x \in A,\ |f(x)| \geq M_0 + \varepsilon\}.$$

On a

$$|W_\varepsilon|^{1/r}(M_0+\varepsilon) \leq \left[\int_{W_\varepsilon} |f(x)|^r\right]^{1/r} \leq M_0, \quad \forall\, r > r_0$$

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $|W_\varepsilon| \neq 0$. Alors

$$|W_\varepsilon|^{1/r} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } r \to +\infty$$

et donc l'inégalité précédente donne

$$M_0 + \varepsilon \leq M_0$$

ce qui est bien entendu contradictoire. On a donc, $\forall \varepsilon > 0$

$$|W_\varepsilon| = 0.$$

Il en résulte que

$$W = \{x \in A,\ |f(x)| \geq M_0\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} W_\varepsilon = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_{\frac{1}{n}}$$

est de mesure nulle.

Revenons à notre problème initial. On a

<u>Théorème IV.1</u> : Soit $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ solution de $Lu = 0$ sur Ω.
Alors, $\forall x_0 \in \Omega$, $0 < \rho$, t.q $B(x_0,\rho) \subset \Omega$, on a

$$|u(x)| \leq K_1 \left(\frac{1}{|B(x_0,\rho)|} \int_{B(x_0,\rho)} |u|^2 \right)^{1/2}, \text{ pour presque tout } x \in B(x_0, \tfrac{\rho}{2})$$

où K_1 est une constante qui ne dépend que de α_0, α_1.

En particulier

$$u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$$

<u>Preuve</u> : Il résulte de la Proposition IV.2 et de sa preuve que

$$\left(\int_{B(x_0,\frac{\rho}{2})} |u|^{q_{k+1}} \right)^{\frac{1}{\lambda^{k+1}}} \leq K(k,\rho) \int_{B(x_0,\rho)} |u|^2$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$

Comme $q_{k+1} = 2\lambda^{k+1}$, on a donc

$$\left(\int_{B(x_0,\frac{\rho}{2})} |u|^{q_{k+1}}\right)^{\frac{1}{q_{k+1}}} \leq K(k,\rho)^{1/2}\left(\int_{B(\rho)} |u|^2\right)^{1/2}$$

Dans le Lemme IV.3, nous avons vu que

$$K(k,\rho) \longrightarrow K_0\rho^{-N} \qquad k \to +\infty,$$

il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $k \geq k_0$

$$K(k,\rho) \leq 2K_0\rho^{-N}$$

Ainsi $\forall r \geq q_{k_0+1}$

$$\left(\int_{B(x_0,\frac{\rho}{2})} |u|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \sqrt{2K_0}\left(\frac{1}{\rho^N}\int_{B(x_0,\rho)}|u|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{2K_0|B(1)|}\left(\frac{1}{|B(x_0,\rho)|}\int_{B(x_0,\rho)}|u|^2\right)^{1/2}$$

La conclusion découle alors du Lemme IV.4