CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS

LES ESPACES DE BANACH

I) INTRODUCTION

La suite du cours est consacrée aux problèmes non linéaires. Un exemple type est l'équation

$$(I)\quad \begin{cases} -\Delta u = u^3 + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$). On peut réécrire ce problème sous la forme

$$F(u) = f$$

où $F(u) = -\Delta u - u^3$, est une application entre espaces fonctionnels que nous préciserons. La question est alors de savoir si F est injective, surjective, etc ...

Ce type de situation peut s'analyser à l'aide des outils du calcul différentiel. L'idée principale est d'analyser localement près d'un point u son développement limité au premier ordre, i.e de construire sa dérivée.

Deux notions de dérivée sont alors à notre disposition :

$$\begin{cases} 1 - \text{La dérivée au sens de Gateaux} \\ 2 - \text{La dérivée au sens de Fréchet,} \end{cases}$$

la première notion étant la plus faible : le point essentiel est que les deux notions coïncident dans le cas C^1.

II La dérivée au sens de Fréchet

Soit X et Y deux espaces de Banach, U un ouvert de X.

DÉFINITION 1. Soit $u \in U$, et $F : U \to Y$. On dit que F est différentiable au point u s'il existe une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ telle que si on considère

$$R(h) = F(u+h) - F(u) - A.h \quad , \text{pour } h \in X \text{, petit}$$

Alors $\dfrac{R(h)}{\|h\|} \to 0$ lorsque $\|h\| \to 0$ c'est à dire

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que si $\|h\|_X \leq \delta$, alors $\|R(h)\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X$.

Si une telle application $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ existe, elle est forcément unique. On note alors

$$A = dF(u).$$

Elle est appelée différentielle (au sens de Fréchet) de F en u, ou encore application linéaire tangente à F en u. En l'absence de précision supplémentaire différentiable signifiera dans la suite différentiable au sens de Fréchet.

Exemples 1) $F(u) = c$. F Fréchet différentiable et $dF(u) = 0$, $\forall u$

2) Si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ $A(u+h) - A(u) = A \cdot h$ et donc $dA(u) = A$, $\forall u \in X$.

3) Si $B : X \times Y \to Z$ est bilinéaire $B(u+h, v+k) = B(u,v) + B(h,v) + B(u,k) + B(h,k)$ et $|B(h,k)| \leq C \|h\| \|k\|$ si B est continue, d'où si B est bilinéaire continue

$dB(u,v)(h,k) = B(h,v) + B(h,k)$ $[\in \mathcal{L}(X \times Y; Z)]$.

4) $X = H$ Hilbert $F(u) = \|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ $dF(u)h = 2\langle u, h \rangle$

On a ensuite toutes les propriétés classiques

Lemme 1 : Si F différentiable en u, alors F est continue en u.

Proposition 1 i) Soit F et G deux applications de U vers Y. Si F et G sont différentiables en $u \in G$, alors $\forall \lambda, \mu$ réels $\lambda F + \mu G$ est différentiable en u, et

$$d(\lambda F + \mu G)(u) = \lambda dF(u) + \mu dG(u).$$

ii) Soient X, Y, Z trois espaces de Banach, U un ouvert de X, V un ouvert de Y. Soit $F : U \to Y$, et $G : V \to Z$, tels que $F(U) \subset V$. Si F est différentiable en u, et G différentiable en $v = F(u)$, alors $G \circ F$ est différentiable en u et

$$d(G \circ F)(u) = dG(v) \circ dF(u) \qquad v = F(u)$$

i.e $\quad d(G \circ F)(u)(h) = dG(v)[dF(u)h]$.

La différentielle de $G \circ F$ est donc la composition des applications linéaires continues $dF(u)$ et $dG(v)$, pour $v = F(u)$.

III Différentiabilité au sens de Gateaux

Commençons par définir la notion de dérivée directionnelle.

Définition 1: Soit $F : U \to Y$, $u \in U$. Soit $v \in X$, $v \neq 0$.

On appelle dérivée directionnelle en u de F dans la direction v, notée $\partial_v F(u)$, la limite, lorsqu'elle existe

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t}.$$

La notion de dérivée directionnelle est donc une extension de la notion de dérivée partielle. Si F est Fréchet différentiable, alors $\forall v \in X$ la dérivée directionnelle dans la direction v est donnée par

$$\partial_v F(u) = dF(u)v.$$

En effet $F(u+tv) = F(u) + dF(u)(tv) + R(tv)$

donc

$$\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = dF(u)(v) + \underbrace{\frac{R(tv)}{t}}_{\to 0} \text{ lorsque } t \to 0.$$

Définition 2 : On dit que $F : U \to Y$ est gateaux différentiable en u (G-différentiable en u), s'il existe une application linéaire continue A de X vers Y, i.e $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ telle que $\forall v \in X$, la dérivée directionnelle de F en u dans la direction v existe et est égale à $A(v)$, i.e

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = A(u) \quad , \ t \to 0, \ \forall v \in X.$$

On vérifie alors que, si une telle application A existe elle est unique.

On note

$$A = d_G F(u).$$

Proposition: Si F est Fréchet différentiable en u, elle est Gateaux différentiable en u et

$$d_G F(u) = dF(u).$$

E 4

La réciproque est fausse en général, même en dimension finie.

Rappelons l'exemple $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} F(x,y) = \left[\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}\right]^2 & \text{si } y \neq 0 \\ F(x,0) = 0 \end{cases}$$

La G-différentiabilité n'implique pas la continuité de F !
(alors que bien entendu la différentiabilité au sens de Fréchet l'implique).

En revanche, si on sait que F est C^1 au sens de Gateaux, ie si l'application

$$\begin{aligned} u &\longrightarrow d_G F(u) \\ U &\longmapsto \mathcal{L}(X,Y) \quad (U \text{ ouvert de } X) \end{aligned}$$

est continue, alors F est Fréchet différentiable sur U et les deux notions coïncident. C'est

<u>THEOREME I</u> : Soit $F : U \to Y$ une application G-différentiable (U ouvert de X). On suppose que l'application $v \longmapsto d_G F(v)$ est continue sur U. Alors F est Fréchet différentiable sur U et

$$dF(v) = dF_G(v) \quad , \forall v \in U.$$

<u>Preuve</u> : Soit $u \in U$. Il faut montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq si $\|v\|_X \leq \delta \Rightarrow$ alors $|F(u+v) - F(v) - d_G F(u)(v)| \leq \varepsilon$.

Supposons pour simplifier les notations que $u = 0$. L'application

$$v \longrightarrow d_G F(v)$$

est continue, donc il existe δ_1 tel que

$$(*) \quad \|v\| \leq \delta_1 \Rightarrow \|dF_G(v) - dF_G(0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon .$$

Considérons alors la droite $D_v = \{w = \lambda v , \lambda \in \mathbb{R}\}$, et le segment

$$[0,v] = \{w \in X , w = \lambda v , \lambda \in [0,1]\}$$

Soit enfin l'application f définie sur $[0,1]$ par

$$f(\lambda) = F(\lambda v).$$

On a
$$f'(\lambda) = \frac{df}{d\lambda}(\lambda) = dF_G(\lambda v)(v)$$

Comme on a supposé dF_G continue, et que v est fixe, il en résulte que f' est continue sur $[0,1]$ et que f est donc C^1 sur $[0,1]$.

On a alors
$$F(v) - F(0) = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(\lambda)\,d\lambda = \int_0^1 dF_G(\lambda v)(v)\,d\lambda$$
et donc
$$F(v) - F(0) - dF(0)(v) = \int_0^1 \left[dF_G(\lambda v) - dF(0)\right](v)\,d\lambda .$$

On déduit alors de $(*)$ que si $\|v\| \leq \delta_1$, alors
$$\| F(v) - F(0) - dF(0)\, v \|_Y \leq \varepsilon \|v\|_X$$
ce qui termine la preuve.

Commentaire : En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gateaux. Si on veut prouver que F est C^1 il suffit donc de prouver qu'elle est Gateaux-différentiable, puis de vérifier que la différentielle dF_G est continue.

En fait pour vérifier qu'une fonction est C^1, on peut également utiliser le Théorème suivant.

Théorème 2. Soit $\tilde{X}$ un sous-espace vectoriel de X, dense ds X. Soit F une application continue de $U \subset X$, ouvert vers Y. On suppose que $\forall u \in \tilde{X} \cap U$ il existe une application linéaire $A(u) \in \mathcal{L}(X, Y)$ telle que
$$\lim_{t \to 0} \frac{J(u+tv) - J(v)}{t} = A(u)\, v, \quad \forall v \in \tilde{X}$$

Si l'application $u \longmapsto A(u)$ est continue sur $\tilde{X} \cap U$, alors F est de classe C^1 sur U, et
$$dF(u) = A(u)$$

Preuve : Exercice.

<u>Commentaire</u> : Dans les applications que nous avons en vue, les espaces X et Y seront en général des espaces de fonctions (par exemples $L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, ou $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, etc...) Lorsque cela est possible nous prendrons, selon les cas

$$\tilde{X} = C^\infty(\bar{\Omega})$$

ou

$$\tilde{X} = C_c^\infty(\Omega).$$

Pour calculer la différentielle d'une fonction C^1, il suffira donc, au vu du Théorème 2 de savoir calculer

$$\lim_{t \to +0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t},$$

pour u, v fonctions <u>régulières</u>. Cela soulage, très souvent les calculs de manière importante.

IV Opérateur de Nemitskii : continuité et différentiabilité.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et soit f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto f(x,t), \qquad \forall x \in \Omega, \ t \in \mathbb{R}$$

Définition 1. On appelle opérateur de Nemitskii associé à f l'application T_f qui à une fonction mesurable u définie sur Ω associe la fonction $v = T_f(u)$, définie sur Ω par

$$v(x) = f(x, u(x)) \quad , \forall x \in \Omega .$$

(dans la suite nous confondront T_f et f et écrirons $v = f(x,u)$]

Nous supposerons toujours, dans la suite que f est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire telle que

i) $t \longrightarrow f(x,t)$ est continue $\forall x \in \Omega$

ii) $x \longrightarrow f(x,t)$ est mesurable, $\forall t \in \mathbb{R}$.

On écrira : f est une C-fonction.

Exemple : Si $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable sur Ω.

alors $f(x,t) = h(x) + t^2$ est une C- fonction

$$\begin{cases} f(x,t) = h(x)\, t^2 & \text{''} \quad \text{''} \\ f(x,t) = h(x)\, |t|^{p-1} t & \forall p > 1 \\ f(x,t) = h(x) + |t|^{p-1} t & \text{''} \\ \quad = h(x) + \exp t & , f = h + g(t) \quad , g \text{ continue} \\ & f = h g(t) \quad g \text{ continue} \end{cases}$$

On a le résultat de continuité

Théorème 3. (continuité de T_f de L^p vers L^q) : Soit $p, q \geq 1$, $\alpha = \frac{p}{q}$.
On suppose que f est une C-fonction sur $\Omega \times \mathbb{R}$ (Ω borné) vérifiant

$$\exists\, C > 0 \qquad |f(x,t)| \leq C(1 + |t|^\alpha) \quad , \forall t \in \mathbb{R}, \ \text{p.p } x \in \Omega, \quad \alpha = \frac{p}{q}$$

Alors l'application $T_f : u \longmapsto T_f u = f(x,u)$ est continue de $L^p(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$.

Preuve : On vérifie que si $u \in L^p(\Omega)$, alors pour presque tout $x \in \Omega$

$$|f(x,u(x))|^q \leq C(1 + |u|^{\frac{p}{q}}(x))^q \leq C(|u|^p(x) + 1)$$

Donc

$$\int_\Omega |f(x,u(x))|^q dx \leq C\left(\int_\Omega |u|^q + \int_\Omega 1\right) < +\infty$$

car Ω est supposé borné. Ainsi T_f est bien définie de $L^p(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$. Pour établir la continuité, il s'agit de montrer que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^p(\Omega)$, si

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } L^p(\Omega)$$

alors

$$f(x,u_n) \longrightarrow f(x,u) \text{ dans } L^q(\Omega).$$

Pour démontrer cette convergence, nous faisons appel aux résultats classiques suivants.

Lemme 1. Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\Omega)$, telle que $v_n \longrightarrow v$ dans $L^p(\Omega)$, $n \to +\infty$. Il existe alors une sous-suite $(v_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $h \in L^p(\Omega)$ tels que

$$v_{\sigma(n)}(x) \longrightarrow v(x) \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega,$$

$$|v_{\sigma(n)}(x)| \leq h(x) \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

Lemme 2. Soit E un espace de Banach, et $(u_n)_{n\in E}$ une suite d'éléments de E. Alors

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } E$$

si et seulement, pour toute sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in E}$ de $(u_n)_{n\in E}$ on peut extraire une sous-suite $u_{\sigma\circ\sigma_1(n)}$ qui converge vers u.

Le Lemme 1 est un résultat central en théorie de l'intégration, et nous renvoyons, pour sa preuve aux ouvrages spécialisés.

Pour démontrer le Lemme 2, on peut raisonner par l'absurde et supposer que $u_n \not\to u$. Il existerait alors une sous-suite $u_{\sigma(n)}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$(*) \qquad \|u_{\sigma(n)} - u\| > \varepsilon . \qquad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Par hypothèse, on peut extraire de $u_{\sigma(n)}$ une nouvelle-suite $u_{\sigma\circ\sigma_1(n)}$ qui converge vers u. Ceci contredit $(*)$.

Preuve du Théorème 3.

Soit $u_{\sigma(n)}$ une sous-suite quelconque de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il suffit, d'après le Lemme 2, de démontrer qu'il existe une nouvelle s-suite $u_{\sigma\circ\sigma_1(n)}$ telle que

$$f(x, u_{\sigma_1\circ\sigma(n)}) \longrightarrow f(x,u) \quad \text{dans } L^q(\Omega)$$

Or d'après le Lemme 1, il existe justement une sous-suite $u_{\sigma_1\circ\sigma(n)}$ telle que

$$u_{\sigma_1\circ\sigma(n)}(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{pour presque tout } x$$

$$|u_{\sigma_1\circ\sigma(n)}(x)| \leq h(x) \quad \text{" " "}$$

où $h \in L^p(\Omega)$.

On a donc, par composition et continuité de f par rapport à la var. u

$$f(x, u_{\sigma_1\circ\sigma(n)}(x)) \longrightarrow f(x, u(x)) \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega$$

et

$$|f(x, u_{\sigma_1\circ\sigma(n)}(x))| \leq a + b\,|h(x)|^\alpha \quad \text{" " "}$$

On peut alors utiliser le théorème de convergence dominée pour conclure que

$$\int_\Omega |f(x, u_{\sigma_1\circ\sigma(n)}(x) - f(x, u(x))|^q \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \to +\infty$$

ce qui donne le résultat.

En guise d'exercices, nous avons également les résultats suivant :

Théorème 3 bis i) Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, et f une fonction continue de $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application

$$T_f : C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^0(\bar{\Omega})$$
$$u \longmapsto T_f u \equiv f(x, u)$$

définie par $T_f u(x) = f(x, u(x))$ est continue de $C^0(\bar{\Omega})$ vers $C^0(\bar{\Omega})$.

ii) Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, et f une fonction continue de $\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété : $\exists\, 0<\alpha\leq 1$, t.q $\forall M>0$, $\exists\, C_M>0$ tq $\forall x,y \in \bar{\Omega}$, $\forall u,v \in \mathbb{R}$ si $\|u\| \leq M$, $|v| \leq M$

alors $|f(x,u) - f(y,v)| \leq C_M \left(|x-y|^{\alpha} + |u-v|^{\alpha} \right)$

Alors $T_f : C^{0,\beta}(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ est continue, pour $\gamma = \alpha\beta$.

Rappel : L'espace de Hölder $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ est défini pour $0<\beta\leq 1$ par

$$C^{0,\beta}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ t.q } \exists M \geq 0 \text{ tq } |u(x) - u(y)| \leq M|x-y|^{\beta} \quad \forall x,y \in \bar{\Omega} \right\}$$

On munit $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ de la norme

$$\|u\|_{C^{0,\beta}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \sup_{\substack{x,y\in\bar{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\beta}}.$$

On montre alors, que pour cette norme $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ est un espace de Banach. (exercice)

IV.2 PROPRIÉTÉS DE DIFFÉRENTIABILITÉ DE T_f

Nous allons voir dans ce qui suit que des propriétés de différentiabilité de la fonction f par rapport à la deuxième variable peuvent entraîner des propriétés de différentiabilité de l'opérateur T_f. Nous ferons dans la suite les hypothèses suivantes sur f :

(H1) Pour presque tout $x \in \Omega$ la fonction d'une variable

$$t \longmapsto f(x,t)$$

est dérivable par rapport à t. En d'autres termes, la fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

existe. Nous supposerons de plus que $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est une C-fonction.

(H2) Il existe des constantes $C > 0$, et $\alpha > 1$ (inégalité stricte !) tels que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq C(1+|t|^{\alpha-1}) \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega$$

(H3) $\exists C > 0$ t.q $|f(x,0)| \leq C$

Remarquons que, si f vérifie les trois propriétés précédentes, alors par intégration, il résulte de (H2) et (H3) que

$$|f(x,t)| \leq C + \int_0^t \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\right| ds$$

$$\leq C + \int_0^t (1+|s|^{\alpha-1})\, ds \leq C(1+|t|^{\alpha}).$$

Il résulte donc du Théorème 3 que T_f est continue de $L^p(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$, pour tout nombre q vérifiant

$$q \leq \frac{p}{\alpha}$$

On a de plus.

<u>Théorème 2</u>. Soit f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (H1), (H2) et (H3). Soit $p \geq 1$. L'application T_f est alors différentiable, de classe C^1 de $L^p(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$ pour tout $q \geq 1$ vérifiant

$$q \leq \frac{p}{\alpha}.$$

Sa différentielle sur $L^p(\Omega)$ est donnée par :

$$dT_f(u)v = \frac{\partial f}{\partial t}(x, u)\, v$$

i.e

i.e pour presque tout $x \in \Omega$

$$dT_f(u)(v)(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, u(x))\, v(x).$$

<u>Preuve</u>. Soit $u \in L^p(\Omega)$. Considérons l'application linéaire $A(u)$ de $L^p(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$ définie par

$$A(u)v = \frac{\partial f}{\partial t}(x, u)\, v \quad \text{i.e}$$

par

$$A(u)v(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, u(x))\, v(x) \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

1) * Vérifions tout d'abord que $A(u)v \in L^q(\Omega)$. On a

$$\left[|A(u)v(x)|\right]^q = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(x, u(x))\right]^q |v|^q(x).$$

On a donc

$$\int_\Omega |A(u)v(x)|^q = \int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, u(x))\right|^q |v|^q(x)$$

$$\leq C \int_\Omega \left(1 + |u(x)|^{\alpha-1}\right)^q |v|^q(x)\, dx$$

$$\leq C \int_\Omega \left(1 + |u(x)|^{p-q}\right) |v|^q(x)\, dx$$

$$\leq C \int_\Omega |v|^q(x) + \int_\Omega |u(x)|^{p-q} |v|^q(x)\, dx$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_\Omega |v|^q \leq \left(\int_\Omega (|v|^q)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega 1\right)^{1-\frac{q}{p}}$$

$$\leq \left(\int_\Omega |v|^p\right)^{q/p} |\Omega|^{1-\frac{q}{p}}.$$

De même

$$\int_\Omega |u|^{p-q} v^q \leq \left(\int_\Omega (|u|^{p-q})^{\frac{p}{p-q}}\right)^{1-\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega (|v|^q)^{\frac{p}{q}}\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1-\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega |v|^p\right)^{p/q}$$

La conclusion en découle.

2ème Etape L'application $u \longmapsto A(u)$ est continue de $X = L^p(\Omega)$ vers $Y = \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^q(\Omega))$.

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega).$$

Il faut montrer que

$$A(u_n) \longrightarrow A(u)$$

dans $\mathcal{L}(L^p(\Omega), L^q(\Omega))$. On a

$$\|A(u_n) - A(u)\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega), L^q(\Omega))} = \sup_{\substack{v\in L^p(\Omega)\\ \|v\|_{L^p}=1}} \left(\int_\Omega \left|\left[\frac{\partial f}{\partial t}(x,u_n) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u)\right] v(x)\right|^q\right)^{1/q}$$

Or $\forall v \in L^p(\Omega)$

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,u_n) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u)\, v(x)\right|^q \leq \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,u_n) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u)\right|^{\frac{p}{p-q}}\right)^{1-\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega |v|^{q\cdot\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq \|v\|^q_{L^p(\Omega)} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,u_n) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u)\right|^{\frac{p}{p-q}}\right)^{1-\frac{q}{p}}$$

Comme $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq c(1+|t|^{\alpha-1})$, on voit que pour tout $p \geq 1$, l'application $T_{\frac{\partial f}{\partial t}}$ est continue de $L^p(\Omega)$ vers $L^r(\Omega)$, pour $r \leq \frac{p}{\alpha-1}$. Prenons $r = \frac{p}{p-q}$ on vérifie que l'on a bien

$$\frac{p}{p-q} \leq \frac{p}{\alpha-1}, \quad \text{i-e} \quad \alpha-1 \leq p-q$$

Donc,

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,u_n) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right|^r \longrightarrow 0$$

et la conclusion en découle.

3eme Etape : Posons $\tilde{X} = C_c^\infty(\Omega)$. On a $\forall u \in C_c^\infty(\Omega)$, $\forall v \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left\| f(x,u+sv) - f(x,u) - s\frac{\partial f}{\partial t}(x,u)v \right\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

i-e $\quad \dfrac{T_f(u+sv) - T_f(u)}{s} \longrightarrow A(u)v$ ds $L^p(\Omega)$

Preuve On écrit pour $x \in \Omega$

$$f(x,u(x)+sv(x)) - f(x,u(x)) = \int_{u(x)}^{u(x)+sv(x)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,\ell)\, d\ell$$

et de même

$$s\frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))v(x) = \int_{u(x)}^{u(x)+sv(x)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))\, d\ell$$

Il en résulte que

$$\left|f(x,u(x)+sv(x)) - f(x,u(x)) - s\frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))v(x)\right|$$

$$= \left|\int_{u(x)}^{u(x)+sv(x)} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(x,\ell) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))\right] d\ell\right|$$

$$\leq s\|v\|_\infty \sup_{\ell\in[u(x),\,u(x)+sv(x)]} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\ell) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))\right|$$

On a donc par intégration

$$\frac{1}{s}\|f(x,u+sv)-f(x,u)-s\frac{\partial f}{\partial t}(x,u)v\|^p_{L^p(\Omega)}$$
$$\leq \|v\|^p_\infty \int_\Omega \sup_{\ell\in[u(x),u(x)+sv(x)]} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\ell)-\frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))\right|^p$$

$\longrightarrow 0$ par convergence dominée.

4ème Etape Conclusion.

La conclusion découle directement des étapes précédentes et du Théorème 2.

Nous laissons la variante suivante du Théorème 4 en exercice.

Théorème 4 bis i) Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, et f une fonction continue sur $\bar\Omega\times\mathbb{R}$. On suppose de plus que $\forall x\in\Omega$, $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe et est une fonction continue sur $\bar\Omega\times\mathbb{R}$. Alors T_f est de classe C^1 de $C^0(\bar\Omega)$ vers $C^0(\bar\Omega)$ et

$$dT_f(u)v(x)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,u(x))v(x).$$

ii) On suppose de plus que $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est höldérienne, d'ordre α, alors T_f est C^1 de $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ vers $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$.

iv Exemples

1) $f(x,t)=t^2$, $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=2t$ Ici $\alpha=1$

Donc l'application $u\longmapsto f(x,u)=u^2$ est différentiable de $L^p(\Omega)$ vers $L^q(\Omega)$, $\forall\ p\geq 2$, $q\leq \frac{p}{2}$. La différentielle est

$$dT_f(u)v=2uv,$$

De même $u\longmapsto u^2$ est différentiable de C^0 vers C^0, de C^k vers C^k, $\forall k\in\mathbb{N}$.

E 16

Considérons de m̂ pour $m > 1$

$$f(x,t) = |t|^{m-1} t$$

ici f ne dépend que de t $f(x,t) = f(t)$ et $f'(t) = m|t|^{m-1}$

Elle vérifie les hypothèses du théorème avec $\alpha = m$. L'application T_f $u \longrightarrow f(u) = |u|^{m-1} u$ est donc différentiable de classe C^1 de $L^p(\Omega)$ vers $L^{\frac{p}{m}}(\Omega)$, pour tout $p \geq m$. Sa dérivée est

$$dT_f(u)v = |u|^{m-1} u v .$$

Enfin soit h une fonction L^∞ sur Ω, mesurable. Si

$$f(x,t) = \underset{(1)}{h(x) + |t|^{m-1} t} \quad \text{ou} \quad \underset{(2)}{h(x)\,|t|^{m-1} t}$$

on vérifie de m̂ que les hypothèses sont vérifiées avec $\alpha = m$, et que T_f est continue de $L^p(\Omega)$ vers $L^{\frac{p}{m}}(\Omega)$, $\forall p \geq m$.

et :

$$dT_f(u)v = |u|^{m-1} u v \quad (1) \quad \text{ou} \quad dT_f(u)v = h(x)\,|u|^{m-1} u v \quad (2)$$

<u>Cas limites</u> $p = m$ T_f différentiable de classe C^1 de $L^m(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$

$p = \infty$ T_f " " C^1 de $L^\infty(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$

En fait si h C^0 T_f " " C^1 de $C^0(\Omega) \longrightarrow C^0(\Omega)$

si h $C^{0,\alpha}$ $C^{0,\alpha}(\Omega) \longrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$

<u>Lien avec les injections de Sobolev:</u>

$$H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega).$$

Donc si $m \leq 2^*$ T_f différentiable de classe C^1 $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2^*}{m}}(\Omega)$.