4. METHODS HILBERTIENNES :
THEORIE DE RIEZ-FREDHOLM, THEORIE SPECTRALE

METHODES HILBERTIENNES : THEORIE DE RIESZ-FREDHOLM ; THÉORIE SPECTRALE

D 1

I INTRODUCTION

Comme nous l'avons vu dans la partie B, de nombreux problèmes peuvent s'écrire sous la forme

(1) $$Au = f$$

où A est une application linéaire continue d'un espace de Banach X vers un espace de Banach Y. La question est alors de savoir si $f \in \mathrm{Im}\, A$, ou plus généralement de savoir si A est un isomorphisme.

En dimension finie, le théorème noyau-image permet de décrire entièrement la situation. Rappelons que si A est linéaire de $\mathbb{R}^N$ vers $\mathbb{R}^N$ alors

$$A \text{ injectif} \iff \mathrm{Ker}\, A = \{0\} \iff A \text{ injectif},$$

et de manière générale,

$$\dim \mathrm{Ker}\, A + \dim \mathrm{Im}\, A = N \quad \text{(théorème Noyau-Image)}$$

que l'on peut écrire sous la forme

(2) $$\boxed{\dim \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{codim}(\mathrm{Im}\, A)}$$

où on a posé, pour V s.e.v de $\mathbb{R}^N$

$$\mathrm{codim}\, V = \dim V^{\perp} = N - \dim A.$$

Nous allons voir que (2) reste vrai, dans le cadre des espaces de Hilbert, pour des opérateurs très particuliers, les perturbations compactes de l'identité de la forme

$$T = \mathrm{Id} + A,$$

T compact. Cette propriété sera alors très utile pour étudier le problème (1).

II OPERATEURS COMPACTS

Soit X et Y deux espaces de Banach, et $A : X \to Y$ une application linéaire continue de X vers Y.

Définition II.1 : On dit que A est compacte ssi $\overline{A(B_X)}$ est compacte dans Y.

[Ici B_X désigne la boule unité de X, ie $B_X = \{u \in X, \|u\| < 1\}$].

On a alors la caractérisation suivante des opérateurs compacts

Proposition II.1 : On suppose que X est reflexif, ie $X^{**} = X$.
Alors $A : X \to Y$ est compacte ssi, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X, on a

$$u_n \rightharpoonup 0 \implies Au_n \to 0 \text{ fort ds } Y$$

Exemples : Si Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, l'injection (de Rellich)

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

est compacte. De manière générale, pour $q < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, l'injection

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

est compacte.

En revanche l'injection $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ est continue, mais pas compacte (exercice).

Proposition II.2 (compacité et adjonction) : Soit $A : X \to Y$ un opérateur linéaire continu. Alors il existe un unique $A^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ tel que

$$\forall L \in F^* \quad \langle L, Au\rangle_{F^*,F} = \langle A^*L, u\rangle_{E^*,E}$$

Si A est compact, alors A^* est compact.

III : Théorème de Riesz - Fredholm

Nous nous plaçons ici dans le cas où

$$X = Y = H, \quad H \text{ espace de Hilbert}$$

D 3

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ (ie $A : H \to H$ continu). On suppose que A est compact et on pose

$$T = Id + A,$$

i.e $T \in \mathcal{L}(H)$. Une telle application est appelée une perturbation compacte de l'identité. On a alors le résultat fondamental suivant

THÉORÈME III (Riesz - Fredholm) : T a les propriétés suivantes

1) Le noyau de T est de dimension finie.

2) L'image de T est fermée, sa codimension (c'est à dire la dimension de $(Im\, T)^{\perp}$) est égale à la dimension du noyau, i.e

$$\dim(Ker\, T) = codim\,(Im\, T)$$

En particulier si $Ker\, T = \{0\}$, alors $Im\, T = H$.

3) La restriction S de T à $(Ker\, T)^{\perp}$ est une application bijective et bicontinue de $(Ker\, T)^{\perp}$ vers $Im\, T$.

En particulier, si $Ker\, T = \{0\}$, T est un isomorphisme.

Décrivons (brièvement) la preuve

Preuve :

A) Démontrons 1). Si $Ker\, T$ était de dimension infinie, il contiendrait une suite orthonormée infinie $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée

$$e_n \rightharpoonup 0 \quad \text{faiblement dans } H,$$

et par la proposition II-1, on a donc

$$Ae_n \to 0 \quad \text{fortement dans } H.$$

Or $e_n \in Ker\, T$, i.e

$$Ae_n = -e_n$$

On aurait donc $e_n \to 0$, ce qui est impossible car $\|e_n\| = 1$.

B) Démontrons 3) : Soit S la restriction de T à $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$. Comme $\operatorname{Ker} T \cap (\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \{0\}$, on a

$$\operatorname{Ker} S = \{0\}$$

et donc S est injectif. S est donc une bijection de $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ sur $\operatorname{Im} T$.

Montrons que son inverse est continue. Raisonnons à cet effet par l'absurde et supposons que S^{-1} n'est pas continue. Il existerait alors une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\operatorname{Im} T$, telle que $\|y_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et telle que

$$x_n = S^{-1} y_n \quad (\text{i.e } Tx_n = y_n)$$

vérifie

$$\|x_n\| \to +\infty .$$

Posons alors

$$x'_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} = S^{-1}\left(\frac{y_n}{\|x_n\|}\right) \quad \left(\text{i.e } Tx'_n = \frac{y_n}{\|x_n\|} \to 0 \quad n \to +\infty\right)$$

de sorte que

$$\|x'_n\| = 1 \quad , \quad x'_n \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}.$$

Comme $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe une sous-suite $(x'_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $w \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$

$$x'_{\sigma(n)} \rightharpoonup w \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

On a donc

$$Tx'_{\sigma(n)} \rightharpoonup Tw$$

Or $Tx'_{\sigma(n)} \to 0$ d'après ce qui précède, et donc

$$Tw = 0 .$$

Comme $w \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$, on en déduit $w = 0$, i.e

$$x'_{\sigma(n)} \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } H$$

Comme A est compacte,

$$Ax'_{\sigma(n)} \to 0 \text{ fort dans } H.$$

Enfin $Tx'_{\sigma(n)} = x'_{\sigma(n)} + Ax'_{\sigma(n)}$. Comme $Tx_{\sigma(n)} \to 0$ fort dans H, $Ax'_{\sigma(n)} \to 0$ fort dans H, on en déduit

$$x'_{\sigma(n)} \to 0 \quad \text{fort dans } H$$

ce qui est contradictoire avec

$$\|x'_{\sigma(n)}\| = 1 .$$

c) Démontrons que $\operatorname{Im} T$ est fermée dans H. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Im} T$ une suite de Cauchy dans $\operatorname{Im} T$, convergeant vers un élément $y \in H$. Soit $x_n = S^{-1} y_n$. Comme S^{-1} est continue $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et par suite converge vers un élément $x \in (\ker T)^{\perp}$. On a donc

$$y = \lim y_n = Sx \in \operatorname{Im} T.$$

D

S

d) Montrons que si $\ker T = \{0\}$, alors $\operatorname{Im} T = H$. Soit $H_1 = \operatorname{Im} T$ et supposons par l'absurde

$$H_1 \neq H.$$

Posons

$$H_2 = T^2(H) = T(H_1) = S(H_1) \subset H_1.$$

D'après B) H_2 est fermé dans H_1. En outre $H_2 \neq H_1$. En effet sinon, $\forall x \in H$, il existerait $w \in H$ t.q

$$Tx = T^2 w \iff T(x - Tw) = 0.$$

Comme $\ker T = \{0\} \iff x = Tw$ et donc $x \in H_1$, i.e $H = H_1$ (contradiction)

Par récurrence, on pose

$$H_n = T(H_{n-1}) = T^n(H)$$

et on montre de même que H_n est strictement inclus dans H_{n-1} i.e

$$H_{n+1} \subset H_n, \qquad H_{n+1} \neq H_n, \quad \forall n$$

Par le procédé de Schmidt, on peut alors construire une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q

$$e_n \in H_n \cap H_{n+1}^{\perp}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $e_n \in H_n$, $Te_n \in T(H_n) = H_{n+1}$ et donc

$$e_n \perp Te_n, \quad \text{i.e } \langle e_n, Te_n\rangle = 0.$$

Or $Te_n = e_n + Ae_n$, Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée $e_n \rightharpoonup 0$ et donc

$$Ae_n \to 0 \text{ fort ds } H,$$

et

$$\langle e_n, Te_n\rangle \to \langle e_n, e_n\rangle = 1. \quad \text{Contradiction}$$

E) Montrons enfin que codim $T =$ dim Ker T. Comme A est compact, A^* l'est aussi, et Ker T^* est de dimension finie. Or

$$(\mathrm{Im}\, T)^{\perp} = \mathrm{Ker}\, T^*,$$

donc $(\mathrm{Im}\, T)^{\perp}$ est de dimension finie, égale à dim (Ker T^*). Il suffit donc de montrer que

$$\dim(\mathrm{Ker}\, T^*) = \dim \mathrm{Ker}\, T .$$

Supposons que $\dim \mathrm{Ker}\, T \leq \dim(\mathrm{Ker}\, T^*)$, et soit P le projecteur sur Ker T et V une isométrie de Ker T dans Ker T^*. Posons

$$A_1 = A + VP,$$

$$T_1 = I + A_1 = T + VP .$$

* On a $\underbrace{\mathrm{Ker}\, T_1 = \{0\}}$. En effet $x \in \mathrm{Ker}\, T_1 \Leftrightarrow T_1 x = 0$.

et donc
$$Tx = -VPx,$$

$$T^* T x = -T^* VPx = 0 .$$

et donc
$$\langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 = 0 \quad \text{, où} \quad Tx = 0 .$$

En remontant il vient $VPx = 0$, et donc $Px = 0$, i.e

$$x \in \underbrace{(\mathrm{Ker}\, T) \cap (\mathrm{Ker}\, T)^{\perp}} = \{0\} .$$

* Comme A_1 est compact, on déduit de la partie D que

$$\mathrm{Im}\, T_1 = H .$$

Comme $\mathrm{Im}\, VP \subset (\mathrm{Ker}\, T^*) = (\mathrm{Im}\, T)^{\perp}$, il en résulte

$$\mathrm{Im}\, VP = \mathrm{Ker}\, T^*,$$

puis
$$\mathrm{Im}\, V = \mathrm{Ker}\, T^*,$$

et enfin
$$\underbrace{\dim \mathrm{Ker}\, T = \dim \mathrm{Ker}\, T^*}.$$

[Le raisonnement est similaire pour $\dim \mathrm{Ker}\, T^* \leq \dim \mathrm{Ker}\, T$]

III.2 Alternative de Fredholm

On emploie cette expression pour discuter le cas d'une équation linéaire du type

(1) $Tu = f$,

où $u \in H$ est inconnu, $f \in H$ est la donnée, et

$T = Id + A$,

avec A compact, est une perturbation compacte de l'identité.

Comme en dimension finie (pour un système de N équations à N inconnues, linéaire), on considère l'équation "homogène"

(2) $Tu = 0$.

Deux alternatives se présentent alors

(A) Ou bien (2) a pour unique solution $u = 0$. Alors (1) possède une solution unique, pour tout $f \in H$.

(B) (2) a un nombre fini m de solutions linéairement indépendantes. (1) admet alors une solution ssi f vérifie m relations linéairement indépendantes.

IV Une application de la Théorie de Riesz-Fredholm

Le résultat qui va suivre est une application directe de la théorie précédente aux équations elliptiques. On utilise également de manière cruciale le principe du maximum.

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, b une application de classe $C^1 : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$, et enfin une fonction $c : \Omega \to \mathbb{R}$, continue telle que

(1) $\qquad c(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$

On a alors.

THEOREME IV.1 : Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. Alors le problème

$$(2)\begin{cases} -\Delta u + b.\nabla u + cu = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

possède une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

Preuve : l'idée est de se ramener à une équation du type

$$Tu = g,$$

où T est une perturbation compacte de l'identité dans un espace de Hilbert H, t.q $u \in H$, $g \in H$. A cet effet, on réécrit l'équation, en introduisant un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. L'équation (2) est équivalente à

$$-\Delta u + b.\nabla u + (c+\lambda) u = \lambda u + f$$

i.e

$$\boxed{(3) \qquad L_\lambda u = \lambda u + f,}$$

où

$$L_\lambda = -\Delta + b.\nabla + (c+\lambda) \mathrm{Id}.$$

Nous allons voir que pour λ assez grand L_λ est inversible de sorte que (3) devient (formellement)

$$u = L_\lambda^{-1}(\lambda u + f)$$

i.e

$$\mathrm{Id} + \lambda L_\lambda^{-1} u = L_\lambda^{-1} f$$

on montrera ensuite des propriétés de compacités de L_λ^{-1}.

A) Etude de L_λ ; On a tout d'abord

A.1 : Il existe λ_0 tq si $\lambda \geq \lambda_0$, alors $\forall g \in H^{-1}(\Omega)$, le problème

$$(4)\begin{cases} -L_\lambda u = -\Delta u + b.\nabla u + (c+\lambda) u = g \\ u = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$, t.q

$$(5) \qquad \|u_\lambda\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\lambda) \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

"P 9"

démonstration. Il s'agit d'une application directe du Théorème de Lax-Milgram. En effet $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution de (4) ssi

$$a(u,v) = L(v) \quad , \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v + b . \nabla u\, v + (c+\lambda) u v .$$

et

$$L(v) = \langle g, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} .$$

Il est clair que a et L sont continues sur $H_0^1(\Omega)$. Pour l'ellipticité de a, on a

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + b.\nabla u . u + (c+\lambda) u^2$$

Le seul terme qui pose problème est $\int_\Omega b \nabla u . u$. On peut le majorer comme suit

$$\left| \int_\Omega b \nabla u\, u \right| \leq \|b\|_\infty \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|b\|^2_\infty \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

[où on a utilisé de nouveau l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ avec $a = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ $b = \|b\|_\infty \|u\|_{L^2(\Omega)}$)

Il en résulte que

$$a(u,u) \geq \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla u\|^2 + \left(\lambda - \frac{\|b\|_\infty}{2} \right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} ,$$

et donc si $\lambda \geq \frac{\|b\|_\infty}{2}$, on a

$$a(u,u) \geq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \|u\|^2_{H_0^1} .$$

Ainsi pour $\lambda \geq \lambda_0 = \frac{\|b\|_\infty}{2}$, a est elliptique, et le résultat A-1 en découle.

A.2 définition de T. Pour $g \in H^{-1}(\Omega)$, posons

$$T_0 g = u_{\lambda_0} ,$$

où u_{λ_0} est la solution de (4), pour $\lambda = \lambda_0$. Il est clair au vu de (5) que l'application linéaire

$$T_0 : H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega),$$

est linéaire continue. T_0 représente donc un "inverse de L_λ" (il s'agit d'un isomorphisme de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$).

Comme nous l'avons vu dans le préambule, on peut réécrire (2) sous la forme

$$-\Delta u + b.\nabla u + (c+\lambda_0) u = \lambda_0 u + f,$$

c'est à dire, en utilisant l'opérateur T_0

$$u = T_0(\lambda_0 u + f)$$

ou encore

$$\boxed{(6) \qquad u - \lambda_0 T_0 u = T_0 f}$$

Il s'agit maintenant d'analyser (6) comme une équation dans un Hilbert H, à déterminer.

B) Réinterprétation de (6). A priori $u \in H_0^1(\Omega)$, mais on a vu que T_0 était un opérateur défini sur $H^{-1}(\Omega)$. On peut donc interpréter (6) comme une équation de $H^{-1}(\Omega)$. Plus précisement, considérant

$$\tilde{T}_0 = i \circ T_0$$

où i est l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$.

Par le Théorème de Rellich cette injection est compacte (en effet l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte, et l'injection $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ est clairement continue). Il en résulte que

$$\tilde{T}_0 : H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

est compacte. Considérons alors le problème : trouver $u \in H^{-1}(\Omega)$ t.q

$$u - \lambda_0 \tilde{T}_0 u = T_0 f$$

ie trouver $u \in H^{-1}(\Omega)$ t.q

$$\boxed{(7) \quad (Id - \lambda_0 \tilde{T}_0)\, u = T_0 f}$$

D 11

On vérifie aisément que (7) est équivalent à (6) : en effet si u est solution de (7), alors $u = \lambda_0 \tilde{T}_0 u + T_0 f$. Comme $\operatorname{Im} \tilde{T} = H^1_0$ on en déduit $u \in H^1_0(\Omega)$ et donc que u est solution de (6).

Finalement (7) est bien de la forme, pour $H = H^{-1}(\Omega)$

$$Au = g$$

avec $A = Id - \lambda_0 \tilde{T}_0$, perturbation compacte de l'identité et $g \in H = H^{-1}$. Pour montrer que (7) possède une solution unique, il suffit donc au vu de la théorie de Riesz-Fredholm, de prouver que

$$(8) \qquad \operatorname{Ker} A = \{0\}.$$

C) Etude de Ker A : Soit $w \in H^{-1}(\Omega)$ t.q $w \in \operatorname{Ker} A$, ie

$$Aw = 0$$

ou encore

$$w = \lambda_0 \tilde{T}_0 w = \lambda_0 T_0 w = T_0(\lambda_0 w)$$

Comme $\operatorname{Im} \tilde{T}_0 = H^1_0(\Omega)$, on obtient immédiat $w \in H^1_0(\Omega)$, et en revenant à la définition de T_0 on voit que

$$-\Delta w + b.\nabla w + (c+\lambda_0) w = \lambda_0 w$$

i.e w solution du problème elliptique homogène

$$(9) \quad \begin{cases} -\Delta w + b.\nabla w + cw = 0 & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On vérifie tout d'abord que les solutions w de (9) sont de classe $C^2(\Omega)$:

C.1 : Les solutions de (9) appartiennent à $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

On écrit l'équation (9) sous la forme

$$(10)\quad \begin{cases} -\Delta w = -b\nabla w + cw \\ w = 0. \end{cases}$$

On commence par montrer

α) $w \in W^{2,p}$, $\forall p < +\infty$. La preuve est itérative. Au départ on sait que le membre de droite de (10) appartient à $L^2(\Omega)$, donc par la théorie du Laplacien on en déduit que $w \in H^2(\Omega)$, puis par injection de Sobolev $\nabla w \in L^{2^*}(\Omega)$. Grâce à cette information on voit que le membre de droite appartient à $L^{2^*}(\Omega)$, et donc par la théorie de régularité du Laplacien $w \in W^{2,2^*} \hookrightarrow W^{1,(2^*)^*}$, et ainsi de suite. On vérifie que si, on sait $w \in W^{1,q}$ alors $w \in W^{2,q}$ et $W^{2,q} \hookrightarrow W^{1,q^*}$, où $q^* = \frac{Nq}{N-q}$. On vérifie que la suite d'exposants obtenus tend vers $+\infty$.

β) Il résulte de α que $w \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, pour α arbitrairement proche de 1. En effet, $\forall p > N$, on a l'injection de Sobolev

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\Omega) \quad \text{avec } \alpha = 1 - \frac{N}{p}.$$

Le membre de gauche appartient donc à $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall\ 0<\alpha<1$. Par théorie du Laplacien, on en déduit alors $w \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. Ceci démontre C.1.

C.2 Application du Principe du Maximum : Nous pouvons maintenant appliquer le Théorème II.2 (principe du maximum) à w, puisque nous savons que w est une solution "classique" (i.e de classe C^2) il en résulte que

$$w(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Comme $-w$ est aussi une solution de (9), on a

$$-w(x) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega$$

i.e

$$w = 0.$$

Conclusion : On a établi que

$$\operatorname{Ker} A = \{0\}$$

Ainsi A est bijective, d'inverse continue, et (7) a une solution unique.

Ceci termine la preuve du Théorème IV.1

V THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS COMPACTS AUTOADJOINTS

1) Soit H un espace de Hilbert, et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est autoadjoint ssi

$$A = A^*$$

c'est à dire ssi

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle, \quad \forall u \in H, \ \forall v \in H.$$

Lorsque H est de dimension finie, on sait qu'un opérateur linéaire autoadjoint est diagonalisable, dans une base orthonormée, ie il existe une base orthonormée de H, formée de vecteurs propres de A. Lorsque H est un espace de Hilbert séparable, et A un opérateur linéaire compact autoadjoint, le résultat se généralise comme suit :

THÉORÈME V.1. Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit A un opérateur linéaire compact de H vers H, tel que A est autoadjoint c'est à dire

$$A^* = A.$$

Il existe alors une base Hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de H formée de vecteurs propres de A, i.e tels que

$$Ae_n = \mu_n e_n$$

De plus, μ_n est de multiplicité finie, et $\mu_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Enfin si A est défini positif, ie $\langle Au, u\rangle > 0$, $\forall u \neq 0$, alors $\mu_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Nous admettrons ce théorème (voir p.exemple [Brezis]). Nous donnons maintenant quelques applications aux EDP elliptiques.

V.2 Théorie spectrale des opérateurs elliptiques sous forme divergence

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $L = \mathrm{div}(A(x)\nabla\ )$ un opérateur elliptique sous forme divergence, i.e tel que $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\le i,j\le N}$, où les fonctions a_{ij} sont bornées sur Ω, vérifient $a_{ij} = a_{ji}$ et $\exists\, \alpha_0 > 0,\ \alpha_1 > 0$ t.q

(1) $$\alpha_0|\xi|^2 \le \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \alpha_1|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega$$

Soit c une fonction continue définie sur $\overline{\Omega}$. On a alors

Théorème V.2. Il existe une base Hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$ et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante tels que $e_n \in H_0^1(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(I_n)\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x)\nabla e_n) + c\,e_n = \lambda_n e_n & \text{dans } \Omega \\ & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\lambda_n \longrightarrow +\infty \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

Chaque valeur propre λ_n est de multiplicité finie (i.e l'ensemble des solutions de de $(I)_n$ est de dimension finie). Enfin, si $c(x) \ge 0$, $\forall x \in \Omega$

$$\lambda_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve : On commence par se ramener au cas où $c \ge 0$. Pour cela posons

$$M = \inf_{x\in\overline{\Omega}} c(x)$$

et $$\tilde{c} = c \quad \text{si } M \ge 0$$

$$\tilde{c} = c - M \quad \text{si } M \le 0$$

de sorte que la fonction $\tilde{c} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie

(2) $$\tilde{c}(x) \ge 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

D
15

pour $f \in L^2(\Omega)$, considérons avec le problème : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(3) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \tilde{c}u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

La formulation variationnelle de (3) est : trouver $u \in H = H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \qquad , \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(u,v) = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \tilde{c}uv$$

et

$$L(v) = \int_\Omega fv .$$

Comme $\tilde{c} \geq 0$, on a

$$a(u,u) \geqslant \alpha_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 = \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

et donc a est elliptique. Par le Théorème de Lax-Milgram, il existe donc une solution unique u de (3), de plus

$$(4) \quad \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} ,$$

où la constante C dépend de α_0 et Ω. Posons alors, pour $f \in L^2(\Omega)$

$$Tu = f$$

On vérifie alors aisément, grâce à (3) et (4) que T est linéaire continue de $L^2(\Omega)$ vers $H_0^1(\Omega)$, ie $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$. Posons enfin

$$\tilde{T} = i \circ T ,$$

où i est l'injection de Rellich

$$i : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

de sorte que $\tilde{T} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est un opérateur linéaire compact.

Montrons maintenant que $\tilde{T}$ et autoadjoint ;

* $\tilde{T}$ est autoadjoint. Soit f_1, f_2 deux éléments de $L^2(\Omega)$. Posons

$$u_k = \tilde{T}(f_k) \qquad , \text{pour } k = 1,2$$

de sorte que

$$\langle \tilde{T}(f_1), f_2 \rangle_{L^2} = \int_\Omega u_1 f_2 \qquad \langle \tilde{T}(f_2), f_1 \rangle_{L^2} = \int_\Omega u_2 f_1$$

Par définition de $\tilde{T}$, on a, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \tilde{c} u_k v = \int_\Omega f_k v, \quad \text{pour } k = 1, 2$$

Choisissons $v = u_2$ pour $k = 1$, et $v = u_1$ pour $k = 2$. On en déduit

$$\int_\Omega f_1 u_2 = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \tilde{c}\, u_1 u_2$$

$$\int_\Omega f_2 u_1 = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \tilde{c}\, u_2 u_1$$

Comme $a_{ij} = a_{ji}$ (symétrie de a), il en résulte

$$\int_\Omega f_1 u_2 = \int_\Omega f_2 u_1,$$

et donc

$$\langle \tilde{T}(f_1), f_2 \rangle_{L^2} = \langle f_1, \tilde{T}(f_2) \rangle_{L^2} \quad , \forall f_1, f_2 \text{ dans } L^2(\Omega)$$

$\tilde{T}$ est donc un opérateur autoadjoint de Ω.

* $\tilde{T}$ est défini positif : On a, $\forall f \in L^2(\Omega)$

$$\langle \tilde{T}(f), f \rangle = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \tilde{c}\, u^2 = a(u,u) \geq \alpha_0 \|u\|_{H_0^1}^2$$

où $u = \tilde{T}(f)$. Il en résulte

$$(5) \quad \langle \tilde{T}(f), f \rangle > 0, \qquad \forall f \neq 0$$

$\tilde{T}$ est donc positif (strictement). (En particulier $\operatorname{Ker} \tilde{T} = \{0\}$)

* Application du Théorème V.1 Comme $\tilde{T}$ est un opérateur compact autoadjoint défini positif, de l'espace de Hilbert séparable $L^2(\Omega)$, nous pouvons appliquer le Théorème V.1. Il existe donc une base Hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$, et une suite $\mu_n \to 0$, alors

$$(6) \qquad \mu_n > 0 \quad .$$

telles que

$$(7) \qquad \tilde{T} e_n = \mu_n e_n$$

Bien entendu, on peut renuméroter les $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de sorte que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit décroissante, i.e

$$(8) \quad 0 \leq \mu_{n+1} \leq \mu_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Revenons à (7). Comme $\mathrm{Im}\,\tilde{T} \subset H_0^1(\Omega)$, on déduit de (7) que

$$e_n = T\left(\frac{1}{\mu_n} e_n\right) \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi (7) signifie

$$(9) \left\{ \begin{array}{ll} -\mathrm{div}(A(x)\nabla e_n) + \tilde{c} e_n = \dfrac{1}{\mu_n} e_n & \text{dans } \Omega \\ e_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Rappelons que

$$\tilde{c} = c - M_0$$

où $M_0 = \mathrm{Inf}\,(M, 0)$, où $M = \inf\limits_{x \in \bar{\Omega}} c(x)$.

On a donc

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla e_n) + c e_n = \left(\frac{1}{\mu_n} + M_0\right) e_n.$$

Posons

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} + M_0.$$

On a alors $-\mathrm{div}(A(x)\nabla e_n) = \lambda_n e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \\ \lambda_n \to +\infty \end{array} \right.$$

Le théorème est démontré.

<u>COMMENTAIRE</u>. Le théorème précédent est un outil fondamental pour de nombreux problèmes, théoriques ou appliqués. Par exemple, il permet de décrire les solutions de certains problèmes d'évolution.

Considérons, en guise d'illustration, l'équation parabolique, pour $v : \Omega \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, associée à L

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(A(x)\nabla v) = 0 & \text{sur } \Omega \times [0,+\infty[\\ v(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ v(x,0) = v_0(x), & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

où la condition, au temps $t=0$, v_0 st donnée. Décomposons v_0 sur la base Hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a par le théorème de Bessel-Parseval

$$v_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n, \quad \text{où} \quad c_n = \int_\Omega v_0 e_n$$

La solution de (I) peut alors s'écrire (en faisant quelques hypothèses de régularité sur v_0)

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \exp(-\lambda_n t)\, e_n(x)$$

et on voit en particulier que

$$v(x,t) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \to +\infty$$

$$v(x,t) \sim c_1 (\exp(-\lambda_1 t)\, e_1(x)).$$

La première valeur propre (i.e la plus petite) λ_1 ainsi que la fonction propre associée e_1 joue donc un rôle important dans le comportement asymptotique de v, lorsque $t \to +\infty$.

V.3 Caractérisation de la première valeur propre λ_1 (la + petite)

Nous nous plaçons de nouveau dans le contexte du théorème V.1, on a donc

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \quad \dots \quad \lambda_n \to +\infty$$

La première valeur propre, λ_1 st donc la plus petite. On a alors

Proposition V.1. On a l'identité

$$\lambda_1 = \operatorname{Inf} \left\{ \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + c u^2, \; u \in H_0^1(\Omega) \;\; \int_\Omega |u|^2 = 1 \right\}.$$

De plus l'infimum est atteint par les fonctions propres associées à λ_1.

Posons pour u, v dans $H_0^1(\Omega)$

$$a(u,v) = \sum_{1\leq i,j\leq N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + cuv$$

$$a^2(u,v) = \sum_{1\leq i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + c^2uv$$

La preuve de la proposition V.1 est une conséquence directe du Lemme suivant :

Lemme V.1 i) : La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est totale dans $H_0^1(\Omega)$ [i.e $\mathrm{vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$].

ii) Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, $c_n = \langle u, e_n\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u e_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ de sorte que

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n$$

On a alors l'identité

$$(10)\quad a(u,u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n c_n^2$$

Donnons tout d'abord la preuve de la Proposition V.1 (en admettant le résultat du Lemme.

Preuve de la Proposition V.1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Avec les notations du Lemme, on a

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2 .$$

En particulier, comme $\lambda_n \geq \lambda_1$, on a par (10)

$$a(u,u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n c_n^2 \geq \lambda_1 \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2\Big)$$

$$\geq \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Ainsi si $u\in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$, alors

$$a(u,u) \geq \lambda_1 .$$

On vérifie par ailleurs que pour λ_1

$$a(e_1, e_1) = \lambda_1$$

ce qui termine la preuve.

Preuve du Lemme V. 1

i) On vérifie tout d'abord que $L^2(\Omega)$ est dense dans $H^{-1}(\Omega)$. En effet $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et dans $H^{-1}(\Omega)$. Considérons alors de nouveau l'application $T : H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ qui à $f \in H^{-1}(\Omega)$ associe la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \tilde{c}u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Nous avons vu dans la preuve du Théorème V. 1 que T est un isomorphisme de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$. De plus

$$Te_n = \mu_n e_n \quad , \mu_n > 0 \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

c'est à dire

$$(11) \qquad e_n = \frac{1}{\mu_n} T^{-1}(e_n)$$

Comme la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $L^2(\Omega)$, comme $L^2(\Omega)$ est dense dans $H^{-1}(\Omega)$, et comme la norme L^2 est plus forte que la norme H^{-1}, il en résulte que

$$(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est totale dans } H^{-1}(\Omega)$$

Comme T^{-1} est un isomorphisme de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$, on en déduit que $(T^{-1}(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $H_0^1(\Omega)$ ce qui prouve i)

ii) Notons par ailleurs que $\tilde{a}(\cdot,\cdot)$ est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ équivalent au produit scalaire de $H_0^1(\Omega)$. De plus, il résulte de la formulation variationnelle de l'équation que

$$\begin{cases} \tilde{a}(e_i, e_j) = 0 & \text{si } i \neq j \\ a(e_i, e_i) = \dfrac{1}{\mu_i} & \text{si } i \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

i.e on a donc

$$\tilde{a}(\sqrt{\mu_i}\, e_i, \sqrt{\mu_j}\, e_j) = \delta_{ij} \quad , \forall i \neq j$$

La famille $(\sqrt{\mu_n}\, e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une famille orthonormée pour le produit scalaire $\tilde{a}$: comme elle est totale, il s'agit d'une base Hilbertienne

Appliquons alors le Théorème de Bessel-Parseval dans le cadre précédent. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\tilde{a}(u,u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\tilde{a}(u, \sqrt{\mu_n}\, e_n)\right]^2$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n \, \tilde{a}(u, e_n)^2$$

Par la formulation variationnelle pour l'équation, on a

$$\tilde{a}(u, e_n) = \frac{1}{\mu_n} \langle u, e_n \rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\mu_n} c_n.$$

et donc

$$\tilde{a}(u,u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_n} c_n^2.$$

Comme $a(u,u) = \tilde{a}(u,u) + M_0 \langle u, u \rangle_{L^2} = \tilde{a}(u,u) + M_0 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2$

on obtient

$$a(u,u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu_n} - M_0\right) c_n^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n c_n^2.$$

V. 4 Théorie spectrale pour le Laplacien.

Dans le cas où $L = \Delta$, on peut bien entendu appliquer les résultats précédents. On a

Proposition V. 2 Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Il existe une base Hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$, et une suite croissante $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tels que $e_n \in H_0^1(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$, et

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n & \text{sur } \Omega \\ e_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

De plus chaque valeur propre λ_n est de multiplicité finie et $\left(\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$.

V.4.1 Propriétés des fonctions propres

On a

<u>Proposition V.3</u>. Si Ω est un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^n$, alors $e_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Preuve</u> : On a

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n & \text{sur } \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ e_n = 0 & \text{dans sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En particulier, on voit par la théorie de régularité du Laplacien que

$$e_n \in H^k(\Omega) \implies e_n \in H^{k+2}(\Omega)$$

Comme $e_n \in H^1$, on en déduit $e_n \in H^3$, puis $e_n \in H^5$, et enfin

$$e_n \in H^k(\Omega) \quad , \forall k \in \mathbb{N}$$

Ainsi

$$e_n \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H^k(\Omega)$$

et donc $e_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$

V.4.1 Propriétés de λ_1 et e_1

Par la proposition V.2 pour $L = -\Delta$, on a

<u>Proposition V.4</u>. On a

$$\lambda_1 = \operatorname{Min} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2,\ u \in H^1_0(\Omega) \text{ t.q. } \int_\Omega |u|^2 = 1 \right\}$$

et le minimum est atteint ssi $u \in F_{\lambda_1} \cap \{ u \in H^1_0(\Omega),\ \|u\|_2 = 1 \}$

où $F_{\lambda_n} = \{ v \in H^1_0(\Omega),\ -\Delta v = \lambda_n v \}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Pour le Laplacien, on en déduit la conséquence importante suivante :

Proposition V.5. Soit $u \in F_{\lambda_1}$, t.q. $u \neq 0$. Alors u ne s'annule pas sur Ω, ie u est de signe constant. On a donc ou bien $u(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$, ou bien $u(x) < 0$, $\forall x \in \Omega$.

Preuve. Soit $u \in F_{\lambda_1}$. Par homogénéité, on peut toujours supposer que $\int_\Omega |u|^2 = 1$ (sinon considérer $v = \frac{u}{\|u\|_{L^2}}$). Par la proposition V.3 on a

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Par ailleurs, on a

$$|\nabla |u|| = |\nabla u| \quad \text{, pour presque tout } x \in \Omega$$

soit

$$\int_\Omega |\nabla |u||^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \quad , \quad |u| \in H^1_0(\Omega)$$

Il en résulte que $\int_\Omega |\nabla |u||^2 = \lambda_1$, $\||u|\|_{L^2} = 1$. Par la proposition V.4 on a donc $|u| \in F_{\lambda_1}$, ie

$$\begin{cases} -\Delta |u| = \lambda_1 |u| & \text{sur } \Omega \\ |u| = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Par le Principe du maximum fort, on en déduit

$$|u| > 0 \quad \text{sur } \Omega$$

ce qui termine la preuve.

On obtient finalement

THEOREME V.2 : $\dim F_{\lambda_1} = 1$, ie la première valeur propre est de multiplicité 1. On a donc

$$F_{\lambda_1} = \mathbb{R} e_1.$$

Preuve : Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe une famille libre de deux éléments u_1, u_2 dans F_{λ_1}. Par la proposition V.5 $\forall x_0 \in \Omega$ $|u_1|(x_0) \neq 0$, $|u_2|(x_0) \neq 0$. Fixons x_0 et posons

$\alpha = u_1(x_0)$ $\beta = u_2(x_0)$. On a alors

$$(\beta u_1 - \alpha u_2)(x_0) = 0.$$

Or $\beta u_1 - \alpha u_2 \in F_{\lambda_1}$, et est une fonction non nulle. Par la proposition V.5 elle ne s'annule pas: On a donc abouti à une contradiction.

CONSEQUENCES

Nous allons illustrer le principe suivant, sur un exemple.

Principe : La première fonction propre e_1 possède toutes les symétries du problème

Soit alors $\Omega = B(R)$. On a

THEOREME V. 3 : Soit $\Omega = B(R)$. La fonction e_1 possède la symétrie radiale, i.e il existe une fonction positive $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$e_1(x) = f(|x|), \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

$(f(1) = 0)$.

Preuve : Soit $\mathcal{R}$ une rotation de $\mathbb{R}^N$, i.e $\mathcal{R} \in SO(N)$. On remarque que $B(R)$ est invariant par $\mathcal{R}$ i,e

$$\mathcal{R}(B(R)) = B(R)$$

i.e Ω est invariant par rotation. Pour $u \in H_0^1(B(R))$ posons

$$u_{\mathcal{R}}(x) = u(\mathcal{R}x)$$

Comme $\int_\Omega |\nabla u_{\mathcal{R}}(x)|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2$, $\int_\Omega |u_{\mathcal{R}}|^2 = \int_\Omega |u|^2$

on vérifie que $\forall \mathcal{R} \in SO(N)$, $u_{\mathcal{R}} \in H_0^1(B(R))$.

pour $u = e_1$, on a

$$\lambda_1 = \int_\Omega |\nabla e_{1,\mathcal{R}}|^2, \quad \int_\Omega |e_{1,\mathcal{R}}|^2 = 1$$

et donc par la proposition V. 4, $e_{1,\mathcal{R}} \in F_{\lambda_1}$ Comme

$$F_{\lambda_1} = \mathbb{R} e_1 \quad , \qquad \text{et} \quad \| e_{1,\mathcal{R}} \|_{L^2} = 1 ,$$

on en deduit que

$$e_{1,\mathcal{R}} = \pm e_1$$

Comme l'application $\mathcal{R} \to e_{1,\mathcal{R}}$ est continue de $SO(N)$ vers $F_{\lambda,1}$, ont deduit finalement que

$$e_{1,\mathcal{R}} = e_1$$

i.e $\forall \mathcal{R} \in SO(N)$

$$e_1(x) = e_1(\mathcal{R}x).$$

Il en resulte que $\forall y \in \mathbb{R}^3$ tq $\|y\| = \|x\|$, on a

$$e_1(y) = e_1(x)$$

La conclusion en decoule.

Commentaire. (1) L'application $\mathcal{R} \to u_{\mathcal{R}}$ est appelée un representation du groupe $SO(N)$ dans l'espace vectoriel $H_0^1(\Omega)$. Il est facile de voir que $\forall n$, l'application $\mathcal{R} \to u_{\mathcal{R}}$ laisse les ensembles $F_{\lambda n}$ invariants (ou stables).

L'etude complète des espaces F_λ, en présence de symetrie est l'objet de la Théorie de Peter-Weyl.

(2) Notons que le Théoreme precedent ramene l'etude a un probleme à une dimension.