

INTRODUCTION A LA THEORIE DES BIFURCATIONS

G
1

I INTRODUCTION

Soit X et Y deux espaces de Banach. De nouveau nous considérons une équation à un paramètre réel λ

$$(1) \quad F(\lambda, u) = 0,$$

où $F: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$. Lorsque F est de classe C^1 , nous avons étudié et décrit les solutions de (1) au voisinage d'une solution (λ_*, u_*) , et montré en particulier que si

$F_u(\lambda_*, u_*) \in \text{Inv}(X, Y)$, alors ces solutions étaient données par une courbe $\lambda \mapsto g(\lambda)$. Le but de la théorie des bifurcations est d'étudier les cas où la condition

$$F_u(\lambda_*, u_*) \in \text{Inv}(X, Y)$$

N'EST PAS VÉRIFIÉE ! Dans une telle situation, de nombreux cas de figures peuvent apparaître, et nous ne discuterons essentiellement que l'un d'entre eux, à savoir l'apparition d'une nouvelle "branche" de solutions (bifurcation à partir d'une branche connue).

Dans toute la suite, nous ferons les deux hypothèses suivantes sur F

$$(H_0.1) \quad F \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y).$$

(H_{0.2}) $F(\lambda, 0) = 0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, i.e. $u=0$ est toujours solution de (1).

La droite D du graphe $\mathbb{R} \times X$, définie par

$$D = \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

sera appelée la branche de solutions évidentes.

On considère également l'ensemble $S \subset \mathbb{R} \times X$

$$S = \{ (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X, u \neq 0, F(\lambda, u) = 0 \}$$

qui représente l'ensemble des solutions non-évidentes. Le but ici sera de décrire S au voisinage de D .

Afin de développer notre intuition du problème, commençons par décrire une situation simple où F est linéaire par rapport à u . Prenons par exemple $X = Y$, et

$$\tilde{F}(\lambda, u) = -Lu + \lambda u = -(\lambda \text{Id} - L)u.$$

où L est une application linéaire de X vers X , continue.

L'équation

$$\tilde{F}(\lambda, u) = 0$$

est donc équivalente à

$$u \in \text{Ker}(L - \lambda \text{Id}) =: K_\lambda.$$

ie

$$\tilde{S} = \{ (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X, \lambda \in \sigma_p(L), u \in \text{Ker}(L - \lambda \text{Id}) \setminus \{0\} \} = \bigcup_{\lambda \in \sigma_p} \{ \lambda \} \times (K_\lambda \setminus \{0\})$$

Si $\sigma_p(L) = \{ \lambda_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ on a alors le dessin

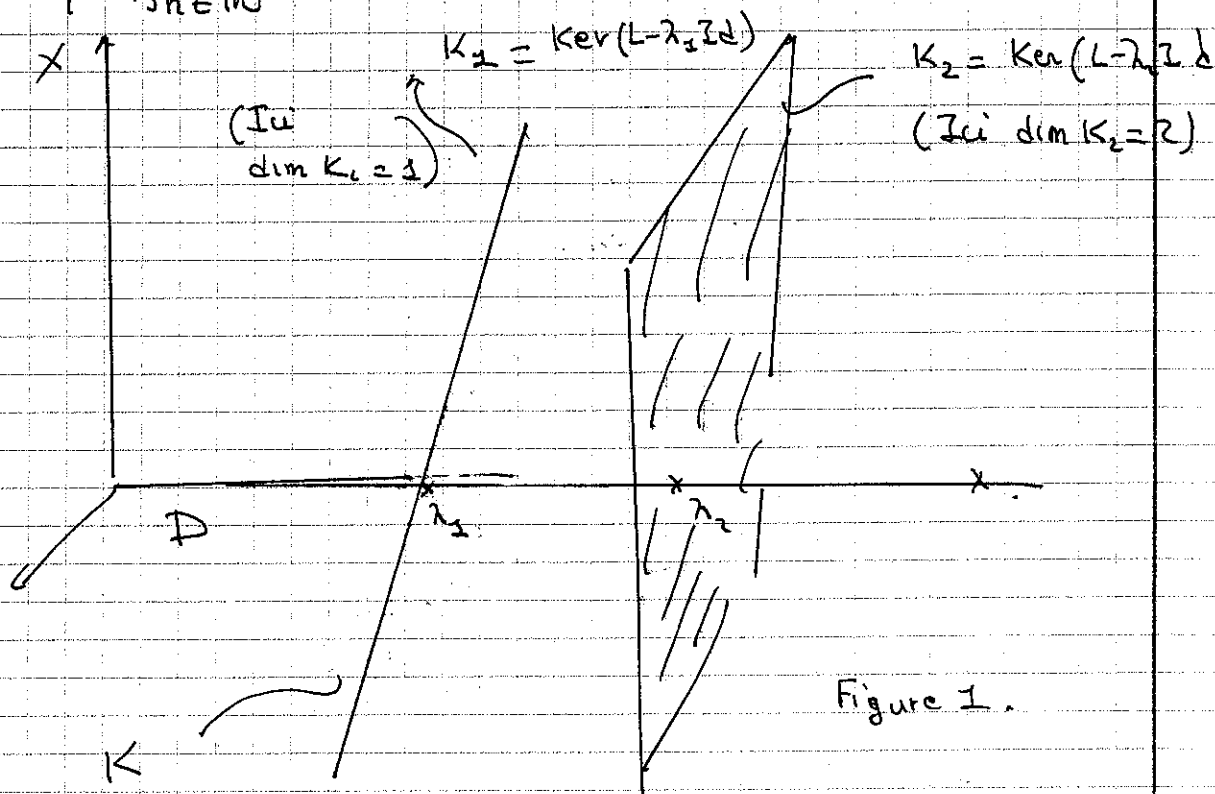


Figure 1.

Ainsi \tilde{S} est un réunion de sous-espaces affines (privés de leur intersection avec D) verticaux. La situation est donc entièrement comprise. Considérons maintenant la fonction F définie par

$$F(\lambda, u) = \tilde{F}(\lambda, u) + N(u),$$

où $N(u)$ est une fonction de classe C^2 sur X tel que $N(u) = O(\|u\|^2)$, mes de zero.

C'est donc une perturbation d'ordre inférieur. Toute la problématique revient donc à savoir comment ces termes perturbent l'affine de \tilde{S} . La réponse, nous le verrons dépend de la forme de N .

Revenons au cas général $F: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$, et introduisons de nouveau un peu de vocabulaire.

Définition 1 On dira que $(\lambda^*, 0)$ est un point de bifurcation pour F , (à partir de la branche de solutions évidentes), si il existe $(\lambda_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R} \times X$ tels que

$$F(\lambda_n, u_n) = 0 \quad u_n \neq 0, \\ (\lambda_n, u_n) \rightarrow (\lambda^*, 0) \quad n \rightarrow +\infty.$$

On a alors le résultat suivant, qui découle de l'analyse du chapitre 7.

Proposition I-1 : Une condition nécessaire pour que $(\lambda^*, 0)$ soit un point de bifurcation est que

$$F_u(\lambda^*, 0) \notin \text{Inv}(X, Y).$$

Preuve : c'est une conséquence du théorème des fonctions implicites. En effet, si $F_u(\lambda^*, 0) \in \text{Inv}(X, Y)$, il existerait $\alpha > 0$, une fonction $g:]\lambda^* - \alpha, \lambda^* + \alpha[\rightarrow Y$, de classe C^2 tel que

$$\|u\| \leq \alpha, \lambda \in]\lambda^* - \alpha, \lambda^* + \alpha[\text{ et } F(u, \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = g(\lambda)$$

Comme $u=0$ est solution, la fonction g est donc forcément identiquement nulle, i.e. $g=0$.

Ponc $u=0$ est la seule solution de $F(\lambda, u)$ au voisinage de $(\lambda^*, 0)$

Contradiction avec la définition d'un point de bifurcation.

Remarque 1) La réciproque n'est pas vraie en général, même en dimension finie. Voici un exemple : Prenons $X = Y = \mathbb{R}^2$, et écrivons en coordonnées $u = (x, y)$. Considérons la fonction $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(\lambda, u) = \tilde{F}(\lambda, u) + N(u)$$

où \tilde{F} désigne la partie linéaire par rapport à u , i.e. prenons

$$\tilde{F}(\lambda, u) = (\text{Id} - \lambda)u = u(1 - \lambda)$$

$$\text{et } N(u) = (y^3, -x^3), \quad \forall u = (x, y)$$

Clairément

$$F_u(\lambda, 0) = (1 - \lambda)\text{Id} = \tilde{F}(\lambda, 0), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

de sorte que pour $\lambda = 1$

$$F_u(1, 0) = 0 \notin \text{Inv}(X, X).$$

Étudions maintenant l'équation $F(\lambda, u) = 0$

$$F(\lambda, u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x = -y^3 \\ (1 - \lambda)y = x^3 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par y et la seconde par x , puis en soustrayant, on obtient

$$x^4 + y^4 = 0 \Rightarrow (x=y=0) \Rightarrow u=0.$$

$$\text{Ponc } F(\lambda, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

On en déduit

$$S = \emptyset.$$

et F n'a donc pas de point de bifurcation.

L'exemple précédent montre donc que les points de bifurcations de $F(\lambda, u)$ et de $F_u(\lambda, u)$ peuvent être très différents: la linéarisation par rapport à la deuxième variable ne suffit pas à décider localement près de $(\lambda^*, 0)$ la situation puisque $F_u(\lambda^*, 0) \notin \text{Inv}(X, Y)$.

Remarque 2: Lorsque $F_u(\lambda_*, u_*) \in \text{Inv}(X, Y)$ le théorème des fonctions implicites montre que l'ensemble des solutions de $F(\lambda, u) = 0$ est paramétré, au voisinage de (λ_*, u_*) par un voisinage $I \subset \mathbb{R}$ de λ_* . En revanche, tel n'est pas le cas dans le cas où $F_u(\lambda_*, u_*) \notin \text{Inv}(X, Y)$: puisque F est linéaire par rapport à u , nous avons vu que S était vertical. Un bon paramétrage de S autour d'un point de bifurcation est alors d'utiliser le noyau $\text{Ker } F(\lambda_*, 0)$ comme ensemble de paramètres. La technique dite de réduction de Liapounov-Schmidt va nous permettre d'utiliser la même idée pour des situations non-linéaires générales.

II REDUCTION DE LIAPOUNOV-SCHMIDT

Soit $F \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y)$ telle que

(1) $F(\lambda, 0) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

et soit $\lambda_* \in \mathbb{R}$ tel que

(2) $F_u(\lambda_*, 0) = 0$.

Le point $(\lambda_*, 0)$ est donc un candidat possible pour être un point de bifurcation. Posons

$L = F_u(\lambda_*, 0)$

de sorte que $K \in \mathcal{L}(X, Y)$, et par l'hypothèse (2),

$L \notin \text{Inv}(X, Y)$.

Introduisons alors les sous-espaces vectoriels V de X et R de Y définis par

$$\begin{cases} V = \text{Ker } L \subset X & (V \neq \{0\} \text{ par (1)}) \\ R = \text{Im } L \subset Y \end{cases}$$

G
6

Nous ferons par la suite les hypothèses suivantes sur L :

(H1) V possède un supplémentaire topologique W dans X

[Ceci signifie : $\exists W$ s.e.v fermé de X tel que

$$X = V \oplus W$$

i.e $\forall u \in X, \exists! (v, w) \in V \times W$, t.q $u = v + w$

et $V \cap W = \{0\}$].

(H2) $R = \text{Im } L$ est fermé dans Y et possède un supplémentaire topologique Z dans Y , i.e

$$Y = R \oplus Z.$$

Notons que les hypothèses (H1) et (H2) sont automatiquement vérifiées si X est de dimension finie. Nous travaillerons essentiellement dans la suite en dimension infinie avec des espaces de fonctions : c'est la théorie de Riesz-Fredholm qui nous permettra de vérifier (H1) et (H2).

Soit P et Q des projections sur Z et R respectivement, i.e

$$\forall v \in Y, v = Q(v) + P(v), \text{ avec } P(v) \in Z, Q(v) \in R$$

L'équation $F(\lambda, u) = 0$ est donc équivalente à

$$\begin{cases} PF(\lambda, u) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} QF(\lambda, u) = 0 & (4) \end{cases}$$

Par ailleurs, écrivons

$$F(\lambda, u) = Lu + \varphi(\lambda, u)$$

i.e

$$\varphi(\lambda, u) = F(\lambda, u) - L(u)$$

de sorte que

$$\varphi_u(\lambda_*, 0) = F_u(\lambda_*, 0) - L = 0.$$

Si $u \in X$, on peut décomposer par (H1)

$$u = v + w \quad v \in V, w \in W.$$

On a donc

$$F(\lambda, u) = F(\lambda, v + w) = Lw + \varphi(\lambda, v + w) \quad (\text{car } Lv = 0)$$

Comme $Lw \in \text{Im } L = R$, $Q(Lw) = Lw$, et l'équation (4)

s'écrit alors

$$\boxed{\underbrace{Lw}_{\in R} + \underbrace{Q\varphi(\lambda, v + w)}_{\in R} = 0} \quad (5)$$

Posons pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$, $w \in W$

$$\Phi(\lambda, v, w) = Lw + Q\varphi(\lambda, v + w) \in R$$

de sorte que $\Phi \in C^2(\mathbb{R} \times V \times W, R)$. L'équation (5) est donc une équation dans l'espace R

$$\boxed{\Phi(\lambda, v, w) = 0} \quad (5)$$

Nous allons voir que l'on peut "éliminer" la variable w de cette équation à l'aide du théorème de fonctions implicites. A cet effet nous allons montrer que $\Phi_{|W}(\lambda_*, 0, 0) \in \text{Inv}(W; R)$.

On a

$$\Phi_{|W}(\lambda_*, 0, 0)z = Lz + Q\varphi_u(\lambda_*, 0)z, \quad \forall z \in W$$

Comme $\varphi_u(\lambda_*, 0) = 0$, on voit donc

$$\Phi_{|W}(\lambda_*, 0, 0)z = Lz, \quad \forall z \in W$$

i.e

$$\boxed{\Phi_{|W}(\lambda_*, 0, 0) = L_{|W}}$$

où l'on identifie L et $j \circ L$, où j est l'injection $R \hookrightarrow Y$.

L'application $L|_W$ est donc une application de W dans R injective (car $\text{Ker } L|_W = W \cap \text{Ker } L = W \cap V = \{0\}$) et surjective (car $R = \text{Im } L$). En vertu du théorème de Banach, on a donc

$$L|_W \in \text{Inv}(W, R)$$

i.e

$$\Phi_W(\lambda^*, 0, 0) \in \text{Inv}(W, R).$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites à ϕ en $(\lambda_*, 0, 0)$ on en déduit donc :

- Il existe un voisinage I de λ_*

U de $v=0$ dans V

W de $w=0$ dans W

et une fonction $\gamma \in C^2(I \times U, W)$ tel que l'unique solution de (4) (ie (5))

$$QF(\lambda, v+w) = 0$$

dans $I \times U \times W$ est donnée par

$$(\lambda, v, \gamma(\lambda, v)) \quad \text{ie} \quad w = \gamma(\lambda, v)$$

En particulier

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma(\lambda, 0) = 0 \\ \gamma_v(\lambda_*, 0) = 0 \end{array} \right. \quad \dots$$

En effet par (5)

$$L(\gamma(\lambda, v)) + QF(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)) = 0, \quad \forall (\lambda, v) \in I \times U$$

En dérivant par rapport à v en $(\lambda_*, 0)$ et en posant

$\Gamma = \gamma_v(\lambda_*, 0)$, on trouve

$$L \Gamma x + QF_{vv}(\lambda_*, \gamma(\lambda_*, 0)) [x + \Gamma x] = 0, \quad \forall x \in V$$

Comme $\gamma(\lambda_*, 0) = 0$ et $QF_{vv}(\lambda_*, 0) = 0$, on obtient

$$L\bar{\Gamma}x = 0, \quad \forall x \in V$$

d'où on déduit $\bar{\Gamma} = 0$

G
9

Nous reportons maintenant $w = \gamma(\lambda, v)$ dans (3).

$$(7) \quad PF(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)) = 0 \quad \text{pour } (\lambda, v) \in I \times U$$

Commentaire : 1) Au voisinage de $(\lambda_*, 0)$, l'équation (7) est équivalente à $F(\lambda, u) = 0$, pour $u = v + w$, $w = \gamma(\lambda, v)$. La variable w a donc été éliminée.

2) (7) est une équation sur $I \times U$ ($\subset \mathbb{R} \times V$) à valeurs dans Z

Nous verrons, dans les applications que nous avons en vue, qu'il s'agit d'une équation en dimension finie.

II. 2 Un exemple

Considérons de nouveau le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^3 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ω domaine borné de \mathbb{R}^N . Ici

$$X = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), \quad Y = L^p(\Omega)$$

pour $p \geq p_0 = \max(\frac{N}{3}, 2)$ et

$$F(\lambda, u) = -\Delta u - \lambda u - u^3$$

On prend $\lambda_* = \lambda_i$, une valeur propre de $-\Delta_0^{-1}$, et on étudie la bifurcation à partir de la solution évidente $u = 0$, pour $F(\lambda, u) = 0$, près du point $(\lambda_i, 0)$. On a, comme nous l'avons déjà vu

$$F_u(\lambda_i, 0) = -\Delta u - \lambda_i u$$

de sorte que

$$L = F_u(\lambda_i, 0) = -\Delta u - \lambda_i u$$

et

$$V = \text{Ker } L = \{w \in X, -\Delta w = \lambda_i w\}$$

Dans le chapitre D nous avons vu qu'il existait une base orthonormée²
 $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$, telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n & \text{dans } \Omega \\ e_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous avons montré, par ailleurs, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \in C^0(\overline{\Omega})$. En
particulier $e_n \in X$, $\forall n$. Il en résulte alors que

$$V = \text{vect} \{ e_{i+k}, k=0, \dots, p-1 \}.$$

où p est la multiplicité de λ_i , i.e la dimension du sous-espace
nulle F_λ . Nous avons (cf Chapitre 2)

$$\dim V = p < +\infty$$

Bien que X ne soit pas un espace de Hilbert, le fait que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$
soit totale dans X , nous permettra de raisonner comme si
nous étions non H_0^1 . Posons

$$W = \left\{ w \in X, \int_{\Omega} w e_{i+k} = 0, k=0, \dots, p-1 \right\}$$

W est clairement un sous-espace vectoriel fermé de X (image
reciproque par une application linéaire continue de \mathbb{R}^p). En fait

$$W = V^{\perp_{L^2(\Omega)}} \cap X$$

où $V^{\perp_{L^2(\Omega)}}$ désigne l'orthogonal dans $L^2(\Omega)$ de V . Donc

$$W = \overline{\text{vect} \{ e_n, \lambda_n \neq \lambda_i \}}$$

Notons que $W \cap V = \{0\}$. Un bref raisonnement montre que

que

$$X = V \oplus W$$

W est donc un supplémentaire topologique de V dans X

On a par ailleurs

$$\text{Im } L = W,$$

ici dans les notations qui précèdent

$$R = W \quad (\text{et on peut donc prendre } Z = V)$$

En effet, montrons d'abord que

$$\text{Im } L \subset W.$$

Soit $f \in \text{Im } L$. Par définition, il existe $u \in X$ tel que

$$Lu - \lambda_i u = f$$

Multiplications cette équation par e_{i+k} , pour $k=0, \dots, p$ on trouve

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla e_{i+k} - \lambda_i \int_{\Omega} u e_{i+k} = \int_{\Omega} f \cdot e_{i+k}$$

$$\text{On a } \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla e_{i+k} = \lambda_i \int_{\Omega} u e_{i+k}.$$

Il en résulte que

$$\int_{\Omega} f e_{i+k} = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, p\}.$$

Réciproquement, on vérifie que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \neq \lambda_i \Rightarrow$

$$L(e_n) = (\lambda_n - \lambda_i) e_n$$

et donc

$$\overline{L(\text{vect}(e_n, \lambda_n \neq \lambda_i))} = \overline{\text{vect}(e_n, \lambda_n \neq \lambda_i)} = W$$

D'où la conclusion.

Now prenons par la suite, pour P la projection orthogonale L^2 sur V et pour Q la projection orthogonale L^2 sur W , à savoir

$$Pu = \sum_{k=0}^{p-1} \langle u, e_{i+k} \rangle_{L^2} e_{i+k} = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\int_{\Omega} u e_{i+k} \right) e_{i+k}$$

$$\text{et } Qu = u - \sum_{k=0}^{p-1} \langle u, e^{itk} \rangle e^{itk} = u - \sum_{k=0}^{p-1} \left(\int_{\Omega} u e^{itk} \right) e^{itk}$$

G
12

La cas où la multiplicité de λ_i est supérieure ou égale à 1 est délicat, en général, et dépasse le cadre que nous nous sommes fixés dans ce cours. Nous considérerons donc uniquement le cas où λ_i est de multiplicité 1, et donc

$$V = \mathbb{R}e_i, \quad Z = V = \mathbb{R}e_i$$

$$W = \text{Vect}^x \{e_n, n \neq i\} = \mathbb{R}$$

Pour tout $u \in X$, on peut donc écrire

$$u = te_i + w, \quad t \in \mathbb{R}, w \in W$$

Recevons alors les équations (3), (4) dans ce contexte, à savoir

$$\int_{\Omega} PF(\lambda, te_i + w) = 0 \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} QF(\lambda, te_i + w) = 0 \quad (4)$$

On a $F(\lambda, te_i + w) = (-\Delta w - \lambda_i w) + \mu(te_i + w) - (te_i + w)^3$
 où on a posé

$$\mu = \lambda - \lambda_i$$

On obtient

$$PF(\lambda, te_i + w) = \left\langle \mu(te_i + w) - (te_i + w)^3, e_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} e_i$$

c'est à dire que (3) devient ici

$$\mu t = \int_{\Omega} (te_i + w)^3 e_i \quad (8)$$

$$\text{car } \int_{\Omega} e_i^2 = 1, \quad \int_{\Omega} w e_i = 0$$

Passons à la deuxième relation, i.e (4)

$$QF(\lambda, te_i + w) = \dots Lw - \mu w - (te_i + w)^3 - \int_{\Omega} (te_i + w)^3 e_i$$

et donc (4) devient

$$Lw - \mu w = (te_i + w)^3 - \int_{\Omega} (te_i + w)^3 e_i \quad (8) \quad w \in W$$

Notons que l'équation (8) est une équation dans W , i.e les deux membres appartiennent à W . Posons pour $\mu \in \mathbb{R}$

$$U T_{\mu} w : Lw - \mu w$$

On vérifie que pour μ petit

$$T_{\mu} \in \text{Inv}(W, W)$$

et (8) s'écrit

$$w = T_{\mu}^{-1} \left[(te_i + w)^3 - \int_{\Omega} (te_i + w)^3 e_i \right] \quad (10)$$

La méthode de Liapounov - Schmidt nous permet d'éliminer la variable w . Par (10) et le théorème d'inversion locale on peut écrire pour t et μ petits

$$w = \gamma(\mu, t)$$

où γ est une fonction de $] -\alpha, \alpha[\times] -\delta, \delta[\rightarrow W$

de classe C^{∞} ($\alpha > 0, \delta > 0$). En reportant dans (8) on obtient une équation à deux variables réelles dans \mathbb{R}

$$\mu t - \int_{\Omega} (te_i + \gamma(\mu, t))^3 e_i = 0 \quad (11)$$

Nous allons voir dans le chapitre suivant comment traiter ce problème de dimension finie. C'est pourquoi nous quittons pour l'instant notre exemple, pour revenir à des situations plus générales.

III LE CAS $\dim \text{Ker } L = \text{codim Im } L = 1$

G

14

Comme nous l'avons mentionné, grâce à la réduction de Liapounov-Schmidt l'étude de la bifurcation près de $(\lambda_*, 0)$ se ramène à l'équation dans Z

$$(7) \quad PF(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)) = 0_Z \quad | \quad \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$$

où on cherche à résoudre (7) pour λ proche de λ_* , et v proche de 0_V . Dans les cas où $\dim V < +\infty$, $\dim R < +\infty$ il s'agit d'un problème de dimension finie. Néanmoins celui-ci est extrêmement délicat, car on ne peut le traiter (localement) par linéarisation, i.e. le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas à l'existence (ou non) d'une bifurcation, dépend donc des termes d'ordre supérieur (deux ou plus) en $\mu = \lambda - \lambda_*$ et v dans l'équation (7). On imagine alors facilement que la difficulté du problème croît avec la dimension de V et celle de R . Le cas le plus simple est donc celui où

$$(8) \quad \begin{cases} \dim V = 1 \\ \text{codim } R = \dim Z = 1 \end{cases}$$

c'est le cas que nous allons considérer dans toute la suite de ce paragraphe.

Comme R est supposé de codimension 1, il existe une forme linéaire $\mathcal{L} \in Y^* = \mathcal{L}(Y; \mathbb{R})$ telle que

$$R = \text{Ker } \mathcal{L} = \{ f \in Y, \mathcal{L}(f) = 0 \}$$

Par ailleurs, comme $\dim V = 1$, on peut écrire

$$\mathcal{L}|_V \cong \mathbb{R} \cong \{ t e, t \in \mathbb{R} \}$$

L'équation (7) s'écrit alors

$$\mathcal{L} F(\lambda, t_e + \gamma(\lambda, t_e)) = 0_{\mathbb{R}}$$

G
15

Il s'agit donc d'une équation à deux variables réelles

$\lambda \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$. Il est commode de se ramener en $(0, 0)$ en posant

$$\mu = \lambda - \lambda_x$$

et

$$\beta(\mu, t) = \mathcal{L}(F(\mu + \lambda_x, t_e + \gamma(\mu + \lambda_x, t_e)))$$

On cherche donc à décrire près de l'origine $(0, 0)$ de \mathbb{R}^2 les solutions de l'équation (à valeurs réelles)

$$(9) \quad \boxed{\beta(\mu, t) = 0} \quad \mu \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

où $\beta \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Comme nous l'avons déjà remarqué, le théorème des fonctions implicites ne peut s'appliquer. On a en effet

Lemme III. I a) Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on a

$$(10) \quad \beta(\mu, 0) = 0$$

En particulier

$$(11) \quad \beta_{\mu}(0, 0) = 0.$$

b) Par ailleurs on a également

$$(12) \quad \beta_t(0, 0) = 0.$$

Preuve du Lemme III. I a) C'est une conséquence immédiate du fait que

$$F(\lambda, 0) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

On a en effet

$$\beta(\mu, 0) = \mathcal{L}(F(\lambda_* + \mu, \gamma(\lambda_* + \mu, 0))).$$

$$\text{Or } \gamma(\lambda, 0) = 0, \forall \lambda,$$

\mathcal{D}'_{μ}

$$\beta(\mu, 0) = \mathcal{L}(F(\lambda_* + \mu, 0)) = \mathcal{L}(F(\lambda, 0)) = \mathcal{L}0 = 0.$$

b) On a, après un calcul

$$\beta_t(\mu, t) = \mathcal{L}(F_u(\lambda_* + \mu, te + \gamma(\lambda_* + \mu, te))) [e + \gamma_v(\lambda_* + \mu, te)e].$$

En faisant $t=0$, on obtient

$$\beta_t(\mu, 0) = \mathcal{L}(F_u(\lambda_* + \mu, 0) [e + \gamma_v(\lambda_* + \mu, 0)e]).$$

Comme $\gamma(\lambda_* + \mu, 0) = 0$,

$$\beta_t(\mu, 0) = \mathcal{L}(F_u(\lambda_* + \mu, 0)(e + \gamma_v(\lambda_* + \mu, 0)e)).$$

Faisons maintenant $\mu = 0$. Il vient

$$\beta_t(0, 0) = \mathcal{L}(F_u(\lambda_*, 0)e) = \mathcal{L}(Le) = \mathcal{L}(0) = 0,$$

car $e \in V = \text{Ker } L$.

Ces calculs montrent que, pour analyser la situation, il faudra pousser les développements à l'ordre deux (au moins), et calculer des dérivées secondes de β . Dans ce contexte, nous utiliserons le résultat suivant.

Proposition III.1 Soit f une fonction de classe C^2 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

On suppose que

$$(\alpha) \quad f(x, 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ En particulier } f_x(x, 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(\beta) \quad f_y(0, 0) = 0$$

$$(\gamma) \quad f_{x,y}(0, 0) \neq 0.$$

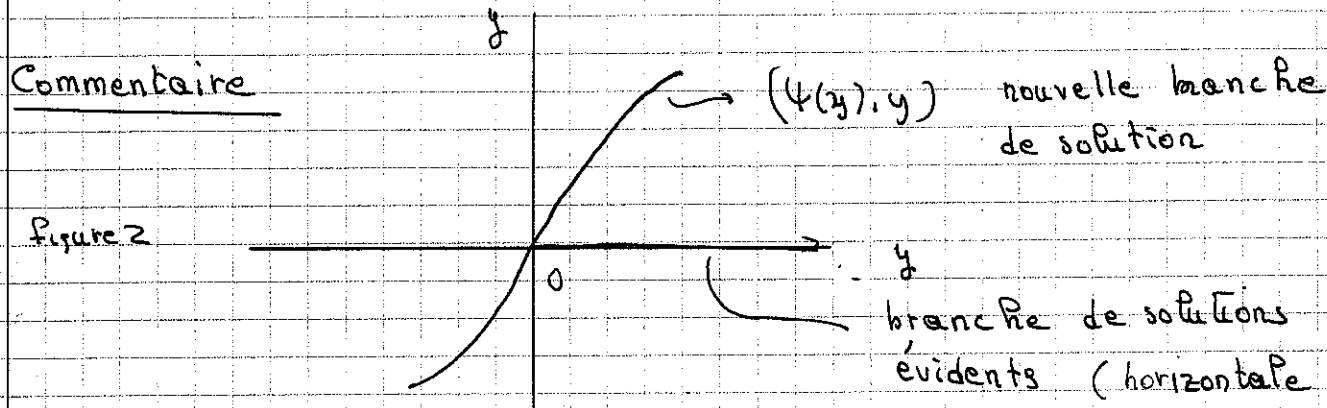
Alors il existe $\varepsilon > 0$, et une fonction $\psi: [-\varepsilon, \varepsilon]$ dans \mathbb{R} de classe C^1 telle que

i) $\psi(0) = 0$

ii) $f(\psi(y), y) = 0$

iii) Il existe $\rho > 0$ tel que si $\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq \rho^2$ et si $f(x, y) = 0$

alors ou bien $y = 0$, ou bien $x = \psi(y)$



Sous les hypothèses (β) et (γ) on voit apparaître une nouvelle branche de solutions de l'équation $f(x, y) = 0$, en plus de la branche horizontale de solutions évidentes $(x, 0)$. Cette nouvelle branche n'est pas horizontale.

Nous allons donner deux preuves différentes du résultat précédent. La première est "savante", dans la mesure où elle utilise le "Lemme de Morse": elle représente néanmoins la démarche la plus naturelle pour traiter le genre de questions qui nous concernent. La deuxième preuve est plus élémentaire (elle repose sur le théorème des fonctions implicites), mais probablement plus longue aussi.

1^{ère} preuve de la proposition III.1 (par le Lemme de Morse)

Rappelons brièvement un énoncé du Lemme de Morse - Soit g une fonction de classe C^2 de \mathbb{R}^n . On suppose que

$g(0) = 0$

et

$$\nabla g(0) = 0.$$

Sont $H(x) = (R_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice Hessienne de g , où

$$R_{ij}(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

H est une matrice symétrique. On a par développement de Taylor près de 0

$$g(x) = \sum_{i,j=1}^n R_{ij}(0) x_i x_j + o(\|x\|^2)$$

Enfin, si la matrice $H(0)$ est non dégénérée, dans une nouvelle

base orthogonale, aux coordonnées $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ on a

$$\sum_{i,j=1}^n R_{ij}(0) x_i x_j = \sum_{i=1}^p \tilde{x}_i^2 - \sum_{i=p+1}^n \tilde{x}_i^2$$

où $(n-p)$ est l'indice de la matrice $H(0)$, i.e. le nombre de valeurs propres négatives. On a donc

$$g(x) = \sum_{i=1}^p \tilde{x}_i^2 - \sum_{i=p+1}^n \tilde{x}_i^2 + o(\|x\|^2)$$

Le Lemme de Morse affirme que si $H(0)$ est non dégénérée (i.e. $\ker H = \{0\}$) alors on peut trouver des COORDONNÉES CURVILIGNES (x_1, \dots, x_n) près de zéro, tels que dans l'égalité précédente, on puisse enlever le terme $o(\|x\|^2)$, i.e. tels que près de zéro

$$g(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^n x_i^2.$$

Plus précisément, il existe alors des ouverts V_0 et V_1 de \mathbb{R}^n contenant zéro, et un difféomorphisme $\psi: V_0 \rightarrow V_1$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x_n(x_1, \dots, x_n))$$

tel que si $g \circ \psi^{-1}$ est l'écriture dans les nouvelles coordonnées curvilignes alors,

$$g \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^n x_i^2$$

Revenons maintenant à notre situation originale : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et

$f(0,0) = 0$, $\nabla f(0,0) = 0$, $f_{xy}(0,0) \neq 0$, $f_{xx}(0,0) = 0$. La matrice

Hessienne $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 2}$ s'écrit donc en 0

$$H(0) = \begin{pmatrix} 0 & p_{xy} \\ p_{xy} & * \end{pmatrix}$$

Son déterminant est égal à $-f_{x_1 x_2}^2(0)$: il est donc non nul, et donc H est non dégénérée. Comme il est négatif, H possède une valeur propre positive et une valeur propre négative. En appliquant le Lemme de Morse, on a donc près de zéro

$$f \circ \psi^{-1}(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

où $\psi: \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{V}_1$ est un difféomorphisme (\mathcal{V}_0 , et \mathcal{V}_1 voisinages ouverts de zéro)

L'équation

$$f \circ \psi^{-1}(x_1, x_2) = 0$$

a donc pour solutions deux branches de droite

$$\begin{cases} x_1 = x_2 & , (x_1, x_2) \in \mathcal{V}_1 \\ x_1 = -x_2 & (x_1, x_2) \in \mathcal{V}_2 \end{cases}$$

Il en résulte que, sur \mathcal{V}_0 , l'équation

$$f(x, y) = 0 \quad , (x, y) \in \mathcal{V}_0$$

a pour solutions les deux courbes \mathcal{C}^2

$$(x, y) = \psi^{-1}(x_1, x_1) \quad , (x_1, x_1) \in \mathcal{V}_1$$

et

$$(x, y) = \psi^{-1}(x_1, -x_1) \quad , (x_1, -x_1) \in \mathcal{V}_2$$

L'une de ces courbes correspond à la courbe $(x, 0)$. La deuxième courbe est donc une nouvelle branche de solutions.

2^{ème} Preuve : preuve directe. On introduit la fonction R définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\begin{cases} R(x, y) = \frac{f(x, y)}{y} & \text{pour } y \neq 0 \\ R(x, 0) = f_y(x, 0) & \text{pour } y = 0 \end{cases}$$

On commence que R est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Montrons tout d'abord

que f_x est continue. On a

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x,y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = f_y(x,0)$$

et $f_y(x,0) \rightarrow 0$ puisque $x \rightarrow 0$.

Ensuite on calcule

$$R_x(x,y) = \frac{f_x(x,y)}{y} \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Ainsi

$$R_x(x,y) = \frac{f_x(x,y) - f_x(x,0)}{y} \rightarrow f_{x,y}(x,0) \text{ puisque } y \rightarrow 0.$$

Il en résulte que $R_x(x,y)$ coïncide avec la dérivée sur la droite \mathbb{R}_x , à savoir $f_{xy}(x,0)$. Enfin,

$$\begin{aligned} R_y(x,y) &= \frac{f_y(x,y)}{y} - \frac{f(x,y)}{y^2} \\ &= \underbrace{\frac{f_y(x,y) - f_y(x,0)}{y}}_{\downarrow y \rightarrow 0} - \underbrace{\frac{f(x,y) - 2f(x,0)}{y^2}}_{\downarrow y \rightarrow 0} \quad \left[\text{par DL de Taylor} \right] \\ &= f_{yy}(x,0) - \frac{1}{2} f_{yy}(x,0) \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$R_y(x,y) \rightarrow \frac{1}{2} f_{yy}(x,0) \text{ puisque } y \rightarrow 0.$$

Les dérivées partielles étant continues, R est C^∞ . Au passage, on a vérifié

$$(13) \quad \begin{aligned} R_x(0,0) &= f_{xy}(0,0) \neq 0 \\ R_y(0,0) &= \frac{1}{2} f_{yy}(0,0) \end{aligned}$$

Le théorème des fonctions implicites s'applique donc à la fonction

R , ie $\exists \varepsilon > 0$ et $\psi(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que

$$\psi(0) = 0$$

$$R(\psi(y), y) = 0, \quad \forall y \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

et $R(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = \psi(y)$

et $(x,y) \in \mathcal{U}$ voisinage de $(0,0)$

Comme $R(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x,y) = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la conclusion en découle

G
21

Remarque. On a, en dérivant la relation $R(\psi(y), y) = 0$,

$$\psi'(y) h_x(\psi(y), y) + R_y(\psi(y), y) = 0,$$

et donc, pour $y=0$,

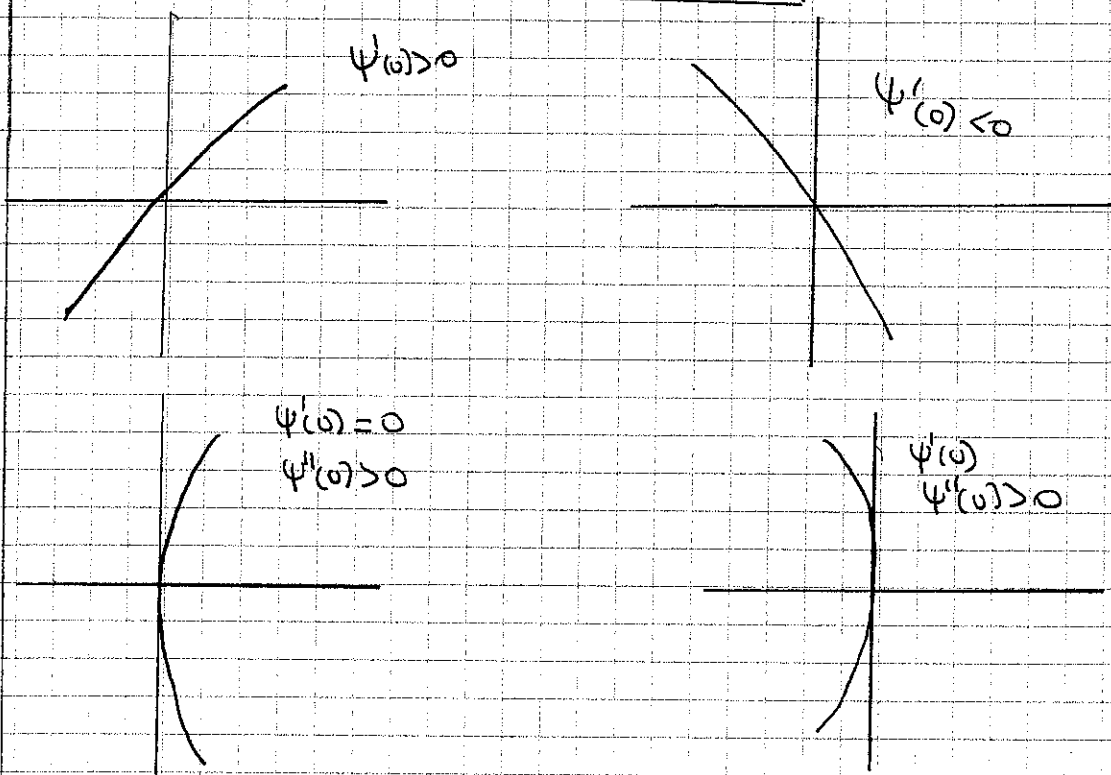
$$\psi'(0) h_x(0,0) + R_y(0,0) = 0.$$

Ainsi, comme $R_x(0,0) = f_{xy}(0,0) \neq 0$

$$\psi'(0) = - \frac{R_y(0,0)}{R_x(0,0)},$$

i.e

$$(14) \quad \boxed{\psi'(0) = - \frac{f_{yy}(0,0)}{2 f_{xy}(0,0)}}.$$



Revenons maintenant au problème de départ, à savoir, pour $F \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$$F(\lambda, u) = 0$$

près de $(\lambda_0, 0)$, lorsque $\dim \text{Ker } L = 1$ ($\text{Ker } L = \mathbb{R}e$), codim $\text{Im } L = 1$

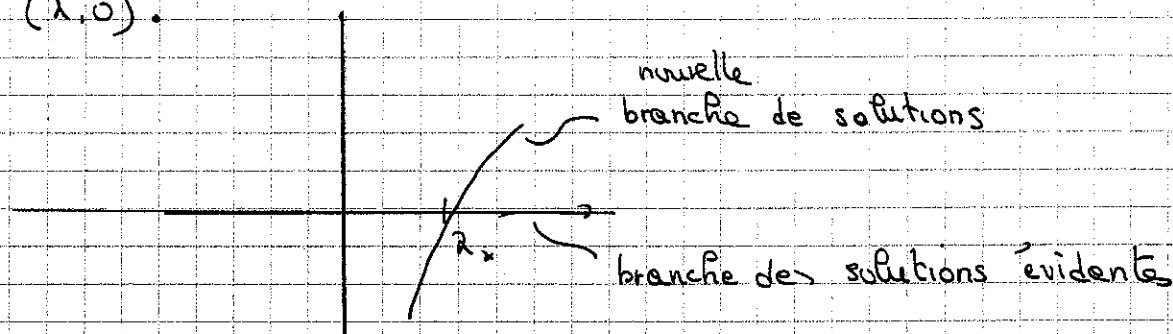
On a alors le résultat suivant

THEOREME 1 Soit M l'application lineaire

$$M = F_{u,\lambda}(\lambda_*, 0) \in \mathcal{L}(X, Y)$$

$$M e \notin \text{Im } L$$

alors λ_* est un point de bifurcation pour F . De plus l'ensemble des solutions de $F=0$ près de $(\lambda_*, 0)$ est constitué de deux courbes paramétriques de classe C^1 , dont l'une est la courbe des solutions évidentes $(\lambda, 0)$.



Preuve: Nous avons vu, grâce à la réduction de Liapounov-Schmidt que l'équation

$$F(\lambda, u) = 0,$$

est équivalente près de $(\lambda_*, 0)$ à l'équation

$$\beta(\mu, t) = 0,$$

pour $u = te + \gamma(\lambda_* + \mu, te)$, $\mu = \lambda - \lambda_*$ et finalement

$$\beta(\mu, t) = \mathcal{L}(F(\lambda_* + \mu, te + \gamma(\lambda_* + \mu, te))).$$

Nous avons vu (cf Lemme III.1) que $\beta(\mu, 0) = 0, \forall \mu \in \mathbb{R}, \beta_t(\mu, 0) = 0$.

Pour appliquer la proposition III.1 à β , nous allons calculer $\beta_{\mu t}(0, 0)$. On a

$$\beta_{t,\mu}(\mu, 0) = \frac{d}{d\mu} \beta_t(\mu, 0)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{L}(F_{u,\lambda}(\lambda_* + \mu, 0) [e + \gamma_v(\lambda_* + \mu, 0)e]) \\ &+ \mathcal{L}(F_u(\lambda_* + \mu, 0) \gamma_{v,\lambda}(\lambda_* + \mu, 0)[e]). \end{aligned}$$

Pour $\mu = 0$, on trouve donc

$$\beta_{t,\mu}(0, 0) = \mathcal{L}(F_{u,\lambda}(\lambda_*, 0) [e + \gamma_v(\lambda_*, 0)e]) + \mathcal{L}(F_u(\lambda_*, 0) \gamma_{v,\lambda}(\lambda_*, 0)[e]).$$

Comme $F_u(\lambda_*, 0) = L$, $F_u(\lambda_*, 0) \gamma_{v,\lambda}(\lambda_*, 0)(e) \in \text{Im } L = \mathbb{R}$

Par ailleurs $\mathcal{L}(w) = 0$, $\forall w \in \mathbb{R}$. Il en résulte que

$$\mathcal{L}(F_u(\lambda_*, 0) \gamma_{v,\lambda}(\lambda_*, 0)(e)) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \beta_{t,\mu}(0,0) &= \mathcal{L}(F_{u,\lambda}(\lambda_*, 0)(e)) \\ &= \mathcal{L}(Me) \neq 0 \text{ par hypothèse} \end{aligned}$$

Cette vérification faite, la proposition III.1 permet de conclure.

Remarque On a

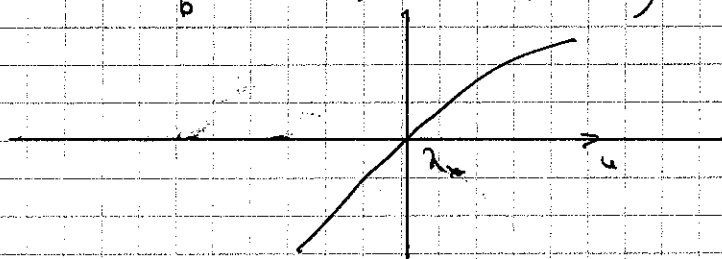
$$\beta_{t,t}(0,0) = \mathcal{L}(F_{u,u}(\lambda_*, 0)(e,e))$$

Si $\mu = \psi(t)$ est la représentation paramétrique de la nouvelle branche de solutions on a d'après (14)

$$\psi'(0) = -\frac{1}{2} \frac{\beta_{t,t}(0,0)}{\beta_{t,\mu}(0,0)} = -\frac{b}{a}, \text{ où } b = \frac{1}{2} \beta_{t,t}(0,0) \text{ et } a = \beta_{t,\mu}(0,0) \neq 0.$$

Si $b \neq 0$ alors $\psi'(0) \neq 0$ et donc localement la nouvelle branche de solutions est donnée en fonction de λ par

$$u(\lambda) = -\frac{a}{b} (\lambda - \lambda_*) e + o(\lambda - \lambda_*).$$



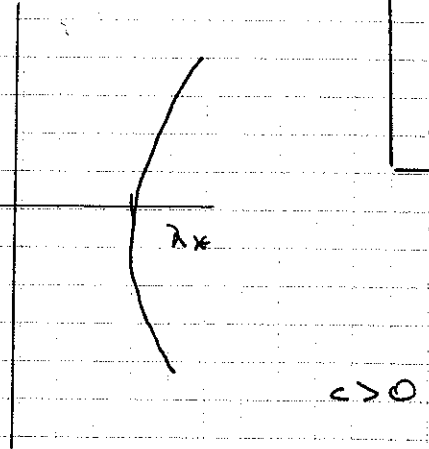
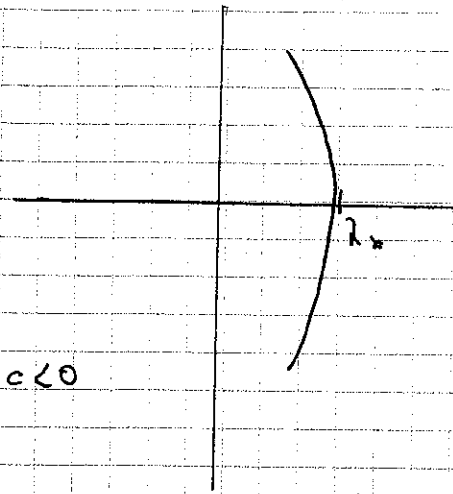
Si $b = 0$, alors il faut chercher l'ordre suivant

* Si $b = 0$ et $\psi''(0) \neq 0$ [ici un calcul montre que l'on a

$$\psi''(0) = -\frac{1}{3a} \mathcal{L}(F_{u,u,u}(\lambda_*, 0)(e,e,e))]]$$

$$u(\lambda) = \pm \left(\frac{\lambda - \lambda_*}{c} \right)^{1/2} e + o(\lambda - \lambda_*),$$

où $c = \psi''(0)$.



III-2 EXEMPLES: BIFURCATION PRES D'UNE VALEUR PROPRE SIMPLE

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N , et $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} = \sigma_p(-\Delta_0)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$ on considère les espaces

$$\begin{cases} X_p = W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \\ Y_p = L^p(\Omega), \end{cases}$$

pour $p \geq p_k$ assez grand. On considère le problème

$$(15) \quad F(\lambda, u) = -\Delta u - \lambda u - u^k = 0.$$

Si on choisit p_k assez, alors $F \in C^2(\mathbb{R} \times X_p, Y_p)$. Par ailleurs il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $u=0$ est une solution évidente de (15)

Nous allons étudier les bifurcations à partir de cette branche "évidente".

On a

$$L_v \equiv F_u(\lambda, 0)v = -\Delta v - \lambda v,$$

de sorte que

$$L \notin \text{Inv}(X, Y) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_p(-\Delta_0) = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}^*},$$

Les points $(\lambda, 0)$ de bifurcation possibles sont donc les éléments λ_n du spectre $\sigma_p(-\Delta_0)$. Nous supposons dans tout ce qui suit que

$$(16) \quad \lambda_i \in \sigma_p(-\Delta_0) \text{ est une valeur propre simple de } -\Delta_0$$

i.e

$$N = \{w \in X_p \text{ t. p. } -\Delta w = \lambda_i w\} = \text{Re}_i (= \mathbb{Z}).$$

ou $\|e_i\|_2 = 1$ nous avons : alors on que

$$\text{codim Im } L = 1 \quad (\text{en fait } R = \text{Im } L = (\text{Re}_i)^{\perp L^2(\Omega)} \cap X = N)$$

Pour voir si $(\lambda_i, 0)$ est un point de bifurcation de F , on peut essayer d'appliquer le Théorème III.1 et à cet effet calculer $F_{u,\lambda}(\lambda_i, 0)$. On a

$$F_{u,\lambda}(\lambda, 0) = \frac{\partial}{\partial \lambda} (-\Delta - \lambda \text{Id}) = -\text{Id}$$

En particulier

$$F_{u,\lambda}(\lambda_i, 0)v = -v, \quad \forall v \in X$$

et donc

$$(17) \quad F_{u,\lambda}(\lambda_i, 0)e_i = -e_i \notin R = (\mathbb{R}e_i)^{\perp_{L^2(\Omega)}} \cap X = W$$

Nous sommes donc exactement dans les conditions d'application du Théorème III.1. Donc

$\forall \lambda_i \in \sigma_p(-\Delta_0)$ v.p. simple de $-\Delta$, $(\lambda_i, 0)$ est un point de bifurcation de F ; l'ensemble des solutions de $F(\lambda, u) = 0$ près de $(\lambda_i, 0)$ est composé de la réunion de deux courbes paramétriques C^∞ , dont l'une est la branche de solutions évidentes.

Etude de la branche de solutions non triviales

L'étude menée dans le théorème III.1 nous a montré que le bon paramètre pour paramétrer la branche de solutions non évidentes était t , et non le paramètre λ . On a alors sur cette branche en notant $(\lambda(t), u(t))$ la solution

$$u(t) = te_i + \gamma(\lambda(t), te_i) \quad \lambda(0) = \lambda_i$$

La fonction $\gamma: I \times \mathbb{R} \rightarrow W$ est définie grâce à la réduction de Liapunov-Schmidt. Nous avons vu que

$$\gamma_{t,v}(\lambda_i, te_i) = 0$$

D'où un développement de la solution au premier ordre

$$(18) \quad u(t) = te_i + o(t)$$

$$t = \int_{\Omega} u(t) e_i$$

G

26

Nous poserons par la suite

$$w(t) = \gamma(\lambda(t), te_i) \in W = R = \mathbb{R}e_i \perp_{L^2} X$$

de sorte que $\langle w, e_i \rangle_{L^2} = 0$ et par (18), $\|w(t)\| = o(t)$. L'équation

(18) signifie qu'au premier ordre en t la solution $u(t)$ est proportionnelle à te_i . Pour déterminer de manière plus précise la fonction $u(t)$

il faut expliciter la dépendance de t par rapport au paramètre λ , qui est une donnée du problème. Cette dépendance dépend de manière cruciale de la non-linéarité, ici

$$N(u) = -u^k, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad k \geq 2.$$

Rq: L'analyse précédente reste valable même dans le cas $N(u) = 0$, car puisque F est linéaire par rapport à u . On veut dans ce cas la que $u(t) = te_i$, $\lambda_i(t) = \lambda_i$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

En guise d'exemple, nous allons préciser le lien $t \rightarrow \lambda(t)$ dans les cas $k=2$ et $k=3$.

$$k=2: \text{ Ici } F(\lambda, u) = -\lambda u - \lambda u - u^2$$

Nous pouvons utiliser les remarques qui suivent la preuve du Théorème III-1 pour expliciter la relation entre λ et t . Il s'avère qu'il est plus simple de raisonner directement. La relation

$$F(\lambda(t), u(t)) = 0$$

$$(19) \quad \begin{cases} -\lambda u(t) - \lambda(t) u(t) = u^2 & \text{dans } \Omega \\ u(t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Rappelons que

$$(20) \quad u(t) = te_i + w(t), \quad \|w(t)\|_X = o(t)$$

$$\text{ou } w(t) \in W = R = (\mathbb{R}e_i) \perp_{L^2} X. \text{ Posons}$$

$$\mu(t) = \lambda(t) - \lambda_* \text{ et}$$

$$L_{\lambda(t)} = -\Delta - \lambda(t) \text{Id}$$

Comme $W = W = (\mathbb{R}e_i)^{\perp_{L^2}} \cap X$, on remarque dans

$$L_{\lambda(t)}(W) = W$$

pour λ proche de λ_i , en particulier $L_{\lambda(t)}(w(t)) \in W$, pour t petit

on a par (19)

$$(21) \quad -\mu(t)te_i + L_{\lambda(t)}w = (te_i + w)^2$$

En prenant le produit scalaire avec e_i , et en utilisant le fait que $W \subset (\mathbb{R}e_i)^{\perp}$, on obtient

$$-\mu(t)t\|e_i\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} (te_i + w(t))^2 e_i,$$

i.e

$$t\mu(t) = -\int_{\Omega} (te_i + w(t))^2 e_i \sim t^2 \int_{\Omega} e_i^3, \text{ car } w(t) = o(t^2).$$

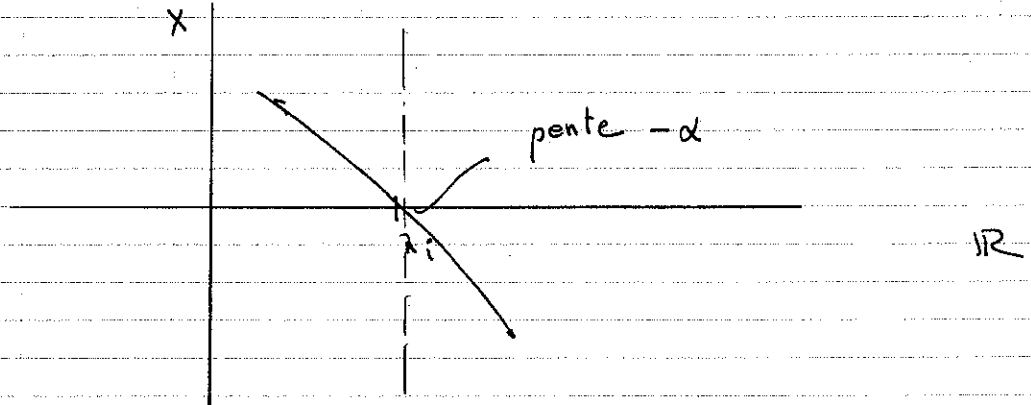
Comme $\|w(t)\|_{L^2} = o(t)$ on en déduit que

$$\mu(t) \sim -t \int_{\Omega} e_i^3$$

i.e

$$\lambda(t) \sim \lambda_i - t\alpha, \quad \alpha = \int_{\Omega} e_i^3$$

Le diagramme de bifurcation est donc, si $\alpha \neq 0$.



$$\mu(t) \sim te_i, \quad \lambda(t) \sim \lambda_i - t\alpha$$

$$k=3 \quad \text{ici } F(\lambda, u) = -\lambda u - u^3$$

En utilisant les mêmes notations que précédemment, on trouve

$$\mu(t) t = \int_{\Omega} (be_i + w(t))^3 e_i$$

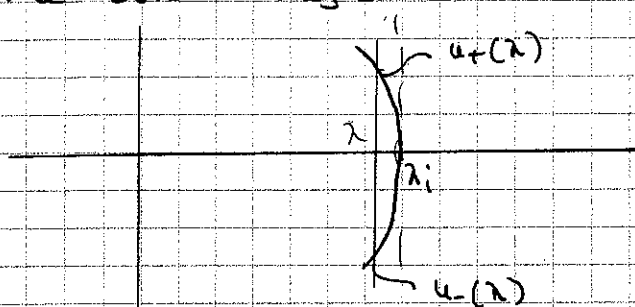
et donc

$$\mu(t) \sim \alpha t^2$$

où

$$\alpha = \int_{\Omega} |e_i|^4.$$

On a donc le diagramme



Il n'y a donc localement près de $(\lambda_i, 0)$, des solutions que pour $\lambda \leq \lambda_i$. Pour chaque $\lambda \leq \lambda_i$, on a alors (près de λ_i) deux solutions $u_+(\lambda)$ et $u_-(\lambda)$. On vérifie aisément que

$$u_+(\lambda) = -u_-(\lambda)$$

Enfin

$$u_+(\lambda) \approx \left(\frac{\lambda_i - \lambda}{\alpha} \right)^{1/2} e_i, \quad u_-(\lambda) \approx - \left(\frac{\lambda_i - \lambda}{\alpha} \right)^{1/2} e_i$$

$$\left[\text{car } t^2 \sim \frac{\lambda_i - \lambda}{\alpha} \Rightarrow t \sim \pm \sqrt{\frac{\lambda_i - \lambda}{\alpha}} \right]$$

Exercice : Montrer que si $k \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$ la courbe de bifurcation est verticale à l'origine, et préciser son allure.