LE THÉORÈME D'INVERSION LOCALE ET QUELQUES APPLICATIONS

F 1

I) Introduction

Nous avons vu dans la première partie de ce cours, que de nombreux problèmes d'EDP linéaires pouvaient s'écrire sous la forme

$$(1) \qquad Lu = f$$

où L est une application linéaire continue entre deux espaces de Banach, X et Y, f est une donnée supposée connue, et u est l'application inconnue. Un exemple simple est le problème

$$-\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

$X = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$. La question se ramène alors à l'étude des propriétés de L. En particulier l'existence et l'unicité de solutions pour (1) est équivalente au fait que L est bijective.

Le but de cette partie est d'étendre partiellement, ce type d'idées à des problèmes non linéaires, du type

$$(2) \qquad B(u) = f$$

où B : X vers Y est une application de classe C^1 de X vers Y, qui n'est pas linéaire. Par exemple, le problème

$$(3) \quad \begin{cases} -\Delta u + \sin u = f & \text{ds } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

est de ce type, pour $X = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$. On remarque tout d'abord que si $f = 0$, alors $u = 0$ est une solution évidente de (3). Une première idée consiste alors à résoudre (3) pour des données f petites en "linéarisant" l'équation (3). Notons en effet que pour u petit

$$\sin u \simeq u$$

et donc $B(u) = -\Delta u + \sin u \simeq -\Delta u + u = L(u)$,

et on peut imaginer que si f est petite, une solution de (3) petite doit être proche, en un certain sens d'une solution de l'équation (1) qui est linéaire. C'est cette approche que le théorème d'inversion locale va nous permettre de mettre en oeuvre. Nous verrons également plus tard comment dans certaine situation cet outil permet de montrer que B est globalement surjective.

I Premières définitions

Soient X et Y deux espaces de Banach. On dit qu'une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ telle que

$$(1) \quad \begin{cases} B \circ A = Id_X \\ A \circ B = Id_Y \end{cases}$$

L'application B si elle existe est unique. On notera $B = A^{-1}$.

et

$$Inv(X, Y) = \{ A \in \mathcal{L}(X, Y),\ A \text{ inversible} \}.$$

Remarque : rappelons qu'il est nécessaire d'avoir les deux identités dans (1). On peut par exemple prendre $X = Y = \ell^2(\mathbb{N})$

$$A : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow A(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{où } \begin{cases} v_n = u_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

$$B : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow B(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

On voit que $B \circ A = Id_X$, mais A n'est pas inversible !

En principe, au vu des définitions précédentes, il convient de vérifier que :

a) A est bijective. Alors A^{-1} existe au sens de la théorie des des ensembles.

b) A^{-1} est une application linéaire continue.

En fait, en vertu du résultat profond suivant, la deuxième étape b) est immédiatement réalisée lorsque l'étape a) l'est.

<u>THÉORÈME 1</u> (Banach). Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est bijective, alors $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, i.e est linéaire continue. En particulier

$$A \in \mathrm{Inv}(X, Y).$$

Pour une preuve, voir exemple H. Brezis, Analyse Fonctionnelle p. 18.

Dans une direction différente, le résultat suivant, bien que plus élémentaire joue également un rôle important.

<u>THÉORÈME 2</u> i) Soit $A \in \mathrm{Inv}(X, Y)$. Alors pour tout $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ vérifiant

$$(2) \qquad \|T - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

T est inversible.

ii) $\mathrm{Inv}(X, Y)$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{L}(X, Y)$.

iii) L'application $J : \mathrm{Inv}(X, Y) \to L(X, Y)$ définie par

$$J(A) = A^{-1}$$

est de classe C^∞.

<u>Preuve</u> i) Considérons d'abord le cas $X = Y$, et $A = Id_X$.

Pour $T \in \mathcal{L}(X)$, écrivons

$$Id - T = B$$

de sorte que $T = Id - B$

dans ce contexte, l'hypothèse (2) devient alors

$$\|B\| < 1$$

Posons alors
$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} B^n$$

Comme $\|B\| < 1$, la somme est normalement convergente. De plus on vérifie que

$$U(Id - B) = (Id - B)U = Id.$$

On a donc
$$U = (Id - B)^{-1} = T^{-1},$$

et la propriété est vérifiée dans le cas considéré.

Dans le cas général, on se ramène au cas précédent en posant

$$\begin{aligned} B &= A - T \\ &= A^{-1}(Id_X - A^{-1}T) \end{aligned}$$

Si $\|A - T\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ alors

$$\|Id_X - A^{-1}T\|_{\mathcal{L}(X)} < 1,$$

et donc $Id_X - A^{-1}T$ est inversible d'après la première étape. La conclusion en découle.

ii) et iii) Exercice.

<u>Exercice 1</u> Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|T^k\| < 1,$$

alors T est inversible.

Considérons maintenant U un ouvert de X, V un ouvert de Y et F une application continue de U vers V.

F 5

Définition 1. On dit que F est un homéomorphisme de U vers V si il existe G continue de V vers U telle que

$$(3)\quad \begin{cases} G(F(u)) = u, & \forall u \in U \\ F(G(v)) = v, & \forall v \in V \end{cases}$$

On note alors $F \in \mathrm{Hom}(U, V)$.

Définition 2. Soit $F \in C(U, Y)$, on dit que F est localement inversible en un point $u_* \in X$ si $\exists U_*$ ouvert de X contenant u_*, V_* ouvert de Y contenant $v_* = F(u_*)$ et tels que

$$F \in \mathrm{Hom}(U_*, V_*)$$

i.e $\exists G \in C^0(V_*, U_*)$ tel que

$$G \circ F = Id_U, \quad F \circ G = Id_V$$

L'application G est appelée "l'inverse local de F". On note $G = F^{-1}$ [il y a là un abus de langage et de notation, car la définition de G dépend de U et V, et il n'y a pas unicité.]

Remarquons que si F est différentiable en u_*, et G différentiable en $v_* = F(u_*)$, on obtient en différentiant

$$\begin{cases} dG(v_*) \circ dF(u_*) = Id_X \\ dF(u_*) \circ dG(v_*) = Id_Y \end{cases}$$

de sorte que $dF(u_*) \in Inv(X, Y)$, $dG(v_*) \in Inv(X, Y)$ et

$$dF(u_*)^{-1} = dG(v_*).$$

Une condition nécessaire pour que F soit localement inversible est donc, lorsque F est différentiable en u_* $dF(u_*) \in Inv(X, Y)$.

Si de plus F est C^1 dans un voisinage de u_*, ceci est également une condition suffisante en vertu du théorème d'inversion locale, dont voici un énoncé.

II LE THÉORÈME D'INVERSION LOCALE

Théorème 3 : Soit $F \in C^1(X,Y)$. On suppose que, pour $u_* \in X$

(1) $\quad dF(u_*) \in \mathrm{Inv}(X,Y)$.

Alors F est localement inversible en u_*, d'inverse C^1. Plus précisément, il existe un voisinage U_* de u_*, un voisinage V_* de $v_* = F(u_*)$ tels que U_* et V_* sont ouverts et

(i) $\quad F \in \mathrm{Hom}(U_*, V_*)$

(ii) $\quad F^{-1} \in C^1(V_*, X)$, et pour tout $v \in V_*$

$$dF^{-1}(v) = [dF(u)]^{-1}, \quad u = F^{-1}(v)$$

(iii) Si $F \in C^k(X,Y)$ alors $F^{-1} \in C^k(V_*, X)$.

La preuve du Théorème 3 repose sur le théorème de point fixe de Picard, que nous rappelons brièvement.

Théorème 4. Soit K un espace métrique complet, et Φ une application de K dans K. On suppose Φ contractante, ie qu'il existe $0 < k_0 < 1$ tel que $\forall x, y$ dans K

(2) $\quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq k_0 \|x - y\|$.

Alors Φ possède un unique point fixe x_0, ie $\exists! x_0 \in K$ t.q

$$\Phi(x_0) = x_0$$

Preuve du Théorème 4

A) Existence de x_0. Soit u_0 un point quelconque de X. On construit par récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$u_{n+1} = \Phi(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrons que cette suite est de Cauchy dans X. On a, $\forall n \geq 1$

$$\|u_{n+1} - u_n\| = \Phi(u_n) - \Phi(u_{n-1})$$

et donc

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq k_0 \|u_n - u_{n-1}\| .$$

En itérant, il en résulte que $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$

$$\|u_{n+\ell} - u_{n+\ell-1}\| \leq k_0^{\ell} \|u_n - u_{n-1}\|$$

En sommant ces relations on obtient

$$\|u_{n+\ell} - u_n\| \leq \left(\sum_{p=1}^{\ell} k_0^p\right) \|u_n - u_{n-1}\|$$

$$\leq k_0^{n-1} \|u_0 - u_1\| \left(\sum_{p=1}^{\ell} k_0^p\right)$$

$$\leq \frac{k_0^{n-1}}{1-k_0} \|u_0 - u_1\| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \to +\infty$$

La suite étant de Cauchy, elle possède une limite x_0.

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \Phi(u_n)$

on obtient $x_0 = \Phi(x_0)$.

<u>B) Unicité</u>. Supposons qu'il existe deux points fixes distincts x_0 et x_1. Alors

$$\|x_0 - x_1\| = \|\Phi(x_0) - \Phi(x_1)\| \leq k_0 \|x_0 - x_1\| < \|x_0 - x_1\|$$

Contradiction.

<u>Preuve du Théorème 3</u>. Quitte à translater les origines de X et Y, on peut toujours supposer, pour simplifier les notations

$$u_* = 0 \qquad v_* = F(0) = 0 .$$

La preuve comporte plusieurs étapes.

<u>1ère Etape</u>. On se ramène au cas $X = Y$, $dF(0) = Id_X$

Si A est en effet une application linéaire de Y vers X inversible, i.e. $A \in Inv(Y, X)$, on peut considérer

$$\tilde{F} = A \circ F$$

F 8

on vérifie que $\tilde{F} \in C^1(X, X)$, et

$$d\tilde{F}(0) = A \circ dF(0).$$

En choisissant $A \in \mathcal{L}(Y, X)$ défini par

$$(3) \qquad A = [dF(0)]^{-1}$$

On obtient

$$d\tilde{F}(0) = Id_X .$$

Il suffira donc de vérifier la propriété pour $\tilde{F}$.

<u>$2^{ème}$ Etape</u> $\tilde{F}$ est un homéomorphisme local.

Ecrivons

$$\tilde{F} = Id_X + \psi$$

où $\psi \in C^1(X, X)$. Comme $d\tilde{F}(0) = Id_X$, il en résulte

$$d\psi(0) = 0 \quad , \psi(0) = 0 .$$

Par continuité de $d\psi$, il existe $r > 0$, tel que

$$\| d\psi(p) \| \leq \frac{1}{2} \quad , \forall \; p \text{ t.q } \|p\| < r .$$

Par le théorème des accroissement finis, on en déduit donc que, $\forall$ p, q dans $\overline{B(r)}$

$$(4) \qquad \| \psi(p) - \psi(q) \| \leq \frac{1}{2} \|p - q\| .$$

De plus comme $\psi(0) = 0$, on a

$$(5) \qquad \| \psi(p) \| \leq \frac{1}{2} \|p\| \quad , \forall \; p \in B(r) .$$

donc $\psi : \overline{B(r)} \longrightarrow \overline{B}(\frac{r}{2})$.

Pour $v \in X$ posons

$$\Phi_v(p) = v - \psi(p) \quad , \forall p \in \overline{B(r)}$$

Si $\|v\| \leq \frac{1}{2} r$, il résulte de (5) que

$$\| \Phi_v(p) \| \leq \|v\| + \| \psi(p) \| \leq r ,$$

et donc $\Phi_v : \overline{B(r)} \longrightarrow \overline{B(r)}$. Par ailleurs, par (4), Φ_v est contractante de rapport $\frac{1}{2}$. On peut donc appliquer le Théorème 3 à $\overline{B(r)}$ et Φ_v, pour conclure qu'il existe un unique point fixe

$u \in \overline{B(r)}$ de Φ_v, i.e $\exists! u \in \overline{B(r)}$ t.q

$$u = \Phi_v(u) = v - \psi(u)$$

i.e

$$\tilde{F}(u) = u + \psi(u) = v.$$

Par conséquent, on peut définir un inverse $\tilde{F}^{-1} : B(\frac{r}{2}) \to B(r)$

• Montrons que $\tilde{F}^{-1}$ est continu. Soit v, z dans $B(\frac{r}{2})$, $u = \tilde{F}^{-1}(v)$, $w = \tilde{F}^{-1}(z)$, de sorte que

$$u + \psi(u) = v, \quad w + \psi(w) = z.$$

On a

$$\|u - w\| \leq \|v - z\| + \|\psi(u) - \psi(w)\| \leq \|v - z\| + \frac{1}{2}\|u - w\|$$

et donc

$$\|\tilde{F}^{-1}(v) - \tilde{F}^{-1}(z)\| \leq 2\|v - z\|.$$

Ceci montre que $\tilde{F}^{-1}$ est Lipschitzienne de constante 2. Si on pose $V = B(\frac{r}{2})$, $U = B(r) \cap \tilde{F}^{-1}(V)$, on obtient donc

$$\tilde{F}_{|U} \in \mathrm{Hom}(U, V).$$

3ème Etape $\tilde{F}^{-1}$ est de classe C^1. De l'égalité,

$$u + \psi(u) = v$$

on déduit

$$\tilde{F}^{-1}(v) = v - \psi(\tilde{F}^{-1}(v)).$$

Comme $\psi(u) = o(\|u\|)$, et comme $\tilde{F}^{-1}$ est Lipschitz, on en déduit que

$$\tilde{F}^{-1}(v) = v + o(\|v\|),$$

i.e $\tilde{F}^{-1}$ est différentiable en zéro et

$$d\tilde{F}^{-1}(0) = I_{d_X}.$$

Pour un point quelconque $v \in B(\frac{r}{2})$, on raisonne de même, on en déduit:

$$d\tilde{F}^{-1}(v) = [d\tilde{F}(u)]^{-1}, \quad u = \tilde{F}^{-1}(v)$$

4ème Etape : preuve de iii) Par dérivation et induction

III QUELQUES APPLICATIONS DU THÉORÈME D'INVERSION LOCALE AUX EDP ELLIPTIQUES NON LINÉAIRES.

III.1 Premier exemple.

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. Reprenons l'exemple de l'introduction. Pour f donnée dans L^2, on cherche u solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + \sin u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Cette équation est bien entendu non linéaire, en raison du terme $\sin u$. La première question qu'il faut se poser est de savoir dans quel espace chercher la solution. Au vu de l'opérateur linéarisé $-\Delta u + u$ en zéro, et comme $f \in L^2$ oblige à prendre $Y = L^2(\Omega)$, il est naturel d'imposer

$$X = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega).$$

On vérifie alors que l'application $F : X \to Y$, définie par

$$F(u) = -\Delta u + \sin u$$

est de classe C^1 de X vers Y, et

$$(1) \qquad dF(u)\,v = -\Delta v + (\cos u)\,v$$

Preuve de (1) : On peut écrire

$$F(u) = Au + N(u),$$

où A est linéaire, $Au = -\Delta u$ et $N(u)$ désigne la partie non linéaire $N(u) = \sin u$. Comme A est linéaire continue de X vers Y, on a

$$dA(u)\,v = Av = -\Delta v.$$

Pour N on constate que l'on peut écrire

$$N = T_f \circ i,$$

où $i : H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ désigne l'injection et $f = \sin t$, i.e

$T_f : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, $u \longmapsto T_f u \equiv \sin u$. Comme

$$f'(t) = \cos t \quad , \; |f'(t)| \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

on déduit des résultats du chapitre E, que T_f est différentiable de $L^2(\Omega)$ vers $L^2(\Omega)$ et

$$d T_f(u) v = \cos u \, v .$$

On obtient donc de même

$$d N(u) v = \cos u \, v, \qquad \forall u \in X, \; \forall v \in X$$

et (1) en découle.

On a en particulier

$$d F(0) v = -\Delta v + v \equiv L v$$

On sait que l'opérateur Lv est un isomorphisme de X sur Y, on peut donc appliquer le Théorème 3 pour conclure :

<u>Proposition III.1</u> Il existe $\delta > 0$, et $\alpha > 0$ tel que si $f \in L^2(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta ,$$

Alors, il existe un unique $u \in H^2 \cap H^1_0(\Omega)$, tel que

$$\begin{cases} \|u\|_{H^2} \leq \alpha \\ -\Delta u + \sin u = f \text{ dans } \Omega \\ \qquad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

<u>Preuve</u> : On sait qu'il existe un voisinage U_* de zéro dans X et V_* de zéro dans Y tel que $F_{|U_*} \in \mathrm{Hom}(U_*, V_*)$.

En particulier, il existe $\delta > 0$ t.q

$$B_Y(\delta) \equiv \{ f \in L^2(\Omega) , \|f\|_{L^2} \leq \delta \} \subset V_*$$

et il existe α t.q $F^{-1}(\{ f \in L^2(\Omega), \|f\|_{L^2} \leq \delta \} \subset B_X(\alpha)$.

III.2 Deuxième exemple

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Pour f donnée (par exemple $f \in C^0(\bar{\Omega})$) on cherche u solution de

$$\begin{cases} -\Delta u - u^3 = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

Cette équation non linéaire a un sens dès que l'on sait définir u^3 comme fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$, et donc supposer $u \in L^3_{loc}(\Omega)$.
La non-linéarité u^3 apparaît ici plus délicate à traiter, car si on prend comme précédemment $X = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$ il faudra avoir $u \in L^6(\Omega)$. Or

$$H^2 \hookrightarrow L^6(\Omega)$$

uniquement si N est petit. Pour obtenir des injections convenables, on change donc légèrement de point de vue, et on prend

$$X_p = W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$$
$$Y_p = L^p(\Omega),$$

où $p \geq 2$ est à déterminer en fonction des injections de Sobolev.
On a

Lemme III.1 On a pour tout $p \geq p_0$

$$X = W^{2,p} \cap W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^{3p}(\Omega)$$

pour $p_0 = \dfrac{N}{3}$, si $N > 3$, et $p_0 = 2$, pour $N \leq 3$

Preuve : On a par injection de Sobolev

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega) \quad , \forall q \leq p^* = \frac{Np}{N-p}$$

et

$$W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) , \forall r \leq q^* = \frac{Nq}{N-p}$$

i.e

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \ \forall\ r \leq r^* = \frac{Np^*}{N-p^*} = \frac{Np}{N-2p}$$

[de manière générale, on a l'injection
$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-kp}}(\Omega) \ ]$$

On a donc $3p \leq r^*$ dès que
$$3p \leq \frac{Np}{N-2p},$$
i.e
$$3N - 6p \leq N,$$
soit
$$p \geq \frac{N}{3}.$$

Pour $p \geq p_0$, considérons donc l'application
$$F : X_p \to Y_p$$
définie par
$$F(u) = -\Delta u - u^3 = Au + N(u)$$
où $A = -\Delta$ est linéaire et $N(u) = -u^3$ est la partie non linéaire. On vérifie que A est linéaire continue, et donc
$$dA(u)v = Av.$$
Soit i l'injection de X_p dans $L^{3p}(\Omega)$. On a

$$N(u) = T_f \circ i,$$
où
$$T_f : L^{3p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \equiv Y_p,$$
définie par $f(t) = -t^3$, i.e
$$T_f\, u = -u^3, \quad \forall u \in L^{3p}(\Omega)$$

Comme $f'(t) = -3t^2$, T_f de classe C^1 et

$$dT_f(u)v = -3u^2 v, \quad \forall u, v \text{ dans } L^{3p}.$$

par composition on obtient donc,

Lemme III. 2 L'application F est de classe C^1 de X_p vers Y_p, $\forall p \geq p_0$, et

$$dF(u)\,v = -\Delta v \quad - 3u^2 v$$

En particulier

$$dF(0)v = -\Delta v \; .$$

Par la théorie elliptique, on sait que $dF(0)$ est un isomorphisme de X_p sur Y_p. On en déduit donc, comme précédemment :

Proposition III. 2 Soit $p \geq p_0$. Il existe $\delta_p > 0$, $\alpha_p > 0$ tel que si $f \in L^p(\Omega)$ avec $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \delta_p$, alors $\exists !\, u \in X_p$ tel que

$$-\Delta u - u^3 = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq \alpha_p .$$

III. 3 Autre exemple.

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour f donnée, on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u - u^3 = \lambda u + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

Ce problème est bien entendu assez semblable au précédent. Pour $p \geq p_0$, considérons donc F_λ définie de X_p vers Y_p par

$$F_\lambda(u) = -\Delta u - u^3 - \lambda u$$

D'après ce qui précède, on voit que $F_\lambda \in C^1(X, Y)$ et que

$$dF_\lambda(u)v = -\Delta v - \lambda v - 3u^2 v, \quad \forall u \in X_p, \forall v \in X_p$$

en particulier pour $u=0$

$$dF_\lambda(0)v = -\Delta v - \lambda v.$$

Pour pouvoir utiliser le théorème d'inversion locale dans un voisinage de 0, il convient donc de s'intéresser aux propriétés de l'opérateur $L_\lambda(v) = -\Delta v - \lambda v$. On a

<u>Lemme III.3</u> Soit $\sigma_p = \{-\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'ensemble de valeurs propres de $-\Delta$ sur Ω avec données de Dirichlet au bord. Alors si $\lambda \notin \sigma_p$, L_λ est un isomorphisme de X_p vers Y_p $\forall p \geq p_0$.

On déduit alors comme précédemment de ce Lemme :

<u>Proposition III.3</u> On suppose $\lambda \notin \sigma_p$, et $p \geq p_0$. Alors il existe $\delta > 0$, $\alpha > 0$ (dépendant de λ et p) tels que si $\|f\|_{L^p} \leq \delta$ alors il existe un unique $u \in X_p$ t.q.

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^3 + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq \alpha.$$

<u>Preuve du Lemme III.3</u> On va utiliser le Théorème d'isomorphisme de Banach (Théorème 1). Pour établir que L_λ est un isomorphisme, il suffit de montrer que L_λ est bijectif ie

α) $\operatorname{Ker} L_\lambda = 0$

β) $\operatorname{Im} L_\lambda = Y_p$.

α) Soit $w \in \operatorname{Ker} L_\lambda$. On a par définition

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w & \text{ds } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

si $w \neq 0$, ceci impliquerait $\lambda \in \sigma_p$ contradiction.

β) $\operatorname{Im} L_\lambda = Y_p = L^p(\Omega)$

Il s'agit de montrer que $\forall f \in L^p(\Omega)$, il existe $u \in X_p$ tel que

(I) $-\Delta u - \lambda u = f$ dans Ω.

A cet effet, on invoque l'alternative de Fredholm. Soit

$T : Y \to X$ défini par $T_p = -\Delta_0^{-1}$, i.e $\forall f \in L^p(\Omega)$, Tf est

l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

Clairement, T_p est un opérateur linéaire continu. Soit i_p l'injection de X_p dans L^p, qui est compacte. En posant

$$\tilde{T} = i \circ T$$

on vérifie que $\tilde{T}$ est compact. (I) s'écrit alors

$$u = \tilde{T}(\lambda u + f)$$

i.e

$$(Id - \lambda\tilde{T})\, u = \tilde{T} f .$$

On peut alors appliquer l'alternative de Fredholm à $Id - \lambda\tilde{T}$ pour conclure :

$$\operatorname{Ker}(Id - \lambda\tilde{T}) = 0 \iff \operatorname{Im}\tilde{T} = L^p$$

Or $u \in \operatorname{Ker}(Id - \lambda\tilde{T}) \iff -\Delta u = \lambda u \iff u = 0$ ou $\lambda \in \sigma_p$.

D'où le résultat.

IV Méthode de continuation, résultats globaux.

Le théorème d'inversion locale peut servir également à démontrer des résultats de nature globale. On a en effet

Théorème 5 Soit X et Y deux espaces de Banach, et $F \in C^1(X,Y)$. On suppose de plus

(1) , $\forall u \in X$, $dF(u) \in \mathrm{Inv}(X,Y)$

Alors $F(X)$ est une partie OUVERTE de Y, non vide.

Preuve. Clairement $F(X)$ est non vide. Soit $y_0 \in F(X)$. Il existe donc $x_0 \in X$ tel que

$$F(x_0) = y_0$$

Grâce à l'hypothèse (1), on peut appliquer le Théorème d'Inversion locale en x_0. Il existe donc un voisinage U_0 de x_0, un voisinage ouvert V_0 de y_0 tel que $F_{|U_0} \in \mathrm{Hom}(U_0, V_0)$. En particulier, $V_0 \subset F(X)$. Donc $F(X)$ est ouvert.

En pratique, on utilise le corollaire suivant, qui est un des aspects de ce que l'on appelle la méthode de continuation.

~~Corollaire IV~~

Corollaire IV.1 Soit $F \in C^1(X,Y)$ vérifiant (1). On suppose de plus que

(2) $F(X)$ est fermé

Alors F est surjective, i.e. $F(X) = Y$

Preuve : Si F vérifie (2) et (1), $F(X)$ est ouverte, fermé, non vide. Donc

$$F(X) = Y.$$

Nous allons voir dans ce qui suit une application de cette méthode.

IV.2 Une application

Soit g une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

(1) $\quad g'(t) \geq 0 \quad , \forall t \in \mathbb{R}$,

Soit $I = [0,1]$. Pour $f \in C^0[0,1]$ on considère le problème : trouver $u \in C^2[0,1]$ tel que

$$\begin{cases} -u'' + g(u) = f \text{ sur } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On considère alors $X = \{v \in C^2[0,1] \,,\, v(0) = v(1) = 0\}$, $Y = C^0[0,1]$.

On a

<u>Lemme IV.1</u> L'application F de X vers Y définie par

$$F(u) = -u'' + g(u)$$

est de classe C^1. De plus

$$dF(u)(v) = -v'' + g'(u)v \quad \forall u \in X, \forall v \in X \,.$$

Nous laissons la preuve de ce Lemme en exercice.

<u>Lemme IV.2</u> $\forall u \in X \quad , \quad dF(u) \in \mathrm{Inv}(X,Y)$

Preuve : On raisonne comme dans la preuve du Lemme III 3

Il suffit, grâce à l'alternative de Fredholm, de montrer que

$$\mathrm{Ker}\, dF(u) = \{0\} \quad , \forall u \in X \,.$$

Or $w \in \mathrm{Ker}\, dF(u)$ si et seulement si

$$\begin{cases} -w'' + g'(u)w = 0 \\ w(0) = w(1) = 0 \,. \end{cases}$$

En multipliant par w et en intégrant sur $[0,1]$ on trouve

$$\int_0^1 |w'|^2 + g'(u)w^2 = 0$$

Comme $g' \geq 0$ on en déduit

$$\int_0^1 (w')^2 = 0 \quad \text{et donc } w = 0 \,.$$

Lemme IV. 3 $F(X)$ est fermé dans Y.

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $F(X)$ telle que $f_n \to f$ dans Y. Il s'agit de montrer que f appartient à $F(X)$, c'est à dire qu'il existe $u \in X$ tel que $f = F(u)$.

Comme $f_n \in F(X)$, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe au moins un élément $u_n \in X$ tel que

$$f_n = F(u_n) \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

Nous allons montrer que pour une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{\sigma(n)}$ converge, dans Y vers un élément u. Par continuité de la fonction F, on a alors

$$(2) \quad u_{\sigma(n)} \to u \text{ ds } X \implies f = F(u)$$

ce qui terminera la preuve. Pour établir la compacité de (u_n), nous décomposons l'argument en trois étapes.

1ère Etape : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1_0(0,1)$.

Preuve : On a pour tout n $f_n = F(u_n)$, c'est à dire

$$\begin{cases} -u_n'' + g(u_n) = f_n \\ u_n(0) = u_n(1) = 0 \end{cases}$$

Multiplions l'équation par u_n. Il vient, en intégrant par parties

$$(3) \quad \int_0^1 |\dot{u}_n|^2 + g(u_n)u_n = \int_0^1 f_n u_n \leq \|f_n\|_{L^2} \|u_n\|_{L^2}$$

Par l'hypothèse (1), il existe une constante $\mu > 0$ t.q

$$g(t)t \geq -\mu|t| \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

de sorte que (3) donne

$$\int |\dot{u}_n|^2 \leq \left(\|f_n\|_{L^2} + \mu\right) \|u_n\|_{L^2}$$

et la conclusion découle du fait que $\|f_n\|_{L^2}$ est bornée.

2ème Etape : Pour une s-suite $u_{\sigma(n)} \to u$ dans $C^0[0,1]$

Il s'agit d'une conséquence immédiate de l'injection

$$H_0^1[0,1] \hookrightarrow C^0[0,1] .$$

ici $u \in C^0[0,1]$

3ème Etape $g(u_{\sigma(n)}) \to g(u)$ dans $C^0[0,1]$.

immédiat.

4ème Etape $u_{\sigma(n)} \to u$ dans $C^2[0,1]$ et $-u'' + g(u) = f$

ie $f \in F(X)$

En effet on a

$$-u''_{\sigma(n)} = f_n - g(u_{\sigma(n)})$$

Comme $f_n - g(u_{\sigma(n)}) \to f - g(u)$ dans $C^0[0,1]$, on peut passer à la limite dans l'équation.

(2) est donc établi.

Il résulte de l'étude précédente que $F(X) = Y$, ie

$\forall f \in C^0[0,1]$ l'équation

$$\begin{cases} -u'' + g(u) = f & \text{sur } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 , \end{cases}$$

possède une solution de classe C^2.

Exercice Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $g' \geq 0$. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 1$, $C > 0$, tq

$$|g'(t)| \leq C(1 + |t|^{\alpha - 1})$$

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. On suppose $\alpha + 1 \leq 2^*$

a) Montrer que l'application $F : H_0^1 \hookrightarrow H^{-1}$ définie par

$$F(u) = -\Delta u + g(u)$$

est C^1

F
21

b) Montrer que $\forall u \in H^1_0$ $dF(u) \in \mathrm{Inv}(H^1_0, H^{-1})$

c) Montrer que $F(H^1_0)$ est fermé

d) Conclure.

V LE THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

Dans le troisième exemple de la partie III, nous avons vu un problème dépendant d'un paramètre λ. Le théorème d'inversion locale nous avait fourni l'existence d'une solution (proche de 0) pour un ensemble ouvert de choix du paramètre. Le théorème des fonctions implicites va nous permettre de préciser la dépendance de la solution en fonction du paramètre.

De manière générale, on considère une application

$$F : \Lambda \times U \longrightarrow Y$$

où Λ est un ouvert de T espace de Banach
U " " X " " ,
Y est un espace de Banach

$$F : (\lambda, u) \longmapsto F(\lambda, u) .$$

On supposera dans toute la suite que F est de classe C^1. Pour $(\lambda_*, u_*) \in \Lambda \times U$ on note $F_u(\lambda_*, u_*)$ la dérivée partielle par rapport à u, i.e. $F_u(\lambda_*, u_*) \in \mathcal{L}(X, Y)$ et

$$F_u(\lambda_*, u_*)v = dF(\lambda_*, u_*)(0, v) \quad , \forall v \in X$$

de même

$$F_\lambda(\lambda_*, u_*)\mu = dF(\lambda_*, u_*)(\mu, 0) \quad , \forall \mu \in T$$

$$(F_\lambda \in \mathcal{L}(T, Y))$$

On s'intéresse à l'équation

$$F(\lambda, u) = 0 .$$

Le théorème des fonctions implicites décrit l'ensemble des solutions au voisinage d'une solution particulière. On a

<u>Théorème 5</u> (fcts implicites). On suppose que $F \in C^k(\Lambda \times \mathcal{U}, Y)$. Soit $(\lambda_*, u_*) \in \Lambda \times \mathcal{U}$ tel que

$$F(\lambda_*, u_*) = 0$$

et

$$F_u(\lambda_*, u_*) \in \mathrm{Inv}(X, Y).$$

Alors il existe un voisinage $\mathcal{O}_*$ de λ_* dans Λ
" " " $\mathcal{U}_*$ de u_* dans $\mathcal{U}$
et une application $g \in C^k(\mathcal{O}_*, X)$ tels que

i) $F(\lambda, g(\lambda)) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathcal{O}_*$

ii) $F(\lambda, u) = 0, (\lambda, u) \in \mathcal{O}_* \times \mathcal{U}_*$ implique $u = g(\lambda)$

iii) $g'(\lambda) = [F_u(p)]^{-1} \circ F_\lambda(p)$ où $p = (\lambda, g(\lambda))$, $\lambda \in \mathcal{O}_*$

<u>Preuve</u> : On considère l'application ψ définie de $\Lambda \times \mathcal{U}$ vers $\Lambda \times Y$ par

$$\psi(\lambda, u) = (\lambda, F(\lambda, u)).$$

ψ est clairement de classe C^k et on a

$$d\psi(\lambda, u)(\xi, w) = (\xi, dF(\lambda, u)(\xi, w))$$
$$= (\xi, F_\lambda(\lambda, u)\xi + F_u(\lambda, u)w).$$

En (λ_*, u_*) on sait que $F_u(\lambda_*, u_*)$ est inversible. Ceci implique que $d\psi(\lambda_*, u_*)$ l'est. En effet soit ξ, $(\eta, v) \in T \times Y$. On doit résoudre

$$d\psi(\lambda_*, u_*)(\xi, w) = (\eta, v)$$

c'est à dire le système

$$\begin{cases} \xi = \eta \\ A\xi + Bw = v, \end{cases}$$

où $A = F_\lambda(\lambda_*, u_*) \in \mathcal{L}(T, Y)$, $B = F_u(\lambda_*, u_*) \in \mathrm{Inv}(X, Y)$.

On a donc

$$A\eta + Bw = v \iff Bw = v - A\eta$$

et donc
$$w = B^{-1}(v - Az)$$
On a donc prouvé que
$$\boxed{d\psi(\lambda_*, u_*) \in \mathrm{Inv}(T \times X, T \times Y)}$$

On applique maintenant le théorème d'inversion locale en (λ_*, u_*) à ψ. Celle-ci a donc un inverse local Φ défini sur un voisinage $\Theta_* \times V$ de $(\lambda_*, F(\lambda_*, u_*)) = (\lambda_*, 0)$. Au vu de la definition de ψ la première composante de Φ c'est l'identite
$$\Phi : (\Theta_* \times V) \longrightarrow (\Theta_* \times U_*) \quad , U_* \text{ voisinage de } u_*$$
$$\Phi(\lambda, y) = (\lambda, \varphi(\lambda, y)).$$

Ici φ désigne une application $\Theta^* \times V \to X$, de classe C^k verifiant
$$F(\lambda, \varphi(\lambda, y)) = y$$

En différentiant la relation, on trouve
$$\begin{cases} F_\lambda + F_u \circ \varphi_\lambda = 0 \\ F_u \circ \varphi_\lambda = Id \end{cases}$$
et donc $\quad \varphi_\lambda = -[F_u]^{-1} F_\lambda \qquad \varphi_v = [F_u]^{-1}$

Posons alors
$$g(\lambda) = \varphi(\lambda, 0)$$
On obtient
$$F(\lambda, g(\lambda)) = 0 \quad , \forall \lambda \in \Theta_*$$
et les autres propriétés se démontrent aisement.

V.2 Exemple

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$; pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère l'équation

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^3 + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ici f est fixée, et λ considérée comme un paramètre. L'étude de cette équation a déjà été abordée. Pour $p \geq p_0 = \operatorname{Max}\left(\frac{N}{3}, 2\right)$ nous avions introduit les espaces

$$\begin{cases} X = X_p = W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \\ Y = Y_p = L^p(\Omega) \end{cases}$$

et l'espace des paramètres est ici

$$T = \mathbb{R}$$

Introduisons pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in X_p$

$$F(\lambda, u) = -\Delta u - \lambda u - u^3 - f$$

On vérifie de nouveau que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times X$, à valeurs dans Y et que $\forall (\lambda_*, u_*) \in \mathbb{R} \times X$

$$F_u(\lambda_*, u_*)\, v = -\Delta v - \lambda_* v - 3u_*^2 v \quad , \forall v \in X$$

$$F_\lambda(\lambda_*, u_*)\, \eta = -u_* \eta \qquad \forall \eta \in \mathbb{R}$$

L'équation (I) s'écrit donc

$$(1) \qquad F(\lambda, u) = 0 .$$

Soit alors (λ_*, u_*) une solution de (1), i.e

$$(2) \qquad F(\lambda_*, u_*) = 0 ,$$

telle que

$$(3) \qquad F_u(\lambda_*, u_*) \in \operatorname{Inv}(X, Y)$$

Le théorème d'inversion locale nous avait permis de faire varier f à λ fixé. Le théorème des fonctions implicites va nous permettre de faire varier λ à f fixé. Plus précisément il affirme qu'il existe $\alpha > 0$, une application

$$g : C^\infty(]\lambda^* - \alpha, \lambda^* + \alpha[) \longrightarrow X$$

tel que

$$F(\lambda, g(\lambda)) = 0$$

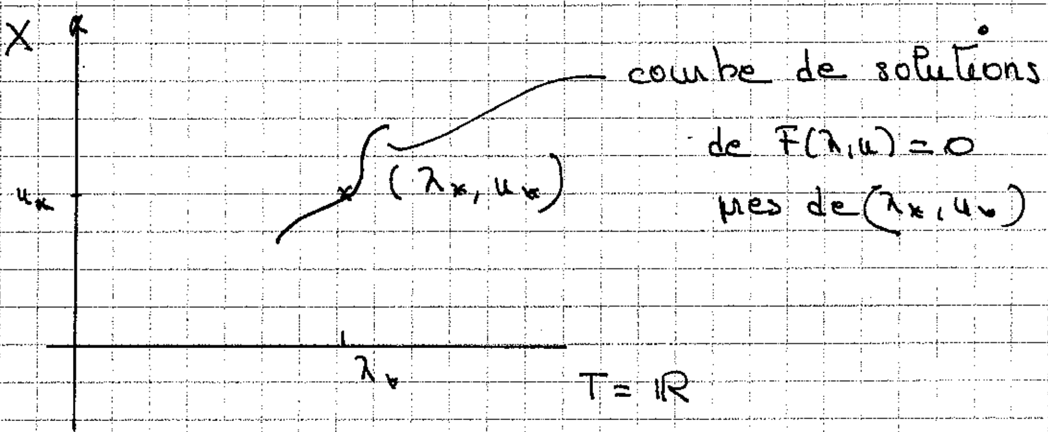
ie $u = g(\lambda)$ vérifie (I). De plus il existe $\varepsilon > 0$ t.q

$$\| u - u_* \|_X \leq \varepsilon$$

et u vérifie (I) entraîne

$$u = g(\lambda).$$

On obtient donc des courbes de solutions



Remarquons que si $f = 0$, alors

$$u = 0$$

est solution évidente de (I), $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. La courbe $\varphi : \lambda \to 0$ est donc une courbe de solution. Le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer que si

$$\lambda_* \notin \sigma_p(-\Delta_0)$$

alors près de $(\lambda_*, 0)$ la courbe g se confond avec φ.

V.3 Prolongement des courbes de solutions

De nouveau, nous considérons le cas $T=\mathbb{R}$, et

$F : \mathbb{R}\times X \to Y$ de classe C^1 au moins. Soit (λ_*, u_*) tels que

$$\begin{cases} F(\lambda_*, u_*) = 0 \\ F_u(\lambda_*, u_*) \in Inv(X, Y) \end{cases}$$

Nous avons vu que le théorème des fonctions implicites permettait de construire localement près de (λ_*, u_*) une courbe de solutions. En fait, on a le résultat suivant, de nature plus globale.

<u>Proposition 1</u>. Il existe un intervalle $I = I_{max} =]a_-, a_+[$ contenant λ_*, et une application g de classe C^1 de I_{max} vers X t.q.

$$\begin{cases} \forall \lambda \in I, & F(\lambda, g(\lambda)) = 0 \\ \forall & F_u(\lambda, g(\lambda)) \in Inv(X, Y) \end{cases}$$

si $\lambda \to a_\pm$ alors deux cas seulement peuvent se produire

α) g n'a pas de limite

β) si $g(\lambda) \to u_\pm$ alors forcément

$$F_u(a_\pm, u_\pm) \notin Inv(X, Y)$$

Nous laissons la démonstration en exercice.

Remarquons que, dans de nombreuses situations, des propriétés de compacité de (I) entraînent, dans le cas α, $\|g(\lambda)\|_X \to +\infty$.