3. LE PRINCIPE DU MAXIMUM

LE PRINCIPE DU MAXIMUM

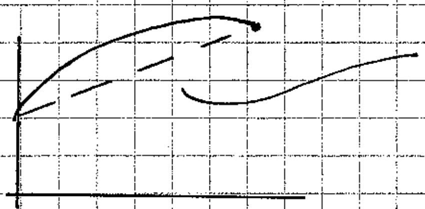
I) INTRODUCTION

Considérons tout d'abord la situation suivante en dimension 1 :

Soit $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que

$$-u'' \geq 0 \quad \text{i.e} \quad u'' \leq 0$$

La fonction u est donc concave, elle se situe donc "au dessus" de sa corde (cf figure)



corde = segment joignant $(0, u(0))$ à $(1, u(1))$

Il en résulte en particulier que

$$u(x) \geq \operatorname{Inf}\{u(0), u(1)\}$$

i.e

$$\boxed{\inf_{x \in I} u(x) \geq \operatorname{Inf}_{x \in \partial I} u(x) \quad \text{où } I = [0,1]}$$

Nous allons étendre ce type de résultat, connu sous le nom de PRINCIPE du MAXIMUM, à diverses situations impliquant des opérateurs elliptiques d'ordre 2, en dimension N quelconque.

Le principe du maximum est un outil extrêmement utile pour obtenir des majorations à priori de solutions d'équations linéaires ou non linéaires elliptiques (du $2^{\text{ème}}$ ordre).

Nous verrons successivement :

- La forme "classique" du principe du maximum, qui s'applique à des fonctions de classe C^2, donc assez régulières, et des opérateurs qui ne sont pas sous forme divergence.

- Son extension à des solutions "faibles" et des opérateurs sous forme divergence.

Notons que le principe du maximum est une propriété typique des opérateurs elliptiques d'ordre 2 (il ne s'applique pas, par exemple, au bilaplacien, qui est d'ordre 4). En revanche, il existe également un principe du maximum pour les équations parabolique.

II FORMES CLASSIQUES DU PRINCIPE DU MAXIMUM

Nous commençons, pour fixer les idées par étudier le principe du maximum pour $L = \Delta$, le Laplacien.

II.1 Le Laplacien

Soit Ω un domaine borné et regulier de $\mathbb{R}^N$. On a

Théorème II.1. Soit u une fonction de classe C^2 sur Ω, telle que $u \in C(\overline{\Omega})$. On suppose que

(H1) $\qquad -\Delta u(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega$

Alors,

(1) $\qquad \inf\limits_{x \in \Omega} u(x) = \inf\limits_{x \in \partial\Omega} u(x)$

En particulier, si $u(x) \geq 0$, $\forall x \in \partial\Omega$, alors

(2) $\qquad u(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$

Rq : ① Bien entendu, si $-\Delta u(x) \leq 0$, $\forall x \in \Omega$, en considérant $-u$ on déduit de (1) qu'alors $\sup\limits_{x \in \Omega} u(x) = \sup\limits_{x \in \partial\Omega} u(x)$

② En particulier si $\Delta u(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$, on obtient

$$\inf_{y \in \partial\Omega} u(y) \leq u(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} u(y), \quad \forall x \in \Omega.$$

Preuve du Théorème II-1.

C 3

Nous allons commencer par donner la preuve dans le cas où la fonction u vérifie l'hypothèse plus forte

$$(H2) \qquad -\Delta u(x) > 0 \quad , \forall x \in \Omega \quad \text{(inégalité stricte !)}$$

Ensuite par un argument d'approximation, nous en déduirons la preuve dans le cas général.

A) Preuve de (1) lorsque u vérifie (H2). Comme $\overline{\Omega}$ est borné, fermé, et qu'on a supposé u continue sur $\overline{\Omega}$, il existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que

$$u(x_0) = \inf_{y \in \overline{\Omega}} u(y)$$

i.e

$$u(x_0) \leq u(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Nous avons alors l'alternative suivante :

α) $x_0 \in \partial\Omega$: Alors (1) est automatiquement vérifiée.

β) $x_0 \in \Omega$. On peut alors écrire les conditions de minimalité du premier et du deuxième ordre pour un minimum intérieur,

$$\begin{cases} (3) \quad \nabla u(x_0) = 0 \text{, i.e } \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad , \forall i \in \{1, .., N\} \quad \text{(Condition du 1}^{\text{er}}\text{ ordre)} \\ (4) \quad \text{Hess}\, u(x_0) \geq 0 \text{, et en particulier } \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) \geq 0 \text{, } \forall i \{1, .. N\} \\ \qquad \text{(condition du deuxième ordre)} \end{cases}$$

[Rappelons que Hess$(u(x))$ désigne la matrice Hessienne de u, i.e

$$\text{Hess}(u(x)) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq N}$$

elle est donc symétrique par le Lemme de Schwarz. La condition du 2$^{\text{ème}}$ ordre signifie qu'elle est positive en un point de minimum intérieur].

Comme

$$\Delta u(x_0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0)$$

on déduit donc de (4) que

$$\Delta u(x_0) \geq 0 \quad \text{i.e} \quad -\Delta u(x_0) \leq 0$$

ce qui contredit (H2)

L'alternative β est donc exclue, ce qui établit (1) sous l'hypothèse H2)

B) Cas général : Preuve de (1) lorsque u vérifie (H1)

On utilise un argument perturbatif. L'idée est de construire une fonction $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ telle que φ vérifie (H2)

$$-\Delta \varphi > 0 \quad \text{sur } \Omega$$

Ensuite, pour $\varepsilon > 0$ petit, on pose $u_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi$, de sorte que u_ε vérifie (H2). On applique alors la partie A, puis on fait tendre ε vers zero pour conclure.

α) Construction de φ. Soit x_1 la première coordonnée sur $\mathbb{R}^N$.

Considérons la fonction $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots x_N) = \exp x_1$, $\forall x = (x_1, \dots x_N) \in \mathbb{R}^N$. On a

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1} = -\exp x_1 \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = 0, \quad \text{si } i \neq 1$$

d'où et

$$-\Delta\varphi = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i} = +\exp x_1 > 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

β) Etude de u_ε : Posons $u_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi$, pour $\varepsilon > 0$. Comme $-\Delta\varphi > 0$, et par hypothèse $-\Delta u \geq 0$, on en déduit

$$-\Delta u_\varepsilon > 0, \quad \text{sur } \Omega \quad \forall \varepsilon > 0.$$

i.e u_ε vérifie (H2). On a donc

$$\operatorname*{Inf}_{x \in \Omega} u_\varepsilon(x) = \operatorname*{Inf}_{x \in \partial\Omega} u_\varepsilon(x)$$

Comme $u_\varepsilon \to u$ uniformément, on en déduit (1).

II.2) Opérateurs avec termes d'ordre 1

C 5

Le résultat précédent peut se généraliser aux opérateurs du type
$$L = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$
où les fonctions a_{ij}, définies sur $\bar{\Omega}$ sont continues, vérifient
$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \qquad \forall i,j, \; \forall x$$
et telles qu'il existe $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$ t.q. $\forall \xi = (\xi_1, \dots \xi_N) \in \mathbb{R}^N$
$$\alpha_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \alpha_1 |\xi|^2$$
i.e $A(x) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ est elliptique. On a alors

<u>Theoreme II.1 bis</u>. Soit $A(x) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ comme ci-dessus, et b une fonction continue de $\bar{\Omega}$ vers $\mathbb{R}^N$. Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$ telle que

(H1bis) $\quad -Lu(x) + b \cdot \nabla u(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega$

i.e
$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

Alors

(1) $$\inf_{x \in \Omega} u(x) = \inf_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

<u>Preuve</u> : Elle est similaire à celle du Théorème II.1. On commence par démontrer (I) sous l'hypothèse plus forte

(H2bis) $\quad -Lu(x) + b \cdot \nabla u(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega.$

A) <u>Preuve de (1) lorsque u vérifie (H2bis)</u> Soit $x_0 \in \Omega$ tel que
$$u(x_0) = \inf_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$$
Si $x_0 \in \partial\Omega$ la propriété est vérifiée. Sinon $x_0 \in \mathring{\Omega}$, et la condition du 1er ordre donne $\nabla u(x_0) = 0$, i.e $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0$ et donc

(5) $b.\nabla u(x_0) = 0$.

La condition du deuxième ordre donne

(6) $\quad \text{Hess}(u(x_0)) \geq 0$. (au sens des matrices symétriques)

$(e_1, \dots e_N)$ une base orthogonale dans laquelle la matrice $(a_{ij}(x_0))_{1\leq i,j\leq N}$ soit diagonale de la forme $\text{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_N)$ où $\lambda_i \geq \alpha_0$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$. Dans cette base, soient $(x_1, \dots x_N)$ les coordonnées cartésiennes associées. On a alors

$$Lu(x_0) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \geq \alpha_0 \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0)$$

et donc

(7) $\quad Lu(x_0) \geq 0$

par (6). Ainsi en combinant (5) et (7) on obtient

$$-Lu(x_0) + b.\nabla u(x_0) \leq 0$$

ce qui contredit (H2bis). Il en résulte que l'hypothèse $x_0 \in \Omega$ est à exclure, et donc $x_0 \in \partial\Omega$. Ceci donne (I)

B) Cas général : u vérifie (H1bis). Comme dans la preuve du Théorème II-1 on construit φ tel que

(8) $\quad -L\varphi + b.\nabla\varphi > 0$ sur Ω.

A cet effet, introduisons $\mu > 0$, et considérons

$$\psi_\mu = -\exp \mu x_1.$$

On a alors

$$-L\psi_\mu = a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \exp \mu x_1 = \mu^2 a_{11} \exp \mu x_1$$

de même

$$b.\nabla\psi_\mu = b_1 . \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_1} = -\mu b_1 \exp \mu x_1$$

et donc

$$-L\psi_\mu + b\nabla\psi_\mu = (\mu^2 a_{11} - \mu b_1) \exp \mu x_1$$

Par l'hypothèse d'ellipticité $a_{11} > \alpha_0$. Donc

$$\mu^2 a_{11} - \mu b_1 \geq \mu^2 \alpha_0 - \mu \|b\|_\infty = \mu(\mu\alpha_0 - \|b\|_\infty)$$

C 6

de sorte que si $\mu > \frac{\|b\|_\infty}{\alpha_0}$, on a

$$-L\psi_{\mu_0} + b.\nabla\psi_{\mu_0} > 0.$$

On choisit donc

$$\varphi = \psi_{\mu_0},$$

pour un $\mu_0 > \frac{\|b\|}{\alpha_0}$, de sorte que φ vérifie (8).

On pose ensuite $u_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi$, et on conclut comme dans la preuve du théorème II.1.

II.3 Opérateurs avec termes d'ordre 0 et d'ordre 1

Le résultat (1) ne s'étend pas au cas d'opérateurs avec des termes d'ordre zéro, i.e du type

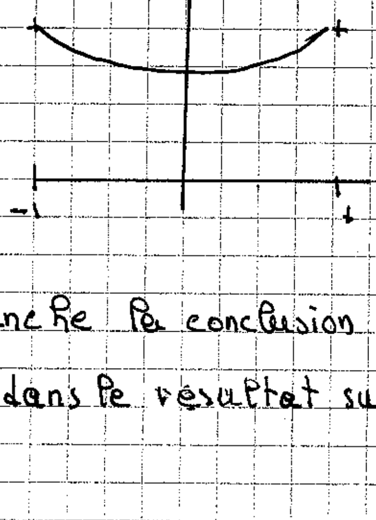
$$Lu + b.\nabla u + cu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u + b.\nabla u + \underbrace{c(x)u}_{\text{terme d'ordre zero}}$$

Pour s'en convaincre considérons le cas $N = 1$, $I =]-1, 1[$ et enfin l'opérateur $-u'' + u$.

La fonction $u(x) = \exp -x + \exp x$ vérifie

$$-u'' + u = 0,$$

mais ne vérifie pas (1).



En revanche la conclusion (2) reste vraie, comme nous allons le voir dans le résultat suivant:

C 8

THÉORÈME II.2 : Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. On fait les même hypothèses sur A, et b que dans le Théorème II bis.

Soit c une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, supposée positive, i.e t.q

$$c(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Soit alors $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ telle que

$$-Lu + b.\nabla u + cu \geq 0 \qquad \text{sur } \Omega$$

i.e

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Si de plus $u(x) \geq 0$, $\forall x \in \partial\Omega$ alors

$$(2) \qquad u(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \Omega.$$

Preuve : On commence par démontrer le résultat sous l'hypothèse plus forte

$$(H2ter) \qquad -Lu + b.\nabla u + cu > 0 \qquad \text{sur } \Omega.$$

A) Preuve de (2) lorsque u vérifie (H2ter). On raisonne par l'absurde, et on suppose que $\exists\, x \in \Omega$ t.q

$$(9) \qquad u(x) < 0.$$

En particulier

$$(10) \qquad u(x_0) = \underset{x \in \overline{\Omega}}{\mathrm{Inf}}\, u(x) < 0$$

et donc x_0, le minimum, appartient à Ω (car $u(x) \geq 0$ sur $\partial\Omega$)

Comme dans la preuve du Théorème II.1 bis on a

$$-Lu(x_0) + b\,\nabla u(x_0) \leq 0$$

Comme $c \geq 0$, par l'hypothèse (9), on déduit que

$$c(x_0)\,u(x_0) \leq 0.$$

Donc

$$-Lu(x_0) + b.\nabla u(x_0) + c(x_0)u(x_0) \leq 0$$

ce qui contredit (H2ter). L'hypothèse (9) est donc contradictoire, et (2) est vérifiée.

B) Preuve de (2) dans le cas général. On construit comme pour les Théorèmes II.1 et II.1 bis une fonction φ telle que

$$-L\varphi + b.\nabla\varphi + c\varphi > 0 \quad ds\ \Omega \quad , \varphi \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

(exercice). Ensuite on pose $u_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi$, et on conclut par la partie A que

$$u_\varepsilon(x) \geq 0 \quad ds\ \Omega$$

Puis on fait tendre ε vers zéro.

III Opérateurs sous forme divergence

Dans cette partie, on considère, pour Ω domaine borné, régulier de $\mathbb{R}^N$ un opérateur elliptique du 2eme ordre sous forme divergence, i.e

$$Lu = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}u\right) = \operatorname{div}(A(x)\nabla u)$$

où les coefficients a_{ij} sont des fonctions bornées sur Ω telles qu'il existe $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$ vérifiant

(1) $\quad \alpha_0|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \alpha_1|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega$

(2) $\quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \forall x \in \Omega, \ \forall i,j.$

On a alors :

THÉORÈME III.1. Soit $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq N}$ vérifiant (1), (2). Soit $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant

(3) $\quad -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) \geq 0 \quad$ sur Ω,

c'est à dire

(4) $\displaystyle\sum_{i,j}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \geq 0, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, t.q $\varphi \geq 0$ sur Ω

Alors

$$\operatorname*{Inf}_{u\in\Omega} u(x) = \operatorname*{Inf}_{u\in\partial\Omega} u(x).$$

<u>Remarque</u> : 1) Un résultat de la théorie des distributions affirme que toute distribution positive est une mesure (positive). Il en résulte que

$$- \operatorname{div}(a(x) \nabla u) = \mu ,$$

μ mesure positive sur Ω.

2) On montre que les fonctions $C_c^\infty(\Omega)$ positives sont denses dans $\{u \in H_0^1(\Omega) , u \geq 0\}$. (4) est donc équivalent à

$$(5) \quad \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \geq 0 , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) , \text{ t.q } v \geq 0 .$$

<u>Preuve du Théorème III.1</u> : On utilise une méthode de troncature

Posons

$$K = \operatorname{Inf}_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

On supposera $-\infty < K < +\infty$: sinon $K = -\infty$, implique par le théorème de trace que $\operatorname{Inf}_{x \in \Omega} u(x) = -\infty$. Considérons alors la fonction

$$w = -(u-K)^- , \quad w \ (\text{de sorte que } w \geq 0 \ )$$

de sorte que $w = 0$ sur $\partial\Omega$, et donc $w \in H_0^1(\Omega)$. On peut donc utiliser w comme fonction test dans (5). Il en résulte

$$- \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (u-K)^-}{\partial x_j} \geq 0$$

i.e

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial (u-K)^-}{\partial x_i} \frac{\partial (u-K)^-}{\partial x_j} \leq 0$$

et par (2) on a donc

$$\alpha_0 \int_\Omega |\nabla (u-K)^-|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial (u-K)^-}{\partial x_i} \frac{\partial (u-K)^-}{\partial x_j} \leq 0$$

Ainsi $\int_\Omega |\nabla(u-K)^-|^2 = 0$ et donc $(u-K)^- = 0$

Ceci signifie $u(x) \geq K$ sur Ω et la conclusion en découle.

On a également, comme dans la partie II,

THEOREME III.2 : Soit A comme dans le Théorème III-1 et c une fonction $\in L^\infty(\Omega)$, telle que

$$c(x) \geq 0$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + cu \geq 0 \quad \text{dans } \Omega$$

i.e

$$(6) \quad \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + cu\varphi \geq 0, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ \varphi \geq 0$$

et

$$(7) \quad u(x) \geq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Alors

$$(8) \quad u(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Preuve : Par densité, (6) est équivalent à

$$(9) \quad -\sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + cuv \geq 0, \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \ v \geq 0 \text{ sur } \Omega.$$

Prenons alors

$$v = -u^- \quad (\text{de sorte que } v = -\operatorname{Inf}(u,0) \geq 0 \text{ sur } \Omega)$$

Comme $u \geq 0$ sur $\partial\Omega$, $u^- = 0$ sur $\partial\Omega$ et donc $v \in H_0^1(\Omega)$. Par (9) on a donc

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u^-}{\partial x_j} + cuu^- \geq 0$$

i.e

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u^-}{\partial x_i} \frac{\partial u^-}{\partial x_j} + c|u^-|^2 \leq 0$$

et par ellipticité

$$(10) \quad \int_\Omega \alpha_0 |\nabla(u^-)|^2 + cu^{-2} \leq 0$$

Comme $c \geq 0$, $u^- = 0$ et donc $u \geq 0$ sur Ω.

Remarques: 1) Si c n'est pas positive, la conclusion du théorème peut être contredite. Par exemple pour $N=1$, $\Omega =]0,1[$, $L = u''$ et $c = -k^2\pi^2$

Alors pour $u = \sin k\pi x$, on a

$$\begin{cases} -u'' + cu = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

mais u change de signe sur Ω.

2) Néanmoins, pour un domaine Ω donné la condition

$$c(x) \geq 0$$

peut être affaiblie par la condition

$$(11) \qquad c(x) > -\lambda_1$$

où

$$\lambda_1 = \operatorname{Inf}\left\{ \int |\nabla v|^2 \ , v \in H_0^1(\Omega) \ , \ \|v\|_{L^2} = 1 \right\}.$$

En effet par définition de λ_1, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\lambda_1 \int |v|^2 \leq \int |\nabla v|^2.$$

En retournant à (10), on voit que (10) implique sous l'hypothèse (11) $u^- = 0$ et donc $u \geq 0$ sur Ω.

IV Principe du Maximum fort

Pour le Laplacien, nous avons le résultat suivant, que nous admettrons, et qui permet de conclure à une positive stricte.

-

THEOREME IV.1 . Soit $f \in C^0(\bar\Omega)$, telle que

$$f \geq 0 \quad \text{sur } \Omega \quad , f \neq 0$$

(en particulier $\exists x_0$ tq $f(x_0) > 0$). Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors

$$u(x) > 0 \quad , \forall x \in \Omega$$

et de plus

$$\frac{\partial u}{\partial n} < 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

où n designe la normale extérieur à $\partial\Omega$.

C 13