2. MAJORATIONS GLOBALES ET EXISTENSE POUR LES PROBLEMES ELLIPTIQUES

MAJORATIONS GLOBALES ET EXISTENCE POUR LES PROBLÈMES ELLIPTIQUES

I INTRODUCTION

Dans la partie A, nous avons étudié des propriétés locales de solutions d'équations elliptiques homogènes du type

(1) $$Lu = 0,$$

où L est sous forme divergence. Comme nous l'avions vu, l'ensemble des solutions de (1) forme un espace vectoriel (de dimension infinie). Nous avions vu que les solutions de (1) possèdent des propriétés locales intéressantes : notre résultat principal était le suivant :

$$u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$$

ie $\forall K$ compact $\subset \Omega$, i.e

$$\sup_{x \in K} |u(x)| < +\infty .$$

Dans cette partie, nous considérons le problème "inverse" suivant : étant donné f une fonction (ou une distribution) définie sur Ω, existe-t-il u t.q

(2) $$Lu = f \quad \text{ds } \Omega .$$

Bien entendu, si ce problème possède une solution particulière u_0, l'ensemble des solutions est un espace affine, de la forme $\{u_0\} + W$, où W est l'espace vectoriel des solutions du problème homogène (1), Afin d'avoir un problème bien posé (i.e pour avoir existence et unicité de la solution), il faut imposer, en plus de l'équation (2) des conditions aux limites (i.e sur le bord $\partial\Omega$ de l'ouvert Ω).

Il existe des conditions aux limites de natures très différentes (Neumann, Dirichlet, mixtes, etc...). Afin de fixer les idées, et pour limiter les difficultés, nous nous contenterons de considérer, dans ce cours, des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, c'est à dire

(3) $\quad u = 0 \quad$ sur $\partial\Omega$.

i.e le problème type sera

$$(I) \quad \begin{cases} -Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ou encore

$$(II) \quad \begin{cases} -Lu + cu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où c est une fonction définie sur Ω.

Les problèmes du type (I), (II) ont été considérée dès le début du XIX^{eme} siècle. Le point de vue de l'analyse fonctionnelle (fin XIX^{eme}, début du XX^{eme}) a néanmoins radicalement changé leur approche. L'idée est d'introduire des espaces de fonctions (ou de distributions), X pour u, Y pour f, de sorte que les éléments de X vérifient la condition aux limites (2), et que

(4) $\quad L : X \longrightarrow Y \quad$ (X, Y Banach).

soit un isomorphisme. Dans ce cas, en effet le problème (I) possède une solution unique u, $\forall f \in Y$ donné, à savoir

$$(I) \iff u = L^{-1}(f).$$

<u>Comment montrer que L est un isomorphisme de X vers Y ?</u>

Comme il s'agit de problèmes linéaires le point essentiel et d'établir des majorations dans les normes des espaces de Banach, du type :

(5) $\quad \|u\|_X \leq C \|Lu\|_Y \quad , \forall u \in X.$

[pour une telle majoration, il est essentiel d'avoir des e.v. normés !].

Lorsqu'une égalité du type (5) est établie, on vérifie en effet :

A) Ker $L = \{0\}$. En effet si $Lu = 0$, par (5), il vient

$$\|u\|_X = 0 \quad , \text{i.e } u = 0$$

B) Im L est fermé dans Y. En effet, si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ds Im L, ~~on a~~ il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ds X tel que $\forall n$

$$y_n = Lx_n.$$

Par (5), on a $\forall n, m$

$$\|y_n - y_m\| = \|L(x_n - x_m)\| \geq \frac{1}{C}\|x_n - x_m\|_X.$$

et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X : la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite x, $x_n \to x$. Il en résulte par continuité

$$y_n = Lx_n \longrightarrow y = Lx,$$

ie la limite de la suite y_n est donc dans Im L.

Il reste alors en général à vérifier Im $L = Y$. (on peut par exemple montrer que Im L est dense).

Remarque. Au lieu de vérifier (5), il suffit de vérifier

$$(6) \qquad \|u\|_X \leq C\|Lu\|_Y \quad , \forall u \in \tilde{X}$$

où $\tilde{X}$ est un sous-espace dense de X. Dans notre contexte, comme nous avons à faire à des espaces de fonctions, $C_c^\infty(\Omega)$ est souvent dense ds X, et on peut donc prendre $\tilde{X} = C_c^\infty(\Omega)$

CONCLUSION : Le problème d'existence de solutions pour I (ou II) se ramène à établir une majoration du type (5). On appelle une telle majoration une estimation à priori. En général, on peut se contenter de le faire pour des fonctions assez régulières.

Un exemple élémentaire où une telle méthode est mise en oeuvre est le Théorème de Lax-Milgram et ses applications.

II Le THÉORÈME DE LAX-MILGRAM

II.1 Cadre abstrait :

On considère ici un espace de Hilbert H, et L une application linéaire de H vers H^*, continue. On fait l'hypothèse suivante sur L (ellipticité) : $\exists \alpha > 0$, t.q $\forall u \in H$

$$(1) \quad \langle Lu, u \rangle_{H^*, H} \geq \alpha \|u\|^2$$

On a alors

<u>Proposition II-1</u> : L est un isomorphisme de H vers H^*.

<u>Preuve</u> : On a $\forall u \in H$ $\quad |\langle Lu, u \rangle_{H^*,H}| \leq \|Lu\|_{H^*} \|u\|_H$

et donc par (1)

$$\alpha \|u\|_H^2 \leq \|Lu\|_{H^*} \|u\|_H$$

i.e

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|Lu\|_{H^*} \quad , \forall u \in H$$

c'est à dire que L vérifie la majoration (I.5). Il résulte de la discussion de la partie I que L est injective, et que $\operatorname{Im} L$ est fermé dans H^*. Montrons que $\operatorname{Im} L = H^*$. Par le Théorème de représentation de Riesz, il existe une application continue $\tilde{L} : H \to H$ t.q $\langle Lu, w \rangle_{H^*, H} = \langle \tilde{L}u, w \rangle_{H,H}$. Il suffit de montrer que $\operatorname{Im} \tilde{L} = H$. Comme $\operatorname{Im} \tilde{L}$ est fermée, d'après ce qui précède montrons que $\operatorname{Im} \tilde{L}$ est dense ds H, ie $(\operatorname{Im} \tilde{L})^\perp = \{0\}$

$$\begin{aligned} \text{Or } v \in (\operatorname{Im} \tilde{L})^\perp &\iff \forall u \in H \ \langle \tilde{L}u, v \rangle = 0 \\ &\iff \forall u \in H \ \langle u, \tilde{L}^* v \rangle = 0 \\ &\iff \tilde{L}^* v = 0 \iff v \in \operatorname{Ker} \tilde{L}^* \end{aligned}$$

Par (1), on a $\langle u, \tilde{L}^* u\rangle \geq \alpha \|u\|^2$, $\forall u$

et donc par le meme raisonnement que précédemment, on déduit que $\operatorname{Ker} \tilde{L}^* = \{0\}$, d'où le résultat.

II.2 Applications aux problèmes elliptiques.

II.2.1: Soit Ω un domaine borné, régulier de $\mathbb{R}^N$. On considère ici

$$H = H_0^1(\Omega).$$

On rappelle que

$$H_0^1 = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1},$$

i.e H_0^1 est l'adhérence des fonctions C^∞ à support compact dans Ω, pour la norme H^1. On identifie le dual de $H_0^1(\Omega)$, avec l'ensemble $H^{-1}(\Omega)$ des distributions f sur Ω t.q. $\exists C > 0$

$$(2) \quad |\langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| \leq C \|\varphi\|_{H^1}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

On munit alors $H^{-1}(\Omega)$ de la norme

$$\|f\|_{H^{-1}} = \sup\left\{ |\langle f, \varphi\rangle|_{\mathcal{D}', \mathcal{D}},\ \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq 1,\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\right\}$$

La dualité (2) s'étend alors par densité à $H_0(\Omega)$ ie et on a

$$|\langle f, v\rangle_{H^{-1}, H^1}| \leq \|f\|_{H^{-1}} \|v\|_{H^1}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Il en résulte que $H^{-1}(\Omega)$ s'identifie à $[H_0^1(\Omega)]^*$. Comme exemple d'éléments de $H^{-1}(\Omega)$, on a

Lemme II.1. $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ (de manière continue). De manière plus générale $L^q(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, $\forall\ q \geq \frac{2^*}{2^*-1} = \frac{2N}{N+2}$

Preuve : Soit $f \in L^q(\Omega)$, pour $q \geq \frac{2N}{N+2}$. On a $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$|\langle f, \varphi\rangle| = \left|\int_\Omega f \cdot \varphi\right| \leq \|f\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

où on a utilisé le fait que $\frac{2N}{N+2}$ est l'exposant conjugué de 2^*

ainsi que l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Il en résulte que $f \in H^{-1}(\Omega)$ et

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}$$

ce qui termine la preuve.

II.2.2 Opérateurs elliptiques sous forme divergence.

Comme dans la partie A, on considère ici un opérateur elliptique

$$L = \operatorname{div}(A(x)\nabla)$$

où la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq N}$ est symétrique, à coefficients bornés, et vérifie la condition d'ellipticité : $\exists \alpha_0, \alpha_1, \alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0$ t.q $\forall x \in \Omega, \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$

(H3) $$\alpha_0\|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \alpha_1|\xi|^2$$

Soit alors $u \in H_0^1(\Omega)$. Considérons

$$Lu = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

On vérifie aisément :

Lemme II.2 : L'application $L : u \longmapsto Lu$ est une application continue de $H_0^1(\Omega)$ vers $H^{-1}(\Omega)$.

Preuve : Comme les coefficients a_{ij} sont bornés, il existe $M > 0$ t.q

$$|a_{ij}(x)| \leq M \quad , \forall x \in \Omega, \ \forall i, j$$

En particulier, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\langle Lu, \varphi\rangle = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

et donc

$$|\langle Lu, \varphi\rangle| \leq M \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$$

par l'inégalité de Poincaré. Il en résulte que $Lu \in H^{-1}(\Omega)$ et

et que
$$\|Lu\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C M \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Remarque : Le Lemme II.2 ne fait pas intervenir la condition d'ellipticité (H3).

Lemme II.3 . On a , $\forall u \in H^1_0(\Omega)$
$$\langle Lu, u \rangle_{H^{-1}, H^1_0} \geq \alpha_0 \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$

Preuve : On a
$$\langle Lu, u \rangle_{H^{-1}, H} = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \geq \alpha_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 = \alpha_0 \|u\|^2_{H^1_0}$$
et la conclusion en résulte.

Il résulte alors du Théorème de Lax-Milgram (Proposition II.1)

Proposition II.2 : L est un isomorphisme de $H^1_0(\Omega)$ vers $H^{-1}(\Omega)$.
En particulier, $\forall f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe un unique $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que
$$\operatorname{div}(A(x) \nabla u) = f \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$
i.e
$$\forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega) \qquad \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Commentaire : Le fait que $u \in H^1_0(\Omega)$ est interprété comme : " u vérifie la condition aux limite homogène $u = 0$ sur $\partial\Omega$ ". Ce fait peut être analysé de manière plus claire grâce à la théorie des Traces (qui suppose que l'ouvert soit suffisamment régulier).

Dans le cas où f est plus régulière, on peut se demander si la solution u elle-même l'est également. En termes d'isomorphismes, cela reviendrait à remplacer les espaces $H^1_0(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$ par des espaces plus petits.

Lorsque les coefficients a_{ij} sont réguliers, et en particulier constants nous allons voir que ceci est possible, et que l'on peut gagner des "ordres de dérivation" pour u.

III THÉORIE DE LA RÉGULARITÉ POUR LE LAPLACIEN

On considère ici

$$L = -\Delta = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Rappelons que pour $1 \leq p \leq +\infty$

$$W^{2,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega),\ \nabla u \in L^p(\Omega),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega) \}$$

et de manière générale, pour $k \in \mathbb{N}$

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega),\ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leq k \}$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

muni de cette norme $W^{k,p}$ est un espace de Banach, réflexif pour $1 < p < +\infty$, séparable pour $1 \leq p < +\infty$. Au vu de la définition de L, on voit clairement que $L = -\Delta$ est une application linéaire de $W^{2,p}(\Omega)$ vers $L^p(\Omega)$, et de manière générale

$$-\Delta : W^{k+2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$$

est continue $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall 1 \leq p \leq +\infty$. Pour obtenir un isomorphisme, il faut rajouter des conditions aux limites. C'est pourquoi nous considérerons

$$X_p = W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \quad , \text{pour } 1 \leq p < +\infty.$$

et de manière plus générale pour $k \geq 1$.

$$X_j = W^{k,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega).$$

Lorsque $N = 1$, $\Omega =]0,1[$ (ou tout autre intervalle borné de $\mathbb{R}$, l'opérateur Δ se réduit à la dérivée seconde, ie

$$-\Delta = -\frac{d^2}{dx^2}$$

On a alors B 9

<u>Proposition III.1</u> : Soit $N=1$, $I=]0,1[$. Alors $-\frac{d^2}{dx^2}$ est un isomorphisme de $W^{k+2,p}\cap W_0^{1,p}(I)$ vers $W^{k-2,p}(I)$, $\forall p\in[1,+\infty]$ $\forall k\in\mathbb{N}^*$.

En particulier, $\forall f\in W^{k,p}(I)$ il existe un unique $u\in W^{k+2,p}(I)$ t.q

$$(1)\begin{cases}-u''=f & \text{sur } [0,1]\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

De plus

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(I)}\leq C\|f\|_{W^{k,p}(I)}$$

où C est une constante que ne dépend que de k et de p.

<u>Preuve</u> : Pour $f\in W^{k,p}(I)\subset H^{-1}(I)$, et donc l'existence d'une solution $u\in H_0^1(\Omega)$ de (1) est clair. Par ailleurs comme

$$\frac{d^2u}{dx^2}=f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(I)$$

il en résulte par dérivation que

$$\frac{d^ju}{dx^j}=\frac{d^{j-2}}{dx^{j-2}}f \quad ,\forall\ j\in\{1,\dots,k+2\}$$

Ainsi

$$\sum_{i=2}^{k+2}\left\|\frac{d^j}{dx^j}u\right\|_{L^p(I)}=\|f\|_{W^{k,2,p}(I)}$$

Pour conclure, il suffit de majorer $\|u\|_{L^p}+\|u'\|_{L^p(I)}$ en fonction de f, . . (exercice).

Dans le cas où $N\geq 2$, le résultat de la proposition III.1 s'étend au cas des ouverts bornés réguliers, <u>MAIS</u> uniquement pour des exposants p t.q $1<p<+\infty$.

Nous allons alors le résultat suivant, que nous admettrons :

THÉORÈME IV.1 : Soit $N \geq 2$, et Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $1 < p < +\infty$, et $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Alors $-\Delta$ est un isomorphisme de $W^{k+2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ vers $W^{k,p}(\Omega)$.

En particulier, pour tout $f \in W^{k,p}(\Omega)$, il existe un unique $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ t.q

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De plus

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C(p, k, \Omega) \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

où $C(p, k, \Omega)$ est une constante qui ne dépend que de p, k et Ω.

COMMENTAIRE 1) Comme dans le cas $N = 1$, on voit que pour la solution u de (2), on "gagne" deux ordres de dérivation par rapport à f.

2) Le résultat ne s'étend pas aux cas $p = 1$ et $p = +\infty$

3) Lorsque $p = 2$, on peut démontrer ce résultat à l'aide de méthodes élémentaires Hilbertiennes (mais la condition aux limite introduit de nombreuses complications techniques).

4) En revanche, pour $p \neq 2$, la preuve utilise la théorie très délicate des intégrales singulières, et en particulier la méthode de de Calderon - Zygmund.

5) Dans le cas où $k = 2$, on voit que pour $f \in L^p(\Omega)$ $(1<p<\infty)$ $u \in W^{2,p}(\Omega)$ et

$$(3) \quad \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(p, \Omega) \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

Grâce aux injections de Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$$

où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

c'est à dire

$$p^* = \frac{Np}{N-p} \quad , \text{ pour } p < N$$

($p^* > p$), on déduit de (3) que

$$(4) \qquad \|u\|_{W^{1,p^*}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

Dans l'estimée (4) nous n'avons pas gagné en ordre de dérivation, mais nous avons gagné en intégrabilité de la dérivée. Nous allons voir que ce type de majoration peut s'étendre à des opérateurs elliptiques sous forme divergence.

IV La méthode de Schauder

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq N}$ symétrique à coefficients bornés vérifiant l'hypothèse d'ellipticité (H3). Soit $1 < p < +\infty$. On considère le problème

$$(1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour des coefficients a_{ij} généraux, fonctions mesurables bornées sur Ω, il serait illusoire de vouloir étendre la théorie elliptique complète pour le Laplacien à ce type d'opérateur, i.e $f \in L^p(\Omega)$ n'implique pas $u \in W^{2,p}(\Omega)$ en général.

[Pour s'en convaincre, on peut considérer de nouveau le cas $N=1$, $I =]0,1[$ $A(x) = (a(x))$: l'équation devient alors

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right) = f \qquad \text{sur } [0,1]$$

et donc

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{a(x)} \int_0^x f(s)\,ds + C$$

On vérifie que si $f \in L^p(I)$, $\frac{du}{dx} \in L^\infty(I)$; en revanche, en général $\frac{d^2u}{dx^2}$ n'est pas une fonction !].

Toutefois, on peut espérer démontrer des majorations de ∇u dans des normes $L^q(\Omega)$, avec $q > p$, comme dans (4).

La méthode de Schauder ci-dessous permet d'obtenir de telles majorations à condition que la matrice A soit proche de $Id_{\mathbb{R}^N}$ uniformément sur Ω. On a

<u>Théorème IV.1</u>. Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, et $1<p<N$. Soit $p^* = \frac{Np}{N-p}$. Pour tout $q \leq p^*$, il existe $\varepsilon > 0$ (dépendant de Ω, p, et q) tel que si

$$\| A(x) - Id \|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\substack{x\in\Omega,\\ 1\leq i,j\leq N}} |a_{ij}(x) - \delta_{ij}| \leq \varepsilon$$

alors, pour tout $f \in L^q(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

De plus il existe une constante $C(p,q,\Omega)$, ne dépendant que de p, q, et Ω t.q.

$$\|u\|_{W^{1,q}} \leq C(p,q,\Omega)\, \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

<u>Preuve</u> : On décompose la matrice A sous la forme

$$A(x) = Id_{\mathbb{R}^N} + B(x) \qquad (\text{i.e } B(x) = A(x) - Id)$$

de sorte que $B(x) = (b_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique et vérifie

$$\| B(x) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon \quad \text{, i.e} \quad \|b_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon, \ \forall i,j$$

On a ainsi, $\forall v \in W^{1,q}(\Omega)$

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla v) = -\operatorname{div}((Id + B(x))\nabla v)$$
$$= -\Delta v + \operatorname{div}(B(x)\nabla v)$$

où $\operatorname{div}(B(x)\nabla v) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} v\right)$.

<u>A) Réécriture de l'équation (1)</u> : Au vu de ce qui précède, l'équation

(1) $\quad -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$

est donc équivalente à $-\Delta u - \operatorname{div}(B(x)\nabla u) = f$, ou encore

(2) $\quad -\Delta u = f + \operatorname{div}(B(x)\nabla u)$

Par la théorie de régularité du Laplacien, Δ est un isomorphisme de $W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$ vers $L^p(\Omega)$. Notons Δ_0^{-1} son inverse

i.e

$$\begin{cases} \Delta_0^{-1} : L^p(\Omega) \longrightarrow W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega) \\ \qquad f \longmapsto \Delta_0^{-1} f = w \end{cases}$$

où w est la solution de

$$\begin{cases} \Delta w = f & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

[l'indice o en bas de Δ_0^{-1} fait référence à la condition de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$].

Dans ce contexte, l'équation (2) s'écrit alors

$$u = -\Delta_0^{-1}\left[f + \operatorname{div}(B(x)\nabla u)\right]$$

ou encore

$$u = -\Delta_0^{-1}(\operatorname{div}(B(x)\nabla u)) - \Delta_0^{-1} f$$

i.e

(3) $\quad (Id + T)u = -\Delta_0^{-1} f$

pour

$$Tu = -\Delta_0^{-1}(\operatorname{div}(B(x)\nabla u))$$

Ici T désigne l'opérateur de $W^{1,q}(\Omega) \longrightarrow W^{1,q}(\Omega)$

$v \longmapsto Tv = -\Delta_0^{-1}(\operatorname{div}(B(x)\nabla v))$.

B) Propriétés de T : Pour $v \in W^{1,q}(\Omega)$, $\nabla v \in L^q(\Omega)$ et donc comme B est bornée $B(x).\nabla v \in L^q(\Omega)$, avec

$$\|B(x)\nabla v\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|B\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^q(\Omega)}$$
$$\leq C\varepsilon \|\nabla v\|_{L^q(\Omega)}$$

Il en résulte que $\mathrm{div}\,(B(x)\,\nabla v) \in W^{-1,q}(\Omega)$, et

$$\|\mathrm{div}(B(x)\,\nabla v)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \leq C\varepsilon \|\nabla v\|_{L^q(\Omega)}$$

[Rappelons que $W^{-1,q}(\Omega)$ désigne l'ensemble des distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui sont des dérivés de fonctions de $L^q(\Omega)$, au sens des distributions. En d'autres termes, $g \in W^{-1,q}(\Omega)$ ssi $\exists\, h = (h_1, \dots h_N) \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)$ t.q

(3) $\quad g = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} h_i \quad$ (au sens des distributions

On pose alors $\|g\|_{W^{-1,q}} = \operatorname*{Inf}_{h \text{ vérifiant } (3)} \|h\|_{L^q}$].

D'après la théorie elliptique du Laplacien Δ est un isomorphisme de $W_0^{1,q}(\Omega)$ vers $W^{-1,q}(\Omega)$, et donc Δ_0^{-1} est un isomorphisme de $W^{-1,q}(\Omega)$ vers $W_0^{1,q}(\Omega)$. On en déduit que $\forall\, v \in W^{1,q}(\Omega)$

$$\Delta_0^{-1}(\mathrm{div}\,(B(x)\,\nabla v) \in W_0^{1,q}(\Omega)$$

et

$$\|\Delta_0^{-1}(\mathrm{div}\,(B(x)\,\nabla v)\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C\varepsilon \|\nabla v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Ainsi

$$\|Tv\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C\varepsilon \|v\|_{W^{1,q}(\Omega)}$$

L'opérateur T est donc une application linéaire continue de $W_0^{1,q}(\Omega)$ vers $W_0^{1,q}(\Omega)$. De plus

(4) $\quad \|T\| \leq C\varepsilon.$

C) Résolution de (3). Revenons à l'équation

(3) $\quad (Id + T)\,u = -\Delta_0^{-1} f$

Posons $h = -\Delta_0^{-1} f$. Comme $f \in L^p(\Omega)$, on déduit de la partie

III (théorie du Laplacien), que $h \in W^{2,p}(\Omega)$, et donc par injection de Sobolev $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega)$, $\forall q < p^*$ que $h \in W_0^{1,q}(\Omega)$, avec

$$\|h\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C \|h\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

i.e.

$$\|h\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

L'équation

$$(4) \qquad (Id + T)\, u = h$$

peut donc être analysée comme une équation dans $W_0^{1,q}(\Omega)$, et il suffit de voir si $(Id + T)$ est une application inversible de $W_0^{1,q}(\Omega)$ vers $W_0^{1,q}(\Omega)$. Rappelons le résultat classique suivant :

__Lemme IV.1__ : Soit X un espace de Banach, et T une application linéaire continue de X vers X (i.e $T \in \mathcal{L}(X)$). Si $\|T\| < 1$, alors $(Id - T)$ est inversible d'inverse continu, et

$$(Id - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n.$$

Retournons à (4). Comme

$$\|T\| \leq C\varepsilon,$$

si

$$C\varepsilon < 1,$$

alors $(Id - T)$ dest inversible, et

$$u = (Id - T)^{-1} h$$

appartient à $W_0^{1,q}(\Omega)$ et est solution de notre problème initial (1). Ceci termine donc la preuve du Théorème.

__Commentaire__ 1) Lorsque la matrice $A(x)$ n'est pas proche, en norme uniforme de l'identité (ou d'une constante), on peut néanmoins montrer qu'il existe un nombre $q > p$, dépendant de p, α_0 et α_1 t.q $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Il s'agit d'un résultat difficile, utilisant la technique des "inégalités de Hölder inversées".

2) Lorsque $p \geq N$, alors sous les mêmes hypothèses, on peut prendre tout $q < +\infty$, dans le Théorème IV-1.

V MÉTHODES DE DUALITÉ

V.1 Lorsque $p = 1$, la méthode précédente ne s'applique pas : dans ce cas $1^* = \frac{N}{N-1}$, et on peut montrer même pour le Laplacien qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$, et $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, $\forall q < \frac{N}{N-1}$ t.q.

$$-\Delta u = f$$

et $u \notin W^{1,\frac{N}{N-1}}$.

Néanmoins, nous allons voir que dans ce cas, on peut construire pour tout opérateur elliptique, sous forme divergence, à coefficients bornés une solution $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, $\forall 1 \leq q < \frac{N}{N-1}$

$$(I)\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le point le plus important dans la construction de telles solutions u, est la "majoration a priori" suivante, pour des solutions de régularité H^1.

THÉORÈME V.1 Soit $L = -\operatorname{div}(A(x)\nabla\ )$ un opérateur elliptique sous forme divergence, (ie $A : \Omega \to M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie (H1), (H2), (H3)), sur Ω, ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, et $f \in L^1(\Omega)$ tels que

$$(1)\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors, pour tout $1 \leq r < \frac{N}{N-1}$, il existe une constante $C(N,r)$, ne dépendant que de N et r telle que

$$(2)\qquad \|u\|_{W^{1,r}} \leq \frac{C(N,r)}{\alpha_0} |\Omega|^{\frac{1}{N}+\frac{1}{r}-1} \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Commentaire :

1) Nous insistons de nouveau sur le fait que THÉORÈME V.1 suppose l'existence d'un tel u et d'un tel f. (en général pour $f \in L^1(\Omega)$ le problème (I) n'a pas de solution dans $H_0^1(\Omega)$!]

2) On vérifie que $C(N,r) \longrightarrow +\infty$ lorsque $r \to \frac{N}{N-1}$, et la majoration n'a pas lieu pour $r = \frac{N}{N-1}$!

3) Nous verrons plus loin (cf Théorème V.2) comment l'estimation "à priori" (2) permet de conclure à l'existence de solutions.

La démonstration du THÉORÈME V.1 repose sur une méthode de dualité, qui fait l'objet des prochains paragraphes.

V.2 Normes et dualité

Commençons par une remarque générale. Soit X un espace de Banach, X^* le dual topologique de X. On a

Lemme V.1. Pour tout $u \in X$, on a

$$(3) \quad \|u\| = \sup_{\substack{L \in X^* \\ \|L\| \leq 1}} |\langle L, u\rangle_{X^*, X}|$$

pour une preuve, voir [Brezis, p 4] (elle repose sur le Théorème de Hahn-Banach].

L'égalité (3) permet de définir $\|u\|$ par le membre de droite. Par exemple, si $X = L^r(\Omega)$, avec $1 < r < +\infty$, alors $X^* = L^q(\Omega)$, où q est l'exposé conjugué de r défini par

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1,$$

et on a donc

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} = \sup \left\{ \left|\int_\Omega f g\right|, \ g \in L^q(\Omega), \ \|g\|_{L^q(\Omega)} \leq 1 \right\}$$

De même, si $u \in W^{1,r}(\Omega)$, on a

$$\|\nabla u\|_{L^r(\Omega)} = \sup\left\{ \left| \int_\Omega \nabla u . h \right|, \text{ pour } h = (h_1, \dots h_N) \in L^q(\Omega), \|h\|_{L^q(\Omega)} \leq 1 \right\}$$ B 18

Dans cette expression

$$\int_\Omega \nabla u . h = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} h = \sum_{i=1}^N \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, h \rangle$$

En désignant $\langle , \rangle$ le crochet de dualité pour les distributions, et ses diverses extensions par densité, on a donc

$$(4) \int_\Omega \nabla u . h = -\langle u, \operatorname{div} h \rangle$$

où $\operatorname{div} h = \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial x_i} \in W^{-1,q}(\Omega) \; (= W^{1,r}(\Omega))^*$

et donc pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$(5) \quad \|u\|_{W_0^{1,r}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^r(\Omega)} = \sup\left\{ |\langle u, \operatorname{div} h \rangle|, h \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^N), \|h\|_{L^q(\Omega)} \leq 1 \right\}$$

II.3 Le problème dual

Considérons maintenant $u \in H_0^1(\Omega)$ l'opérateur $L : H_0^1 \to H_0^{-1}$ défini par

$$-Lu = -\operatorname{div}(A(x) \nabla u) \in H_0^{-1}(\Omega)$$

Pour tout $\xi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\langle -Lu, \xi \rangle = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right)$$

$$= \langle u, -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \rangle$$

$$= \langle u, -L\xi \rangle$$

ie

$$(6) \quad \langle -Lu, \xi \rangle = \langle u, -L\xi \rangle \quad , \forall \in H_0^1(\Omega)$$

Pour $h \in L^q(\Omega)$, considérons alors le problème (dit problème dual) : trouver $\xi \in H_0^1(\Omega)$ t.q

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} -\operatorname{div}(A(x) \nabla \xi) = -\operatorname{div} h = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial x_i} & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \xi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

i.e

$$-L\xi = \operatorname{div} h \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Soit alors $u \in H_0^1(\Omega)$, $h \in L^q(\Omega)$. Si u vérifie (I), et si $\xi \in H_0^1(\Omega)$ est solution de (II), on a

$$\langle u, \operatorname{div} h \rangle = \langle u, -L\xi \rangle = \langle -Lu, \xi \rangle \qquad (\text{par } (6))$$
$$= \langle f, \xi \rangle$$

En particulier, comme on suppose $f \in L^1(\Omega)$, pour majorer $\langle f, \xi \rangle$ il faut une majoration de ξ dans $L^\infty(\Omega)$. On a alors

$$|\langle u, \operatorname{div} h \rangle| \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Ces considérations nous conduisent donc à rechercher des majorations a priori pour le problème dual en norme $L^\infty(\Omega)$.

V.4 Etude du problème dual

Ici, on choisit comme dans l'énoncé de la proposition V.1

$$1 < r < \frac{N}{N-1}.$$

Si q est l'exposant conjugué de r, i.e tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$, on a alors

$$q > N.$$

Comme $N \geq 2$, et comme Ω est borné on a $L^q(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, et donc $\forall h \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)$

$$\operatorname{div} h \in H^{-1}(\Omega).$$

Il résulte alors du Théorème de Lax-Milgram

Lemme V.2 : Soit $h = (h_1, \dots h_N) \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Il existe un unique $\xi \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(7) \qquad -\operatorname{div}(A(x)\nabla\xi) = \operatorname{div} h \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

i.e, $\forall w \in H_0^1(\Omega)$

$$(7) \qquad \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega h_i \frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

Remarque : si $L = -\Delta$, alors la théorie du Laplacien (cf partie III) montre que $\xi \in W_0^{1,q}(\Omega)$, et que

$$\|\xi\|_{W^{1,q}} \leq C \|h\|_{L^q(\Omega)}.$$

Comme $q > N$, et que Ω est borné, on a alors $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ et donc

$$(9) \qquad \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|h\|_{L^q(\Omega)}$$

Nous allons voir dans ce qui suit qu'une telle majoration reste valide pour des opérateurs elliptiques L généraux : de plus, on peut expliciter la constante en fonction de Ω.

Proposition V.1 Soit $\xi \in H_0(\Omega)$ la solution du problème (7). On a alors

$$\sup_{x\in\Omega} |\xi(x)| = \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C(N,q)}{\alpha_0} |\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{q}} \|h\|_{L^q(\Omega)}$$

où la constante $C(N,q)$ ne dépend que de N et q.

Preuve : Pour $k \in \mathbb{R}^+$, on considère la fonction test

$$\varphi = (\xi - k)^+.$$

Comme $\xi \in H_0^1(\Omega)$, et $k \geq 0$, on voit que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\begin{cases} \nabla\varphi = \nabla\xi & \text{si } \xi(x) \geq k \\ \nabla\varphi = 0 & \text{si } \xi \leq k. \end{cases}$$

[Comm $\xi = 0$, $\xi - k \leq 0$ sur $\partial\Omega$ et donc $(\xi - k)^+ = 0$ sur $\partial\Omega$. Ceci montre que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.].

On peut donc prendre φ comme fonction test dans (8), ce qui donne

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial\xi}{\partial x_i} \frac{\partial(\xi-k)^+}{\partial x_j} = \int_\Omega h.\nabla(\xi-k)^+$$

i.e

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial(\xi-k)^+}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial(\xi-k)^+}{\partial x_j} = \int_\Omega h\,\nabla(\xi-k)^+$$

Comme $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\le i,j\le N}$ est elliptique de constants $0<\alpha_0\le\alpha_1$

On a

$$\alpha_0 |\nabla(\xi-k^+)|^2 \le \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial(\xi-k)^+}{\partial x_i}\frac{\partial(\xi-k)^+}{\partial x_j}$$

d'où l'on déduit

$$(10)\quad \alpha_0\int_\Omega |\nabla(\xi-k)^+|^2 \le \int_\Omega h.\nabla(\xi-k)^+ \le \int_\Omega |h||\nabla(\xi-k)^+|$$

Considérons l'ensemble

$$\Omega_k = \{x\in\Omega,\ |u(x)|\ge k\}$$

et pose

$$\mu(k) = |\Omega_k| \qquad (\text{mesure de } \Omega_k).$$

On a $\nabla(\xi-k)^+ = 0$ sur Ω_k, de sorte que (10) devient

$$\alpha_0\int_{\Omega_k} |\nabla(\xi-k)^+|^2 \le \int_{\Omega_k}|h||\nabla(\xi-k)^+| \le \left(\int_{\Omega_k}|h|^2\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_k}|\nabla(\xi-k)^+|^2\right)^{1/2}$$

Ainsi

$$\boxed{(11)\quad \alpha_0 \|\nabla(\xi-k)^+\|_{L^2(\Omega_k)} \le \|h\|_{L^2(\Omega_k)}}$$

Pour majorer le membre de droite de cette inégalité, utilisons l'inégalité de Hölder

$$\int_{\Omega_k} h^2 \le \left(\int_{\Omega_k}|h^2|^{q/2}\right)^{2/q}\left(\int_{\Omega_k}1\right)^{1-\frac{2}{q}}$$

i.e

$$\|h\|_{L^2(\Omega_k)} \le \left(\int_{\Omega_k}h^2\right)^{1/2} \le \|h\|_{L^q(\Omega)}|\Omega_k|^{1/2-1/q},$$

(11) donne alors

$$\boxed{(12)\quad \alpha\|\nabla(\xi-k)^+\|_{L^2(\Omega_k)} \le \|h\|_{L^q(\Omega)}|\Omega_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}}$$

On peut prolonger $(\xi-k)^+$ par zéro en dehors de Ω_k de sorte que $(\xi-k^+) \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Rappelons que pour toute fonction w de $H^1(\mathbb{R}^N)$, on a l'inégalité de Sobolev critique, pour $N \geq 3$

$$S \, \|w\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall w \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

où S est une constante qui ne dépend que de N (voir [Brezis]) et $2^* = \frac{2N}{N-2}$. Appliquons cette inégalité à la fonction $(\xi-k)^+$ (dans le cas où $N \geq 3$; nous ne traiterons pas le cas $N=2$, mais on peut le faire avec des idées similaires). On a

$$(13) \quad S \, \|(\xi-k)^+\|_{L^{2^*}(\Omega_k)} \leq \|\nabla(\xi-k)^+\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

et par l'inégalité de Hölder

$$(14) \quad \|(\xi-k)^+\|_{L^1(\Omega_k)} \leq \left(\int_{\Omega_k} (\xi-k^+)^{2^*}\right)^{1/2^*} \left(\int_{\Omega_k} 1\right)^{1-\frac{1}{2^*}}$$

$$\leq \|\xi-k^+)\|_{L^{2^*}(\Omega_k)} \, |\Omega_k|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{N}}$$

En combinant (12), (13), et (14), on déduit donc

$$\boxed{(15) \quad \alpha_0 S \int_{\Omega_k} (\xi-k)^+ \leq \|f\|_{L^q(\Omega)} \, |\Omega_k|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{q}+1}}$$

Discussion de l'inégalité (15) : Nous allons voir que (15) permet de déduire la majoration de la Proposition V.1, grâce au résultat suivant de Théorie de la mesure

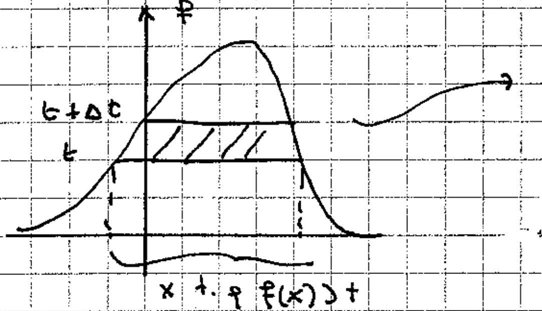
Lemme V.3. Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction positive mesurable sur Ω. Pour $t \geq 0$, on pose

$$\nu(t) = |x \in \Omega, \; f(x) \geq t|$$

On a alors

$$(16) \qquad \int_\Omega f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} u(t)\,dt = \int_0^{+\infty} |x\in\Omega,\ f(x)\geq t|\,dt.$$

Commentaire : Pour se convaincre de cette égalité, le plus simple est probablement de regarder un dessin



→ aire de la partie hachurée

$\simeq |x\in\Omega,\ f(x)>t| \times \Delta t$

Une preuve "rigoureuse" peut être obtenue de deux manières :

- En utilisant le théorème de Fubini sur le domaine $\Omega\times[0,+\infty[$ (et en intégrant χ la fonction caractéristique du domaine sous la courbe, ie $\{(x,t)\in\Omega\times[0,+\infty[\ ,\ 0\leq t\leq f(x)\}$.
- En démontrant le résultat pour des fonctions en escalier, puis en utilisant un résultat de densité.

Revenons à l'inégalité (15) et à notre problème initial. Nous appliquons l'égalité (16) à la fonction $(\xi-k)^+$ sur Ω_k.

On a donc

$$\int_{\Omega_k} (\xi-k)^+ = \int_0^{+\infty} |\{x\in\Omega,\ \xi\geq t+k\}|\,dt$$

Effectuons le changement de variable dans l'intégrale de droite

$$s = t+k \quad , \text{ie} \quad t = s-k.$$

Il vient

$$\int_{\Omega_k} (\xi-k)^+ = \int_k^{+\infty} \left|\{x\in\Omega,\ \xi(s) > s\}\right| ds$$

i.e

$$\int_{\Omega_k} (\xi - k)^+ = \int_k^{+\infty} |\Omega_s| \, ds = \int_k^{+\infty} \mu(s)\, ds,$$

où, rappelons le,

$$\mu(s) = \left| \{ x \in \Omega,\ \xi(x) \geq s \} \right|.$$

Introduisons, alors pour $k \in \mathbb{R}^+$

$$H(k) = \int_{\Omega_k} (\xi - k)^+, \quad \text{de sorte que } H(k) \geq 0,\ \forall k$$

On a donc

$$(17)\quad H(k) = \int_k^{+\infty} \mu(s)\, ds, \qquad \forall k \geq 0$$

et donc

$$(18)\quad H'(k) = -\mu(k) \quad [\text{noter} : \mu \in C^0(\mathbb{R}^+) \Rightarrow H \in C^1(\mathbb{R}^+)]$$

Nous pouvons maintenant interpréter (15) comme une inégalité différentielle

$$\alpha_0 S\, H(k) \leq -\|f\|_{L^q(\Omega)} \left[H'(k)\right]^{\frac{1}{N} - \frac{1}{q} + 1}$$

i.e

$$(19)\quad \boxed{H'(k) \leq -\left(\frac{H(k)}{\beta}\right)^{1/\gamma}, \quad \forall k \in \mathbb{R}^+}$$

où on a posé :

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{1}{N} - \dfrac{1}{q} + 1 \\[2mm] \beta = \dfrac{1}{\alpha_0 S} \|f\|_{L^q(\Omega)} \end{cases}$$

* Étude de l'inégalité différentielle (19). Comme nous l'avons indiqué, la fonction μ est continue (par des résultats généraux de Théorie de la mesure). L'égalité (17) montre donc que H est de classe C^1, et par (18) nous en déduisons que la fonction H

est décroissante. Posons

$$k_0 = \operatorname{Sup}\{k \in \mathbb{R}^+,\ t.q\ H(k) > 0\}$$

de sorte que si $k < k_0$, $H(k) > 0$, et si $k \geq k_0$, alors $H(k) = 0$ (à ce niveau de l'analyse, on ne peut bien entendu pas exclure l'éventualité $k = +\infty$). Remarquons enfin que

$$\boxed{(20) \qquad \sup_{x\in\Omega} \xi(x) \leq k_0}$$

En effet $H(k_0) = 0 \Rightarrow$ implique

$$\int_\Omega (\xi - k_0)^+ = 0,$$

et donc $(\xi - k_0)(x) \leq 0$ pour presque tout x, i.e

$$\xi(x) \leq k_0, \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

Lorsque $k \leq k_0$ on peut diviser (18) par $H(k)^{1/\gamma} > 0$, et on obtient

$$\frac{H'(k)}{H(k)^{1/\gamma}} \leq -\left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/\gamma}, \quad \forall\ k < k_0$$

i.e

$$\frac{d}{dk}\left(H(k)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right) \leq -\left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/\gamma} \frac{\gamma-1}{\gamma} \quad \forall\ k < k_0$$

Intégrons cette relation entre 0 et k_0. Il vient

$$H(k_0)^{1-\frac{1}{\gamma}} - H(0)^{1-\frac{1}{\gamma}} \leq \int_0^{k_0} \frac{\gamma}{\gamma-1} \beta^{1/\gamma} = -k_0\left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/\gamma} \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

Comme $H(k_0) = 0$, il en résulte

$$\boxed{(21) \qquad k_0 \leq H(0)^{1-\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma-1} \beta^{1/\gamma}}$$

L'inégalité (21) montre que k_0 (et donc $\sup_{x\in\Omega} \xi(x)$ par (20)) est borné (i.e $\neq +\infty$). Dans la relation (21) nous pouvons obtenir une majoration explicite de $H(0)$ grâce à (15)

$$(22) \qquad \alpha_0 S\, H(0) \leq \|h\|_{L^q(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{q}+1} = \|h\|_{L^q(\Omega)} |\Omega|^{\gamma}$$

Ainsi

$$k_0 \leq \frac{1}{\alpha_0 S} \frac{\gamma}{\gamma-1} \|h\|_{L^q(\Omega)} |\Omega|^{\gamma-1}$$

B 26

i.e

$$k_0 \leq \frac{1}{\alpha_0 S} \frac{\gamma}{\gamma-1} \|h\|_{L^q(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{q}}$$

par (20), il en resulte donc

$$\boxed{(22) \quad \sup_{x\in\Omega} \xi(x) \leq C(N,q) \|h\|_{L^q(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{q}}}$$

où

$$C(N,q) = \frac{1}{\alpha_0 S} \frac{\gamma}{\gamma-1}.$$

En considérant la fonction $-\xi$ on démontre de même

$$\sup_{x\in\Omega} -\xi(x) = -\inf_{x\in\Omega} \xi(x) \leq C(N,q) \|h\|_{L^q} |\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{q}}$$

ce qui permet d'etablir la proposition V.1

V.6 Preuve du Théorème V.1. On reprend l'argument de dualité développé dans la Section V.2. Pour $r < \frac{N}{N-1}$, soit q son exposant conjugué, $q = \frac{r}{r-1}$, de sorte que $q > N$. Pour $h \in L^q(\Omega)$, considérons la solution $\xi \in H_0^1(\Omega)$ de

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla\xi) = -\operatorname{div} h \quad \text{ou } \Omega$$

donnée par le Lemme V.2, i.e telle que, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$(23) \quad \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial\xi}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} = \int_\Omega h \nabla v.$$

Comme $u \in H_0^1(\Omega)$, on a $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$(24) \quad \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega f\varphi.$$

[raisonner par densite]

Par la Proposition V.1 nous avons vu que $\xi \in L^\infty(\Omega)$. On peut donc prendre $v = u$ dans (23) et $\varphi = \xi$ dans (24). Ceci donne.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} = \int_\Omega h\, \nabla v \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = \int_\Omega f \end{cases}$$

et donc

$$\int_\Omega h \cdot \nabla v = \int_\Omega f \cdot \xi$$

Il en résulte

$$\left|\int_\Omega h \cdot \nabla v\right| \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

et donc par le résultat de la Proposition V.1

$$\left|\int_\Omega h\cdot \nabla v\right| \leq C(N,q)\, |\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^1(\Omega)} \|h\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall h \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)$$

Ceci montre donc (cf Section V.1)

$$\|\nabla v\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C(N,q)\, |\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

et termine la preuve du Théorème V.1.

V.6 Résultats d'existence

Dans cette partie, nous allons voir comment l'estimation à priori du Théorème V.1, valable pour des solutions $u \in H^1_0(\Omega)$ permet de conclure à l'existence, pour tout $f \in L^1(\Omega)$, de solutions $u \in W^{1,r}_0(\Omega)$ $\left(0 < r < \frac{N}{N-1} \leq 2\right)$ qui en général n'appartiennent pas à $H^1_0(\Omega)$.

La méthode est générale et s'applique à de nombreux problèmes. Elle consiste à approcher la donnée f par des données plus régulières pour lesquelles on connait l'existence de solutions qui ont la régularité souhaitée (ici H^1), et pour lesquelles on peut utiliser la majoration a priori. Ensuite on passe à la limite.

Nous avons :

Théorème V.2 : Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^1(\Omega)$.
Il existe alors une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ $\forall\, 1 \leq r < \frac{N}{N-1}$, et qui vérifie

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$$

i.e $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$(25) \quad \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega f \cdot \varphi$$

De plus on a la majoration : $\forall\, r \in [1, \frac{N-1}{N}[$,

$$\|\nabla u\|_{L^r(\Omega)} \leq C(N,r)\, \|f\|_{L^1(\Omega)}\, |\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{r}}$$

où $C(N,r)$ est la constante du Théorème V.1

Preuve : On commence par approcher f par une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ et

$$(26) \quad f_n \longrightarrow f \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

Comme $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ (et donc $f_n \in L^2(\Omega)$), par le Théorème de Lax-Milgram, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in H_0^1(\Omega)$ t.q

$$(27) \quad -\operatorname{div}(A(x)\nabla u_n) = f_n \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Comme $u_n \in H_0^1(\Omega)$, on peut utiliser la majoration du Théorème V.1.
On a donc : $\forall\, 1 \leq r < \frac{N}{N-1}$

$$\|\nabla u_n\|_{L^r(\Omega)} \leq C(N,r)\, |\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{r}+1}\, \|f_n\|_{L^1(\Omega)}$$

Comme

$$\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow \|f\|_{L^1(\Omega)},$$

On voit que $\forall\, 1 \leq r < \frac{N}{N-1}$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,r}(\Omega)$. Pour $1 < r < \frac{N}{N-1}$, $W_0^{1,r}(\Omega)$ est réflexif, donc il existe une sous-espace $u_{\sigma(n)}$ telle que $u_{\sigma(n)}$ converge vers un élément $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ faiblement,

$$(28) \quad u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } W_0^{1,r}(\Omega)$$

Par semi-continuité inférieure, on a

$$\|\nabla u\|_{L^r(\Omega)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|\nabla u_{\sigma(n)}\|_{L^r(\Omega)}$$

et donc

$$\|\nabla u\|_{L^r(\Omega)} \leq C(N,r)\ \|f\|_{L^1(\Omega)}\ |\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{r}+1}.$$

* u est solution de l'équation : Par (27), on a $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$(29)\quad \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega f_n \varphi$$

Par (23), on a $\forall i,j$

$$\frac{\partial u_{\sigma(n)}}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{dans } L^r(\Omega)$$

et donc

$$\int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u_{\sigma(n)}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \longrightarrow \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

par convergence faible. De même, par (26)

$$\int_\Omega f_n \varphi \longrightarrow \int_\Omega f \varphi$$

L'égalité (28) donne donc

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega f \varphi$$

i.e

$$\operatorname{div}(A(x) \nabla u) = f.$$

* Pour terminer la preuve, il suffit alors de vérifier que la limite u ne dépend pas de r. A cet effet, on utilise un argument d'unicité de limite, et on montre que toute la suite u_n converge faiblement vers u

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } W_0^{1,r}(\Omega)$$

(exercice)

COMMENTAIRE : Notons que la méthode ne nous permet pas de conclure à l'unicité de solutions (qui revient à montrer que l'unique solution $W_0^{1,r}(\Omega)$ de l'équation $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = 0$ est $u=0$).