Chapitre 5

Le Lemme du Col

Le lemme du col est un exemple très simple de méthode de Min Max. Il permet souvent de trouver un nouveau point critique lorsqu'on connait un minimum local (parfois une solution évidente) et si la fonctionnelle n'est pas minorée. Son domaine d'applications est cependant plus vaste. Donnons tout de suite son énoncé.

Théorème 1. Soit F une fonctionnelle de classe C^1 sur un espace de Banach E. On fait les hypothèses suivantes sur F:

1) Il existe $u_0 \in E$, $\rho > 0$, et $\alpha > 0$ tels que

$$\|u - u_0\| = \rho \quad \text{alors} \quad F(u) > F(u_0) + \alpha \quad . \tag{5.1}$$

2) Il existe un point $u_1 \in E$ tel que

$$\|u_0 - u_1\| > \rho \quad \text{et} \quad F(u_1) < F(u_0) + \alpha \quad . \tag{5.2}$$

Soit alors $\mathcal{P}$ l'ensemble des chemins reliant u_0 à u_1, c'est-à-dire

$$\mathcal{P} = \{p \in C^0([0,1], E) \text{ tels que } p(0) = u_0,\ p(1) = u_1\} \quad .$$

Soit

$$\beta = \inf_{p \in P}(\sup_{s \in [0,1]} F(p(s))) \quad .$$

Alors

$$\beta \geq F(u_0) + \alpha \quad ,$$

et β est une valeur critique généralisée de F. Si F vérifie (P.S.), β est donc une valeur critique de F.

Commentaires.

1. Le point u_0 correspond à une "cuvette" pour F. Si F correspond à une hauteur (cf. figure 1), pour descendre à un niveau plus bas que $F(u_0)$, il faut en partant de u_0,

et en suivant un chemin continu, monter à une altitude de $F(u_0) + \alpha$, au moins. Dans la pratique u_0 correspond très souvent à un minimum local, une solution évidente. Pour vérifier la condition 1) il suffit alors de regarder la forme Hessienne au point u_0 et de montrer qu'elle est positive et elliptique.

2. Le point bas u_1 est facile à trouver lorsque la fonctionnelle n'est pas bornée inférieurement.

3. L'appellation Lemme du Col se justifie par l'idée intuitive que si on veut sortir de la cuvette autour de u_0, et rejoindre la vallée, où se trouve u_1, on va chercher le chemin qui sera celui qui monte le moins haut (comparer avec la définition de β). En principe en un tel point deux lignes se coupent (en tout cas si $\dim E = 2$, situation de la vie courante) : la ligne de crêtes, et la ligne du chemin qui mène au col. Le point de passage du col, correspond à un minimum d'altitude pour la ligne de crêtes, en revanche, il correspond à un maximum d'altitude sur la ligne de cheminement. Cette image est très similaire à celle que l'on peut avoir d'un point-selle en programmation linéaire.

4. La situation est décrite sur la figure ci-dessous.

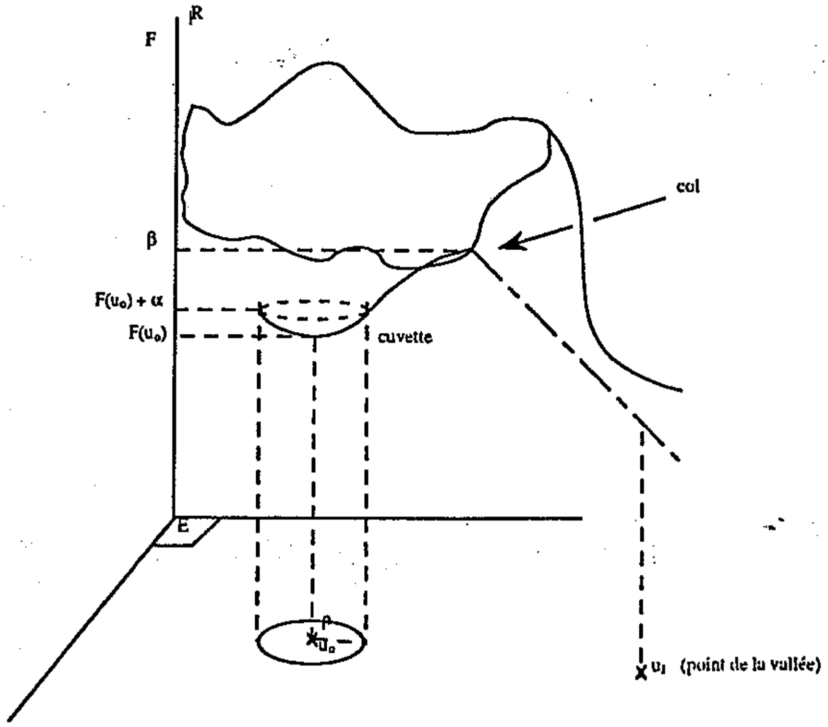

Figure 1. Graphe de F dans $E \times \mathbb{R}$.

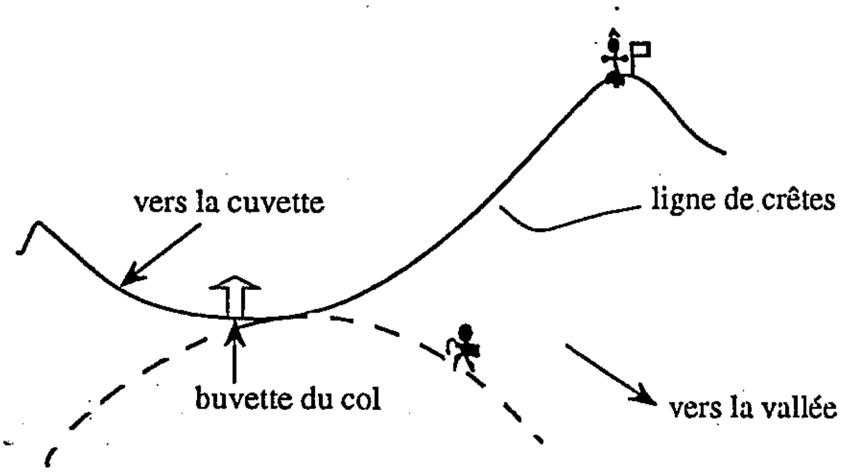

Figure 2. Le col à la rencontre de la ligne de crêtes et de la ligne de cheminement.

Il est parfois utile, et souvent plus facile de représenter les lignes de niveau (comme sur les cartes IGN) plutôt que le graphe : le graphe vit dans $E \times \mathbb{R}$ alors que les lignes de niveau sont tracées sur E.

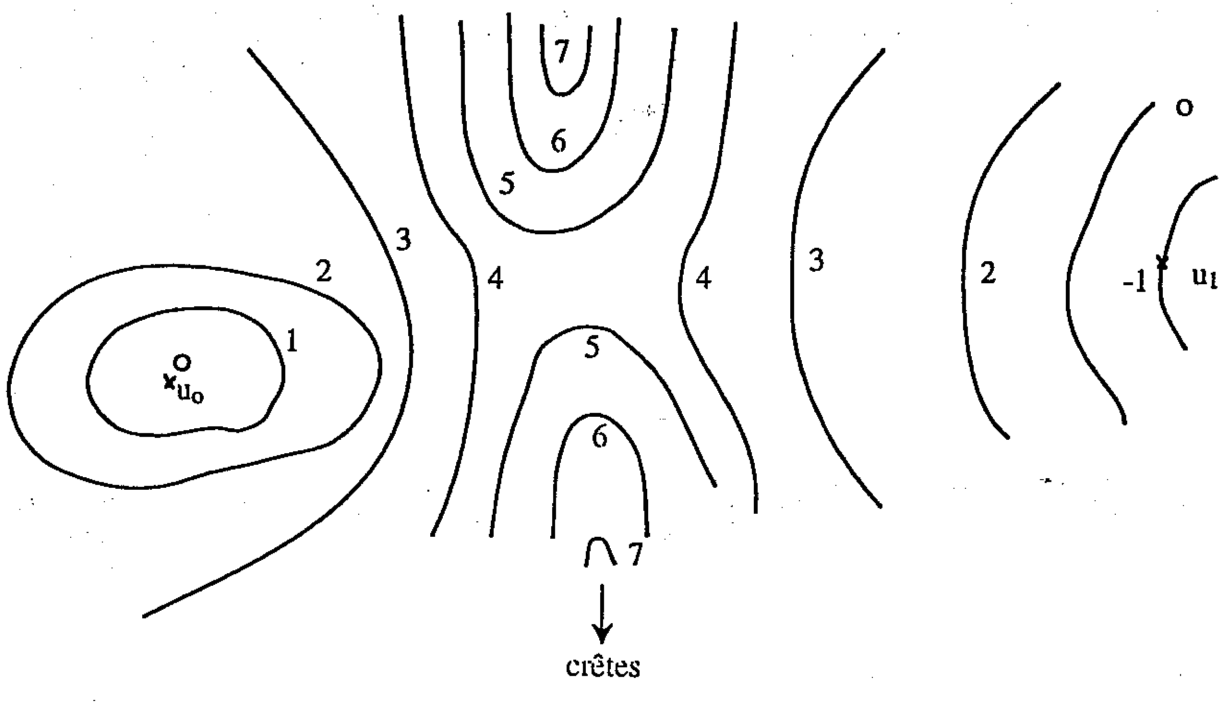

Figure 3. Sur chaque ligne de niveau nous avons indiqué la valeur de la fonction F.

Avant de donner la preuve du Théorème 1, commençons par un résultat préliminaire.

Proposition 1. L'ensemble $\tilde{K}_c$ des valeurs critiques généralisées de F est fermé (dans $\mathbb{R}$). De même l'ensemble K_c valeurs critiques est fermé.

Preuve. Soit β_n une suite de valeurs critiques généralisées de F, telle que

$$\beta_n \to \beta \quad \text{dans } \mathbb{R} \qquad (\beta \in \mathbb{R}) \quad .$$

Il faut montrer que β est une valeur critique généralisée de F. Par définition de β_n, pour n fixé, il existe une suite $(v_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$

$$\begin{array}{lll} F(v_k^n) & \to \beta_n & k \to +\infty \\ |dF(v_k^n)| & \to 0 & k \to +\infty \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc $k(n) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|F(v_{k(n)}^n) - \beta_n| \leq \frac{1}{n} \quad ,$$

$$|dF(v_{k(n)}^n)| \leq \frac{1}{n} \quad .$$

Posons alors $u_n = v_{k(n)}^n$. On vérifie que

$$F(u_n) \to \beta \quad n \to +\infty$$

et

$$dF(u_n) \to 0 \quad \text{dans } E^*, n \to +\infty \quad ,$$

et donc β est une valeur critique généralisée de F.

La deuxième assertion résulte du fait que l'application $u \to dF(u)$ est continue.

5.1 Démonstration du Lemme de Col (théorème 1).

Quitte à changer d'origine, et à soustraire une constante à F, on peut toujours supposer que

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad F(u_0) = F(0) = 0 \quad .$$

(ceci soulagera un peu les notations). Montrons tout d'abord que

$$\beta \geq F(u_0) + \alpha = \alpha \quad . \tag{5.3}$$

Rappelons que

$$\beta = \inf_{p\in\mathcal{P}} \sup_{s\in[0,1]} F(p(s)) \quad . \tag{5.4}$$

Considérons un chemin $p \in \mathcal{P}$. Comme $p(0) = u_0$, et $p(1) = u_1$ et comme p est continue, la fonction $\varphi(s) = \|p(s) - p(0)\|$ est continue et $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) > \rho$; il existe donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, $s_0 \in [0,1]$ tel que

$$\varphi(s_0) = \|p(s_0) - u_0\| = \rho \quad \text{et donc}$$

$$F(p(s_0)) \geq \alpha \quad \text{d'après la propriété 2} \quad .$$

Il en résulte que, pour tout chemin $p \in \mathcal{P}$

$$\sup_{s\in[0,1]} F(p(s)) \geq \alpha \quad ,$$

et (3) en résulte.

Afin de montrer que β est une valeur critique généralisée, on raisonne par l'absurde, et on suppose que β *n'est pas* une valeur critique généralisée, i.e. n'appartient pas à $\tilde{K}_c$. Par la proposition 1, comme $\tilde{K}_c$ est fermé, son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est ouvert : il existe donc, si $\beta \notin \tilde{K}_c$, un nombre $\epsilon > 0$ tel que

$$F \text{ n'a pas de valeur critique généralisée dans } [\beta - 2\epsilon, \beta + 2\epsilon] . \tag{5.5}$$

Montrons à l'aide du Lemme de déformation que l'on aboutit à une contradiction. D'après le lemme de déformation, pour $a = \beta - \epsilon$, $b = \beta + \epsilon$, il existerait, grâce à (5), une rétraction de F^b sur F^a, c'est-à-dire une application continue Φ de $F^{\beta+\epsilon} \times [0,1]$ vers $F^{\beta+\epsilon}$ telle que

$$\begin{cases} \Phi(v,0) = v \in v \in F^{\beta+\epsilon} \\ \Phi(v,1) \in F^{\beta-\epsilon} \\ \Phi(v,0) = v \quad , \quad \forall v \in F^{\beta-\epsilon} \quad . \end{cases} \tag{5.6}$$

On remarque en particulier que si on choisit ϵ suffisamment petit (ce qui est toujours possible, quitte à le diminuer), on peut le choisir de sorte que

$$\beta - \epsilon > F(u_1) \quad \text{(grâce à (2))} \tag{5.7}$$

et

$$\beta - \epsilon > 0 \qquad \text{(grâce à (3))} \quad . \tag{5.8}$$

Pour ce choix de ϵ, on voit que les extrémités des chemins de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire u_0 et u_1, ne bougent pas au cours de la rétraction, car

$$F(u_0) = 0 < \beta - \epsilon \quad , \quad F(u_1) < \beta - \epsilon$$

entraîne $u_0 \in F^{\beta-\epsilon}$, $u_1 \in F^{\beta-\epsilon}$, et donc par (6)

$$\Phi(u_0, 1) = u_0 \quad , \quad \Phi(u_1, 1) = u_1 \quad . \tag{5.9}$$

Considérons un chemin $p \in \mathcal{P}$ tel que

$$\sup_{s\in[0,1]} F(p(s)) < \beta + \epsilon \tag{5.10}$$

(il est toujours possible de trouver un tel chemin en raison de la définition même de β). (9) signifie que $\forall s \in [0,1] \quad p(s) \in F^{\beta+\epsilon}$, et donc p est un chemin qui relie u_0 à u_1 dans $F^{\beta+\epsilon}$. A l'aide de la déformation Φ nous allons pousser ce chemin sur $F^{\beta-\epsilon}$: comme ni u_0, ni u_1 ne bougent au cours de cette déformation, nous obtiendrons un nouveau chemin reliant u_0 à u_1, mais cette fois-ci dans $F^{\beta-\epsilon}$. Un tel chemin contredirait la définition de β, et ceci terminera notre raisonnement par l'absurde.

Plus précisément considérons le chemin

$$\tilde{p} : [0,1] \to F^{\beta-\epsilon}$$

défini par

$$\tilde{p}(s) = \Phi(p(s), 1) \quad .$$

On a bien

$$\tilde{p}(0) = \Phi(p(0),1) = \Phi(u_0,1) = u_0$$
$$\tilde{p}(1) = \Phi(p(1),1) = \Phi(u_1,1) = u_1 \quad .$$

On vérifie aisément que $\tilde{p}$ est continue (composée de fonctions continues), et donc $\tilde{p} \in \mathcal{P}$. On a, en outre $\forall s \in [0,1], \tilde{p}(s) \in F^{\beta-\epsilon}$, et donc

$$\sup_{s\in[0,1]} F(\tilde{p}(s)) < \beta - \epsilon \quad .$$

Ceci est évidemment contradictoire avec la définition de β, et termine donc la preuve du Théorème 1.

Remarques.

1. Ce résultat remarquable est dû à Ambrosetti et Rabinowitz (sous la forme que nous avons énoncée), (J. Funt. Anal. 14 (1973)). Il avait été introduit pour traiter des problèmes liés aux systèmes hamiltoniens. En dimension finie néanmoins, la méthode était connue bien avant.

2. Il existe de nombreuses variantes de ce théorème (voir [Struwe]).

3. Il convient d'attirer l'attention sur le fait que, dans la preuve qui a été donnée, on n'essaie pas de montrer que β est atteint par un chemin optimal (ce qui aurait pu être une première idée pour démontrer le théorème). Dans toutes les méthodes de Min-max que nous verrons, cette même remarque s'appliquera. [voir néanmoins le problème du chapitre X, où cette démarche est rendue possible grâce au principe d'Ekeland].

5.2 . Une application du Lemme du Col.

Voyons maintenant effectivement comment le résultat précédent permet de démontrer l'existence de solutions pour des problèmes non-linéaires.

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. On cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(u) \quad \text{dans } \Omega \ , \\ \quad u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \ . \end{cases} \tag{5.11}$$

Bien entendu, afin de trouver des solutions, il faut faire des hypothèses raisonnables sur la non-linéarité. Au chapitre III, en étudiant un problème de minimisation sous contrainte, nous avions trouvé une solution positive lorsque la non-linéarité a la forme

$$g(t) = |t|^{p-2}t \quad t \in \mathbb{R} \ , \tag{5.12}$$

lorsque $p < 2^*$. La situation que nous étudions ici peut être considérée comme une extension de ce résultat, à des non-linéarités g qui ressemblent beaucoup à (11) (mais qui ne possèdent pas ses propriétés d'homogénéïté). Nous ferons les hypothèses suivantes sur g:

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t} = 0 \ . \tag{5.13}$$

En particulier $g(0) = 0$ et g est dérivable en 0 de dérivée nulle.

- Il existe $2 < p \leq 2^*$ tel que

$$|g(t)| \leq C(1 + |t|^{p-1}), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{5.14}$$

où $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique de Sobolev de l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}$.

- Soit, pour $t \in \mathbb{R}$ $G(t) = \int_0^t g(s)ds$. Il existe $q > 2$ et $R_0 > 0$ tel que

$$0 < q\,G(t) < g(t)t \quad \text{si } |t| \geq R_0 \ . \tag{5.15}$$

L'hypothèse (14) exprime le fait qu'à l'infini, g ne croît pas plus vite qu'une fonction de type (12). L'hypothèse (15) en revanche montre (d'une certaine façon) que g croît au moins aussi vite qu'une fonction de la forme

$$t \to C|t|^{q-2}t \quad , \quad C \text{ constante et } 2 < q < 2^* \ .$$

Le fait que $q > 2$ exclut en particulier le cas "linéaire":

$$g(t) = \lambda t \ .$$

[dans ce cas (10) deviendrait un problème de fonctions propres et n'aurait donc de solutions que pour un ensemble discret de valeurs de λ]. Rappelons:

Proposition 2. Les solutions $u \in H_0^1(\Omega)$ sont les points critiques de la fonctionnelle F, de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ définie par

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega G(v) \quad , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad .$$

Afin de pouvoir appliquer les techniques du calcul des variations, il est tout d'abord important de se demander comment se comportent les suites de Palais- Smale de F.

Proposition 3. Les suites de Palais-Smale de F sont bornées dans $H_0^1(\Omega)$.

Preuve. Soit u_n une suite de Palais-Smale pour F, i.e. telle que il existe $C > 0$, tel que

$$|F(u_n)| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5.16}$$

$$|dF(u_n)| \to 0 \quad \text{dans } H^{-1}, \text{ lorsque } n \to +\infty \quad . \tag{5.17}$$

La relation (17) signifie que

$$\Delta u_n + g(u_n) \to 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega) \quad . \tag{5.18}$$

En multipliant par u_n et en intégrant, on trouve

$$\begin{aligned} < dF(u_n), u_n > &=< -\Delta u_n - g(u_n), u_n > \\ &= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega g(u_n) u_n \quad . \end{aligned}$$

Par (17)

$$< dF(u_n), u_n >= \mathrm{o}(1)\|u_n\|_{H_0^1} \quad \text{où } \mathrm{o}(1) \to 0 \;, \; n \to +\infty \quad ,$$

et par (15)

$$\int_\Omega g(u_n)u_n \geq q \int_\Omega G(u_n) \quad .$$

On a donc

$$-\int_\Omega |\nabla u_n|^2 + q\int_\Omega G(u_n) \leq \mathrm{o}(1)\|u_n\|_{H_0^1} \quad .$$

Par ailleurs par (16), on a

$$\left|\frac{q}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - q\int_\Omega G(u_n)\right| \leq C_q \quad .$$

En ajoutant ces deux dernières relations, le terme $q\int_\Omega G(u_n)$ disparaît et on obtient

$$\left(\frac{q}{2} - 1\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq C_q + \mathrm{o}(1)\|u_n\|_{H_0^1} \quad .$$

Comme $q > 2$, $\left(\frac{q}{2} - 1\right) > 0$, et il résulte de l'inégalité ci-dessus que

$$\|u_n\|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\right)^{1/2}$$

reste borné lorsque $n \to +\infty$.

Nous sommes maintenant prêts pour étudier la condition de Palais-Smale.

Théorème 2. Si $p < 2^*$ alors F vérifie la condition de Palais-Smale.

Preuve. Soit u_n une suite de Palais-Smale. D'après la proposition 3, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans H_0^1 vers un élément $u \in H_0^1$, i.e.

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } H_0^1 \text{ (pour une sous-suite, encore notée } u_n) \quad .$$

Afin de prouver le théorème, montrons que si $u_n \rightharpoonup u$ dans H_0^1, et $p < 2^*$, alors

$$g(u_n)u_n \to g(u)u \quad \text{fortement dans } L^1(\Omega) \quad . \tag{5.19}$$

En effet, par injection compacte de Sobolev,

$$u_n \to u \quad \text{fort dans } L^p(\Omega) \quad (p < 2^*)$$

On peut alors appliquer la proposition 3 du chapitre III à la fonction $t \to g(t)t$ pour prouver (19).

Par ailleurs, $\forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$, on a, par (17)

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi = \int_\Omega g(u_n) \cdot \varphi + \, o(1)\|\varphi\|_{H_0^1} \quad . \tag{5.20}$$

On peut passer à la limite dans (20) pour conclure que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega g(u)\varphi \quad , \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \quad , \tag{5.21}$$

et donc

$$-\Delta u = g(u) \quad \text{dans } \Omega \quad . \tag{5.22}$$

En fait, on peut prendre $\varphi \in H_0^1$ dans (20) et (21). En prenant $\varphi = u_n$(resp. $\varphi = u$) dans (20) (resp. (21)), on a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \int_\Omega g(u_n)u_n + \, o(1)$$
$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega g(u)u \quad .$$

Par (19), il vient

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \to \int_\Omega |\nabla u|^2 \quad ,$$

et donc $u_n \to u$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

Remarque. Dans l'énoncé du Théorème 2, le cas $p = 2^*$ est exclu. C'est l'assertion (19) qui n'est plus valable, car l'injection $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ n'est pas compacte.

En fait dans le cas où

$$g(t) = |t|^{2^*-2}t \quad ,$$

nous montrerons que la condition de Palais-Smale n'est pas satisfaite (chapitre IX). Nous ferons en particulier une étude détaillée du mécanisme de perte de compacité dans ce cas-là.

Nous sommes en mesure maintenant de démontrer un résultat d'existence.

Théorème 3. Si g vérifie (13), (14) pour $p < 2^*$, et (15) alors il existe une solution positive u^+, non nulle, dans $H_0^1(\Omega)$ à l'équation (11).

Preuve. Nous allons appliquer le Lemme du Col (théorème 1) à la fonctionnelle F. Il s'agit alors de trouver une "cuvette", et un point bas.

1ère Etape. Existence d'une cuvette. Il est clair, comme $g(0) = 0$, que la fonction nulle $u = 0$, est solution de l'équation et donc point critique. Afin de voir s'il y a une cuvette autour de 0, étudions le développement à l'ordre 2 autour de 0, de la fonctionnelle F (en fonction de la norme $\| \quad \|_{H_0^1}$).

Comme $\frac{g(t)}{t} \to 0$, lorsque $t \to 0$, on vérifie par (13) et (14) que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(\epsilon)$ telle que

$$|g(t)| \leq \epsilon|t| + C(\epsilon)|t|^{p-1} \quad ,$$

d'où il résulte que

$$|G(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}|t|^2 + \frac{C(\epsilon)}{p}|t|^p \quad .$$

On a donc

$$F(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1} - \frac{1}{2}\epsilon\|u\|^2_{L^2} - \frac{1}{p}C(\epsilon)\|u\|^p_{L^p} \quad .$$

Comme $2 < p < 2^*$, on a par injection de Sobolev,

$$\|u\|_{L^p} \leq C_p\|u\|_{H_0^1} \quad ,$$

et par inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{L^2} \leq C_2\|u\|_{L^2} \quad .$$

Il vient alors

$$F(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1} - \frac{1}{2}C_2\epsilon\|u\|^2 - \frac{1}{p}C_pC(\epsilon)\|u\|^p_{H_0^1}$$
$$\geq \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}C_2\epsilon\right) - \frac{1}{p}C_pC(\epsilon)\|u\|^{p-2}_{H_0^1}\right]\|u\|^2_{H_0^1} \quad .$$

Il suffit alors de choisir ϵ de sorte que

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}C_2\epsilon = \frac{1}{4} \quad .$$

Comme $p > 2$, il existe $\rho_0 > 0$, tel que si $\|u\| < \rho_0$, alors

$$\frac{1}{p}C_pC(\epsilon)\|u\|^{p-2}_{H_0^1} \leq \frac{1}{8} \quad .$$

Ainsi

$$F(u) \geq \frac{1}{8}\|u\|^2_{H_0^1} \quad \text{si } \|u\| \leq \rho_0 \quad .$$

En particulier, si $\|u\| = \rho_0$,

$$F(u) \geq \frac{1}{8}\rho_0^2 = \alpha \quad .$$

Ceci établit le point (1) du Lemme du Col.

2ème Etape. Existence du point bas. Nous allons établir que F n'est pas minorée, ce qui fournit automatiquement le point bas u_1.

Montrons tout d'abord que G croît au moins aussi vite que $|t|^q$ c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$, tel que

$$|G(t)| \geq C|t|^q \quad . \tag{5.23}$$

Ceci résulte en fait de l'hypothèse (15). En effet

$$0 < qG(t) \leq G'(t)t \quad \text{si } |t| \geq R_0 \quad ,$$

qui implique

$$i.e. \frac{d}{dt}(|t|^{-q}G(t)) \geq 0, \quad \text{si } |t| \geq R_0 \quad .$$

(23) en découle aisément.

On peut alors utiliser un argument d'homogénéité. On a, pour $u \in H_0^1$,

$$F(\lambda v) = \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega G(\lambda v)$$
$$\leq \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - |\lambda|^q \int_\Omega |u|^q \quad \text{(par (23))} \quad .$$

Comme $q > 2$, si $v \neq 0$, on voit que

$$F(\lambda v) \to -\infty \quad , \quad \text{lorsque } |\lambda| \to \pm\infty$$

Il suffit alors de choisir un vecteur v non nul, quelconque, et de poser $u_1 = \lambda v$, pour λ assez grand.

3ème Etape. Application du Lemme du Col. Par le théorème 2, F satisfait (P.S.). Nous venons de vérifier que les hypothèses (1), (2) du théorème 1 sont satisfaites : on peut donc appliquer ce résultat, qui nous dit que $\beta \geq \alpha > 0$ définie par (3) est une valeur critique. Nous avons donc obtenu une solution non triviale de l'équation (11).

Si on désire une solution non triviale *positive*, on remplace la fonction g par la fonction g^+ définie par

$$g^+ = \max\{g, 0\} \quad ,$$

et G par

$$G^+ = \int_0^t g^+(s)ds \quad ,$$

et F par F^+ définie par

$$F^+(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega G^+(v) \quad .$$

On vérifie que F^+ satisfait (P.S.), et qu'il y a une "cuvette", comme précédemment autour de la fonction nulle. Par ailleurs, comme $G^+ \geq G$, on a

$$F(v) \geq F^+(v)$$

et donc $F^+(\lambda v) \to -\infty$, lorsque $\lambda \to +\infty$, pour $v \neq 0$. L'existence du point bas s'en déduit donc comme précédemment. En appliquant le Lemme du Col, on obtient l'existence d'une solution non nulle u^+ de

$$\begin{cases} -\Delta u^+ = g^+(u^+) & \text{sur } \Omega \\ u^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad .$$

Comme $g^+ \geq 0$, il résulte du principe du maximum que

$$u^+ \geq 0 \quad \text{dans } \Omega \quad .$$

Or par (15), $g(t)t \geq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$ donc

$$g(t) \geq 0 \quad , \quad \text{si } t \geq 0 \quad .$$

Ainsi $g^+(t) = g(t), \ \forall t \in \mathbb{R}^+$, et donc $g^+(u^+) = g(u^+)$; u^+ est donc la solution recherchée.

Exercices

Exercice 1. On considère l'espace de Hilbert $H_0^1([0,1])$. On rappelle que $H_0^1([0,1]) \hookrightarrow C^0$ avec injection compacte. Soit ρ une fonction continue sur [0,1] telle que

$$1 \leq \rho(x) \leq 2 \quad , \quad \forall x \in [0,1] \quad .$$

1. On cherche $u \in H_0^1([0,1])$ solution de l'équation

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(\rho(x)\frac{d}{dx}u) & = \exp u^2 - 1 \qquad \text{sur } [0,1] \\ u(0) & = u(1) = 0 \quad . \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que u a une solution évidente.

2. Montrer que les solutions de (1) correspondent aux points critiques d'une fonctionnelle, que l'on précisera.

3. Montrer en utilisant le Lemme du Col que (1) a une solution dans $H_0^1([0,1])$ non triviale, positive.

Exercice 2.

1. On considère pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (paramètre) l'équation

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left[\rho(x)\frac{d}{dx}u\right] & = \lambda(\exp u - 1) \qquad \text{sur } [0,1] \\ u(0) & = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

[ρ comme dans l'exercice 1].

Montrer que (2) a une solution si $\lambda > 0$ est assez petit, non triviale.

2. Même question pour l'équation

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(\rho(x)\frac{d}{dx}u\right) = \lambda \exp u \\ u(0) = u(1) = 0 \quad . \end{cases} \tag{3}$$

Exercice 3. Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. On note λ_1 la première valeur propre du Laplacien sur Ω. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\frac{g(t)}{t} \to a \quad \text{lorsque } t \to 0$$
$$\frac{g(t)}{t} \to b \quad \text{lorsque } |t| \to +\infty$$

On suppose que $a < \lambda_1 < b$ (et $g \in C^0(\mathbb{R})$). On suppose de plus $b < \lambda_2$ (deuxième valeur propre).

1. Montrer que l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(u) \qquad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases},$$

a une solution.

2. (Réflexion). Que peut-on dire si $a = \lambda_1$?

Soit F une fonctionnelle sur un espace de Banach E. Montrer que si F a deux minima locaux, alors F a au moins trois points critiques.

Exercice 5. Soit F une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} F(x+1, y) &= F(x, y) \\ F(x, y+1) &= F(x, y) \end{aligned} .$$

Montrer que F a au moins trois points critiques sur le carré $[0, 1]^2$.