CALCUL DES VARIATIONS.

MINIMISATION

I Introduction

Rappelons brièvement comment, dans le cas symétrique le problème de Lax-Milgram est équivalent à un problème de minimisation. Soit H un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire continue symétrique, i.e

$$a(u,v) = a(v,u), \quad \forall u \in H .$$

On suppose de plus a elliptique, c'est à dire qu'il existe $\alpha > 0$ t.q

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 , \quad \forall u \in H.$$

Le Théorème de Riesz (ou de Lax-Milgram) affirme alors que pour tout $L \in H^*$, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$(1) \qquad a(u,v) = L(v) \quad , \forall v \in H .$$

Interprétation variationnelle de (1) On introduit la fonction $J : H \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v)$$

On a $\forall w \in H$, $\forall u \in H$

$$J(u+w) = \frac{1}{2} a(u,u) + [a(u,w) - L(w)] + a(w,w) + L(u)$$

$$= J(u) + [a(u,w) - L(w)] + a(w,w)$$

$$> J(u) + [a(u,w) - L(w)] \quad , \text{si } w \neq 0 .$$

Il en résulte en particulier que $u \in H$ est solution de (1) ssi

$$\boxed{(2) \qquad J(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in H} J(v)} .$$

[en écrivant $v = u + w$]. En d'autres termes l'unique solution de (1) est donc l'unique solution du problème de minimisation (2).

Comme nous allons le voir, la condition (1) correspond à la condition du 1^{er} ordre pour un point de minimum de J. Il s'avérera que les deux conditions sont équivalentes pour des fonctions convexes, ce qui est le cas pour J. Enfin l'unicité du point de minimum pourra être analysée comme une conséquence de la stricte convexité de J.

II Problèmes de minimisation : condition du 1er ordre

Soit X un espace de Banach, et F une application de X vers $\mathbb{R}$.

Soit $u \in X$. On suppose que

$$(1) \qquad F(u) = \operatorname{Inf}_{v \in X} F(v),$$

c'est à dire

$$(2) \qquad F(u) \leq F(v) \quad , \forall v \in X.$$

On a alors

Proposition II.1 Soit $u \in X$ vérifiant (2). Alors, si F est Gateaux-différentiable en u, on a

$$dF_G(u) = 0.$$

Preuve. On a en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $w \in X$

$$F(u+tw) \geq F(u) \qquad \text{par (2).}$$

i.e

$$F(u+tw) - F(u) \geq 0,$$

En particulier

$$\text{si } t > 0 \qquad \frac{F(u+tw) - F(u)}{t} \geq 0$$

et

$$\text{si } t < 0 \qquad \frac{F(u+tw) - F(u)}{t} \leq 0.$$

Comme on a supposé F Gateaux-différentiable, on a

$$\frac{F(u+tw) - F(u)}{t} \to dF_G(u)w$$

Il résulte donc de ce qui précède que cette limite est positive et négative donc nulle.

L'argument précédent s'étend aisément aux minimas locaux.

<u>Définition II.1</u>. Soit $u_0 \in X$. On dit que u_0 est un minimum local pour F si il existe $\delta > 0$ tel que

$$F(u_0) \leq F(v), \quad \forall v \in B(u_0, \delta)$$

On dit que u_0 est un minimum local strict si il existe $\delta > 0$ tel que

$$F(u_0) < F(v), \quad \forall v \in B(u_0, \delta), \quad v \neq u.$$

On a alors

<u>Proposition II.2</u> Soit $u_0 \in X$ un minimum local de F. Alors si F est Gateaux-différentiable en u_0, on a

$$d_G F(u_0) = 0.$$

<u>Preuve</u> : exercice.

<u>Commentaire</u> 1. Les propositions précédentes montrent que la notion la plus faible de différentiabilité, i.e F G-différentiable est suffisante pour établir la condition de 1^{er} ordre.

2. Rappelons également que si F est de classe C^2, et si u_0 est un minimum local de F alors

$$(3) \qquad d^2F(u_0)(w,w) \geq 0, \quad \forall w \in X,$$

i.e la forme bilinéaire symétrique $d^2F(u_0) : X \times X \to \mathbb{R}$ est définie positive. L'inégalité (3) est appelée <u>CONDITION du deuxième ordre</u>.

3. Bien entendu, les propositions II.1 et II.2 n'affirment rien en ce qui concerne <u>l'existence</u> de minimas ou de minimas locaux. Cette question est le point essentiel des Sections qui suivent.

III MINIMISATION ET SEMI-CONTINUITÉ INFÉRIEURE

Dans tout ce qui suivra X désigne un espace de Banach réflexif, i.e

$$X^{**} = X.$$

Commencons par rappeler la définition

Définition III.1 Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction sur X. On dit que F est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement (et on écrit s.c.i faible séquentiellement), ssi $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de X

$$x_n \rightharpoonup x \text{ faiblement}$$

entraîne

$$F(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(x_n)$$

Rq : On dit aussi semi-continue inférieurement pour la convergence faible, en bref s.c.i pour la cv faible.

Nous verrons plus loin des exemples de fonctions s.c.i pour la cv faible.

Définition III.2 : Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dira que F est coercive ssi $F(u) \to +\infty$ lorsque $\|u\| \to +\infty$, i.e

$\forall A > 0$, $\exists B > 0$ tel que $\|u\| \geq B$ entraîne $F(u) \geq A$.

Exemples : 1) $F(u) = \|u\|$, $F_\alpha(u) = \|u\|^\alpha$ $\alpha > 0$

$F_1(u) = P(\|u\|)$ où P est un polynôme sur $\mathbb{R}$ de degré k

$P(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$, avec $a_k > 0$.

2) Si $X = H$ Hilbert 1), $F(u) = \frac{1}{2} a(u,u)$ où a est elliptique.

2) $F(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - L(u)$ où a est elliptique, et où $L \in H^*$

L'intérêt des définitions précédentes apparaît au vu du résultat suivant :

<u>THÉORÈME III.1</u> Soit C un ensemble convexe fermé de X, Banach réflexif. Soit $F : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose

i) F coercive et $F \neq +\infty$.

ii) F s.c.i pour la convergence faible.

Alors, il existe $u \in C$ tel que

$$(1) \qquad F(u) = \inf_{v \in C} F(v) \quad (<+\infty).$$

<u>Preuve</u> : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante pour le problème, i.e telle que

$$u_n \in C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et
$$F(u_n) \to \alpha = \inf_{v \in C} F(v) \in \overline{\mathbb{R}}$$

Nous allons montrer qu'il existe $u \in C$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ dans C.
La première étape consiste à montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Cette étape utilise <u>uniquement la coercivité</u> de F.

<u>1er Etape</u> : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Comme $F(u_n) \to \alpha$, $\exists n_0$ tel que

$$F(u_n) \leq \alpha + 1$$

Comme F est coercive, il existe $B>0$ tel que

$$\|u\| \geq B \quad \text{entraîne} \quad F(u) > \alpha + 2$$

On en déduit en particulier que pour $n \geq n_0$, $\|u_n\| \leq B$. La suite u_n est donc bornée.

<u>2ème Etape</u> : $\exists u \in C$, et une s.suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$(2) \qquad u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u, \quad n \to +\infty$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>bornée</u>, et que X est réflexif, on peut extraire une s.suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{\sigma(n)}$ converge faiblement dans X vers un élément $u \in X$. Le fait que $u \in C$ résulte du Lemme de Mazur, qui affirme que les convexes fermés faible sont les convexes fermés fort (voir l'énoncé après cette preuve)

<u>3ème Etape</u> : $F(u) = \alpha = \underset{v\in C}{\operatorname{Inf}} F(v)$

En effet par l'hypothèse ii) F est s.c.i pour la cv faible et donc

$$u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u \quad \Rightarrow \quad \alpha = \lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u)$$

Donc $F(u) \leq \alpha$. Comme $u \in C$, on a aussi

$$F(u) \geq \underset{v\in C}{\operatorname{Inf}} F(v) = \alpha$$

et la conclusion en découle.

Dans la 2ème Etape nous avons utilisé le lemme de Mazur, qui jouera un rôle important dans la suite. En voici un énoncé :

<u>Proposition III.1</u>. Soit X un espace de Banach réflexif. Soit C un ensemble convexe. Alors C est fermé (pour la convergence forte) si et seulement si C est fermé pour la convergence faible.

En particulier, si $C \subset X$ est convexe fermé, $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C, si il existe $u \in X$, t.q

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } X,$$

alors, on a $\quad u \in C$.

Commentaire : On dit d'un sous-ensemble Λ de X qu'il est fermé pour la convergence faible si $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Λ, i.e $u_n \in \Lambda, \forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans X entraîne $u \in \Lambda$.

On a toujours (comme on le vérifie aisément)

(4) Λ fermé pour la CV faible $\Rightarrow$ Λ fermé (fort).

La réciproque est fausse en général. On peut prendre par exemple $X = H$, espace de Hilbert séparable, et $\Lambda = S$, où

$$S = \{ u \in H, \ \|u\| = 1 \}$$

Il est clair que S est fermé (fort). En revanche S n'est pas fermé pour la CV faible. On peut prendre $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de H : $e_n \in S$, $\forall n$ et $e_n \rightharpoonup 0$ lorsque $n \to +\infty$. Or $0 \notin S$.

Le Lemme de Mazur assure que la réciproque de (4) est vraie, si on suppose de plus que Λ est convexe, c'est à dire $\forall x, y$ dans Λ, $[x, y] \subset \Lambda$. Pour une preuve voir Brezis, Analyse fonctionnelle.

Un exemple important de fonctions s.c.i pour la cv faible est fourni par les fonctions convexes s.c.i. Elles font l'objet du prochain paragraphe.

IV FONCTIONS CONVEXES

IV.1 Rappels

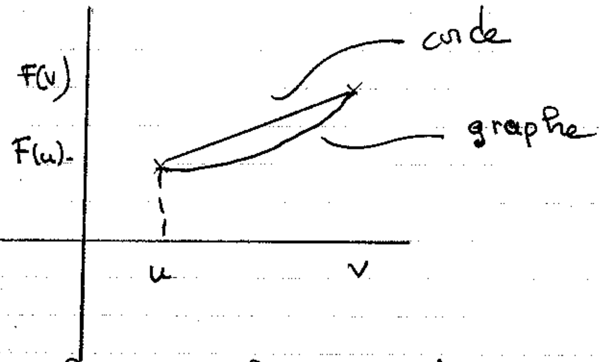
Définition IV.1 : Soit $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que F est convexe si et seulement si, $\forall u, v$ dans X, $\forall \theta \in [0, 1]$

$$(1) \quad F(\theta u + (1-\theta) v) \leq \theta F(u) + (1-\theta) F(v)$$

On dit que F est strictement convexe si, $\forall u, v \in X$, $u \neq v$

$$(2) \quad F(\theta u + (1-\theta) v) < \theta F(u) + (1-\theta) F(v), \quad \forall \theta \in]0, 1[.$$

Lorsque $X = \mathbb{R}$, l'inégalité (1) signifie que dans le graphe l'image de $F[u, v]$ est située en dessous de la corde :



donnons quelques exemples simples de fonctions convexes.

1) $F(u) = L(u)$ où $L \in X^*$, forme linéaire continue.

2) Pour $X = H$, Hilbert $F(u) = \frac{1}{2} a(u,u)$, pour a bilinéaire symétrique, elliptique.

3) Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ convexe, t.q. $\exists p > 1$ $|g(t)| \leq C(1+|t|^p)$

alors pour $X = L^p(\Omega)$, la fonction W définie sur X par

$$W(u) = \int_\Omega g(u)$$

est convexe. De manière générale si g est une C-fonction t.q

$$|g(x,t)| \leq C(1+|t|)^q$$

et $\forall x \in \Omega$, $g(x,\cdot)$ est convexe, alors

$$W(u) = \int_\Omega g(x, u(x))\, dx$$

est convexe sur $X = L^p(\Omega)$.

Rappelons brièvement quelques propriétés classiques des fonctions convexes

Proposition IV.1 a) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Alors f est convexe ssi la fonction de deux variables

$$G(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \text{définie pour } (x,y) \in I^2, x \neq y$$

est croissante par rapport à chacune des deux variables x et y.

b) En particulier si $f \in C^1(I)$, f est convexe, ssi, $\forall x,y$ dans I

(3) $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$

c) Si $f \in C^2(I)$, alors f est convexe ssi

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in I.$$

Preuve a) Pour $0 < \theta < 1$, et $x < y$ dans I, on pose $z = \theta y + (1-\theta)x$. On a

$$\frac{f(\theta y + (1-\theta)x) - f(x)}{\theta y + (1-\theta)x - x} = \frac{f(\theta y + (1-\theta)x) - f(x)}{\theta(y-x)}.$$

Si f est convexe, on a donc $G(z,x) \leq G(y,x)$, dès que $z \in [x,y]$ et de même $G(z,y) \leq G(x,y)$. La réciproque se démontre de même.

b) On a $f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = \lim_{z \to x} G(x,z)$.

Si f est convexe, et $y \geq x$, on a par a)

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = G(x,y).$$

et la conclusion en découle. Réciproquement supposons que f vérifie (3). Alors $\forall \theta \in [0,1]$, on a

$$f(y) \geq f(\theta y + (1-\theta)x) + f'(\theta y + (1-\theta)x)[y - (\theta y + (1-\theta)x)]$$

$$f(x) \geq f(\theta y + (1-\theta)x) + f'(\theta y + (1-\theta)x)[x - (\theta y + (1-\theta)x)],$$

i.e

$$f(y) \geq f(\theta y + (1-\theta)x) + f'(\theta y + (1-\theta)x)(1-\theta)(y-x)$$

$$f(x) \geq \quad '' \quad\quad '' \quad\quad '' \quad\quad \theta\,(x-y).$$

En multipliant la première relation par θ, la deuxième par $(1-\theta)$ et en additionnant on trouve

$$\theta f(y) + (1-\theta) f(x) \geq f(\theta y + (1-\theta)x)$$

et donc f est convexe.

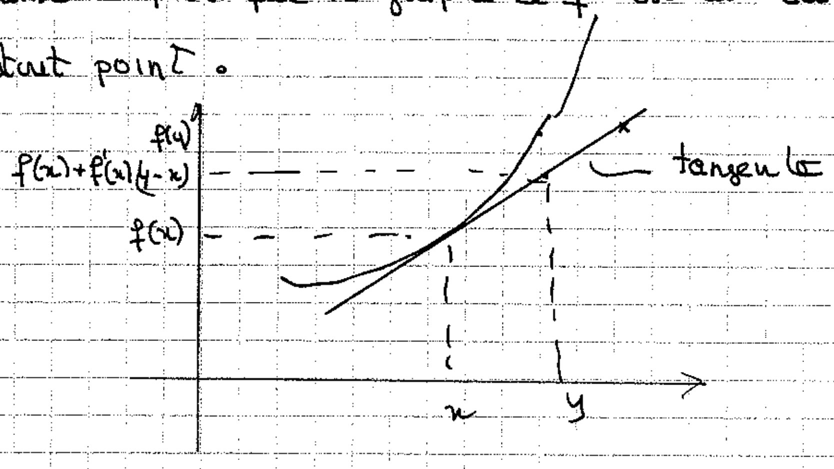
c) Si $f \in C^2$ vérifie $f''(x) \geq 0$, alors on a par développement de Taylor, $\forall x, y$, $\exists c \in [x,y]$ t.q

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{(y-x)^2}{2} f''(c) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

et donc f vérifie (3). Par la partie b) on en déduit donc que f est convexe.

Réciproquement, si f est convexe C^1, on déduit de a) que f' est croissante, et donc si f C^2, $f'' \geq 0$.

Rq : L'inégalité (3) s'appelle l'inégalité de la tangente, et exprime le fait que le graphe de f est au dessus de la tangente en tout point.



Les parties b) et c) se généralisent aisément au cas de fonctions $F : X \to \mathbb{R}$, X espace de Banach. On a

__Proposition IV.2__ Soit X un espace de Banach, et $F : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

a) Alors F est convexe ssi $\forall (x,y) \in X^2$

(4) $F(y) \geq F(x) + dF(x)(y-x)$

b) Si de plus $F \in C^2$, alors F est convexe si et seulement si

(5) $d^2F(x)(w,w) \geq 0 \quad , \forall x \in X, \ \forall w \in X$

i.e. $d^2F(x)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

IV.2 Convexité et semi-continuité inférieure

Le résultat suivant jouera un rôle essentiel dans toute la suite :

<u>Théorème IV. 1</u>. Soit $F : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose de plus que F est s.c.i pour la topologie forte, i.e $\forall x \in X$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que si $\|u - v\| \leq \delta$ alors $F(v) \geq F(u) - \varepsilon$.
Alors f est s.c.i pour la convergence faible, i.e

$$(6) \qquad u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } X$$

entraîne

$$(7) \qquad F(u) \leq \liminf F(u_n).$$

<u>Preuve</u> : Posons $\alpha = \liminf_{n \to +\infty} F(u_n)$. Par définition α est une valeur d'adhérence de la suite $(F(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ (c'est même la plus petite valeur d'adhérence). Il existe donc une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$F(u_{\sigma(n)}) \longrightarrow \alpha.$$

Montrons que $\forall \varepsilon > 0$

$$(8) \qquad F(u) \leq \alpha + \varepsilon$$

A cet effet, on considère l'ensemble de niveau

$$C^{\varepsilon} = \{ v \in X, \quad F(v) \leq \alpha + \varepsilon \}.$$

Comme F est s.c.i, C^{ε} est fermé. Par ailleurs, comme F est convexe C^{ε} est convexe. Le Lemme de Mazur affirme alors que C^{ε} est fermé pour la convergence faible. Comme $F(u_{\sigma(n)}) \to \alpha$, $\exists n_0$ tq $n \geq n_0$ implique

$$u_{\sigma(n)} \leq \alpha + \varepsilon$$

i.e

$$u_{\sigma(n)} \in C^{\varepsilon}.$$

Comme $u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u$, et C^{ε} fermé pour la cv faible, on en déduit

$$u \in C^{\varepsilon},$$

i.e (8) est établi.

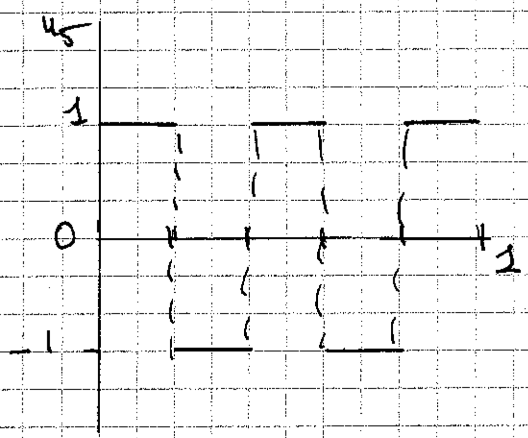
Commentaire : Si F est continue, alors F est s.c.i. Le Théorème IV-1 montre donc qu'une fonction continue convexe est s.c.i pour la convergence faible. L'hypothèse F convexe est tout à fait essentielle en dimension infinie. Voici un contre-exemple.

Soit $X = L^4[0,1]$ et pour $u \in X$

(9) $W(u) = \int_0^1 (1 - |u(x)|^2)^2 \, dx$.

On vérifie aisément grâce aux résultats du chapitre E que $W \in C^0(X; \mathbb{R})$. Montrons que W n'est pas s.c.i pour la convergence faible. Pour $n \in \mathbb{N}$ considérons la fonction u_n définie par

$$u_n(x) = (-1)^k \quad \text{sur } \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \; k \in \{0, \dots n-1\}$$



$n = 5$

On vérifie que $u_n \in L^4[0,1)$ $\|u_n\|_{L^4} = 1$, (en fait $|u(x)| = 1$, p.t x)

$W(u_n) = 0$

et

$u_n \rightharpoonup 0$

Or $W(0) = 1 \geq \lim_{n\to+\infty} W(u_n) = 0$. Bien entendu, W n'est pas convexe.

En combinant le Théorème IV.1 et le Théorème III.1 on obtient alors le résultat suivant

<u>Théorème IV. 2</u>. Soit $F : X \to \mathbb{R}$. On suppose

a) F est coercive

b) F est convexe

c) F est s.c.i (pour la topologie forte)

Alors, il existe $u \in X$ tel que

(10) $\quad F(u) \leq F(v), \ \forall v \in X$, i.e $\quad F(u) = \inf\limits_{v \in X} F(v)$

Si de plus F est strictement convexe, alors le minimum u est unique.

<u>Preuve</u> : (10) résulte directement des théorèmes III.1 et IV-1. Le seul point à expliciter est donc le dernier. Supposons F strictement convexe et soient u_1 et u_2 des minimas supposés distincts. On aurait par stricte convexité

$$\inf_{v \in X} F(v) \leq F\left(\tfrac{1}{2}(u_1 + u_2)\right) < \tfrac{1}{2} [F(u_1) + F(u_2)] = \inf_{v \in X} F(v)$$

ce qui est contradictoire.

Pour a forme bilinéaire continue, symétrique, et L forme linéaire, on retrouve le fait que $J = \frac{1}{2} a(\cdot,\cdot) - L(\cdot)$ atteint son minimum en un point unique : elle est en effet coercive, continue, strictement convexe.

IV.3 Points critiques et convexité

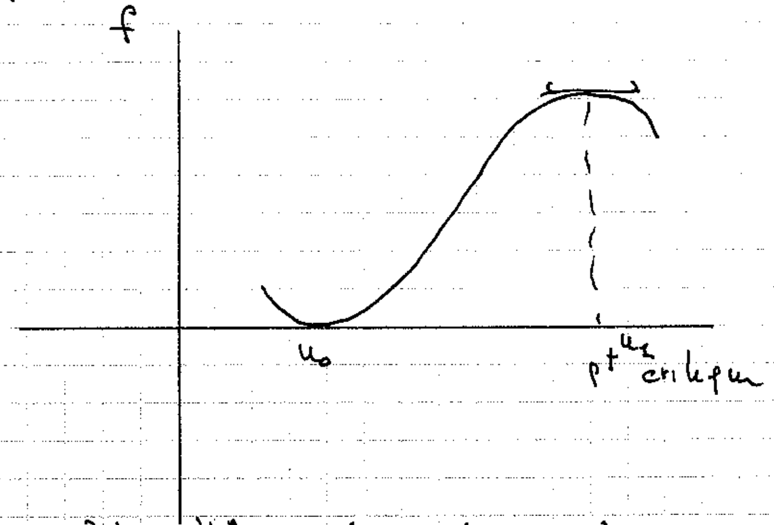
Soit F une fonction différentiable de X vers $\mathbb{R}$. Un point $u \in X$ est dit <u>critique</u> pour F ssi

(11) $\qquad dF(u) = 0.$

Nous avons vu que les minimas de F, lorsqu'ils existent sont des points critiques pour F, i.e

$$F(u) = \inf_{v \in X} F(v) \implies u \text{ pt critique.}$$

La réciproque est fausse, en général, comme le montre le dessin



u_0 et u_1 sont points critiques (i.e $f'(u_i)=0$), mais u_1 n'est pas un minimum. Dans le cas des fonctions convexes néanmoins, les deux notions coïncident.

<u>THÉORÈME IV.3</u> Soit $F \in C^1(X;\mathbb{R})$ <u>convexe</u>. Alors $u \in X$ est un minimum de F ssi u est un point critique de F, c'est à dire

$$F(u)=\inf_{v\in X} F(v) \iff dF(u)=0 .$$

<u>Preuve</u> : Il faut montrer que si $dF(u)=0$, alors $F(u)\leq F(v)$, $\forall v\in X$.
Or d'après la proposition IV.2 on a $F(v)\geq F(u)+dF(u)(v-u)=F(u)$ □

<u>Rq</u>: En particulier si f est strictement convexe, il y a, au plus, un pt critique.

IV.3 Exemples, applications

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue croissante. On suppose de plus que

$$(12) \quad |g(t)|\leq C(1+|t|^{2^*-1}), \text{ où } 2^*=\frac{2N}{N-2}$$

Pour $f\in H^{-1}(\Omega)$, on cherche u solution de

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u+g(u)=f & \text{dans } \Omega \\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

On a le résultat

Proposition IV. 3. Le problème (I) possède une unique solution $u \in H^1_0(\Omega)$.

Preuve : On vérifie tout d'abord que le problème (I) a une forme variationnelle, c'est à dire qu'il existe $F : H^1_0 \to \mathbb{R}$ tel que

$$u \in H^1_0(\Omega) \iff d_G F(u) = 0 .$$

1ère Etape : Mise sous forme variationnelle.

Introduisons la primitive G de g définie par

$$G(t) = \int_0^t g(s)\,ds \quad , \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

En utilisant (6.) on vérifie aisément que

$$(13) \quad |G(t)| \leq C(1 + |t|^{2^*})$$

Par ailleurs, comme $G' = g$ qui est supposée croissante, on a

$$(14) \quad G \text{ convexe sur } \mathbb{R} .$$

Introduisons maintenant la fonction F définie sur $H^1_0(\Omega)$ par

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega G(v) - \int_\Omega f \cdot v$$

Vérifions tout d'abord que $F \in C^1(H^1_0 ; \mathbb{R})$ et que

$$dF(u)\,v = \int_\Omega \nabla u . \nabla v - g(u)v - fv ,$$

de sorte que

$$(15) \quad dF(u) = -\Delta u - g(u) - f .$$

En effet

$$F = E + W - L$$

où $E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 = \|u\|^2_{H^1_0}$

$$W(v) = \int_\Omega G(v(x))\,dx$$

et

$$L = \int_\Omega f \cdot v$$

E est une forme bilinéaire symétrique sur $H = H_0^1(\Omega)$, donc C^∞

et
$$dE(u)v = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \quad , \text{i.e} \quad dE(u) = -\Delta u .$$

La forme L est linéaire continue, donc C^∞ et
$$dL(u)v = Lv = \int_\Omega f.v \quad \text{i.e} \quad dL = f$$

Enfin on a
$$W = \mathcal{L} \circ T_G \circ i$$

où i est l'injection de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.

T_G est l'opérateur de Nemitskii : $L^{2^*}(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$
$$v \longrightarrow G(v)$$

et $\mathcal{L}$ est la forme linéaire sur $L^1(\Omega)$ définie par
$$\mathcal{L}(w) = \int_\Omega w .$$

$\mathcal{L}$ et i sont linéaires continues, donc C^∞. D'après les résultats du Chapitre E, T_G est C^1 et
$$T_G v w = g(v) w .$$

On en déduit donc que
$$dW(u)v = \int_\Omega g(u) v \quad , \text{i.e} \quad dW(u) = g(u) .$$

En conclusion
$$dF(u)v = \langle -\Delta u + g(u) - f , v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

i.e
$$-\Delta u + g(u) = f , u \in H_0^1(\Omega) \iff dF(u) = 0 .$$

2ème Etape : recherche de solutions

Nous avons vu que les solutions dans $H_0^1(\Omega)$ de (I) étaient les points critiques de $F \in C^1(H; \mathbb{R})$. Vérifions que F est convexe strictement, coercive de sorte que le résultat sera établi en vertu des théorèmes III.2 et IV.3

α) F est strictement convexe : En effet F est la somme de trois fonctions convexes E, W, et $-L$ donc F est convexe. E est strictement convexe, donc F est strictement convexe.

β) F coercive : Comme g est croissante, on vérifie aisément qu'il existe $\Lambda \in \mathbb{R}^+$ t.q

$$G(t) \geq -\Lambda \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

Il en résulte que, $\forall v \in H$

$$F(v) \geq E(v) - L(v) - |\Omega| \Lambda$$

La coercivité de F résulte alors de celle de $E - L$. On a

$$E(v) - L(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f \cdot v$$

$$\geq \|v\|^2_{H^1_0} - c\|f\|_{H^{-1}} \|v\|^2_{H^1_0} \qquad \text{(par Poincaré)}$$

$$\geq P(\|v\|)$$

où $P(X) = X^2 - c\|f\|_{H^{-1}} X$. Comme $P(x) \to +\infty$, lorsque $|x| \to +\infty$ le résultat en découle.

3ème Etape : conclusion : Comme F est continue convexe coercive, par le Théorème IV.2 $\exists ! \, u \in H^1_0(\Omega)$ t.q

$$F(u) = \inf_{v \in H^1_0} F(v),$$

de plus $dF(u) = 0$, i.e u est solution de (I). Par le Théorème IV.3 u est l'unique solution du problème.

V AU DELA DE LA CONVEXITÉ

Nous avons vu (cf exemple (9)) qu'une fonction W pouvait très bien être continue et pas s.c.i pour la convergence [bien entendu ceci suppose que $\dim X = +\infty$, car sinon les deux notions de convergence coïncident], si W n'est pas convexe.

Nous allons commencer par analyser d'autres exemples, en rapport avec les EDP

V.1 Exemples

A) Soit $I = [0,1]$. Pour $X = W_0^{1,4}[0,1]$, on considère la fonction

$$F(v) = \int_0^1 (1 - \dot{v}^2(x))^2 \, dx \quad , v \in X$$

Clairement F est positive, i.e

$$F(v) \geq 0 \quad , \forall v \in X$$

Considérons la fonction u_0 définie par

$$u_0(x) = x \quad , \text{si} \quad x \leq \frac{1}{2}$$
$$u(x) = \frac{1}{2} - x \quad \text{si} \quad x \geq \frac{1}{2}$$

de sorte que $u_0 \in X$, et $|\dot{u}_0| = 1$. Il en résulte que

$$F(u_0) = 0 = \inf_{v \in X} F(v).$$

et le Inf est atteint, bien que F ne soit pas s.c.i pour la cv faible

Notons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, si on note u_n la fonction définie par

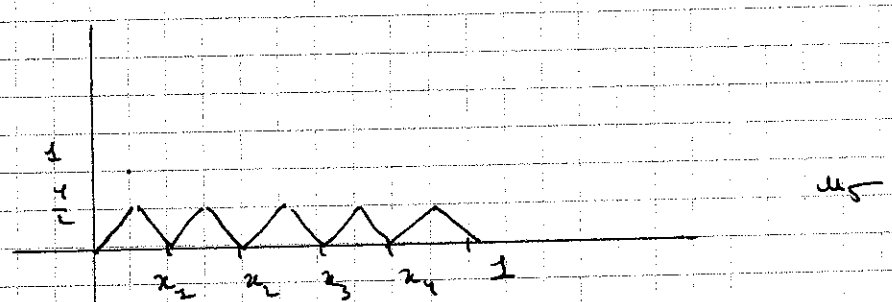
$$u_n(x) = \frac{1}{n} u_0\left(\frac{x - x_k}{n}\right) \quad , \text{pour } x \in [x_k, x_{k+1}] \qquad x_i = \frac{i}{n} \quad i \in \{0, \dots n\}$$

alors

$$F(u_n) = 0$$

F a donc une infinité de minimas. En fait

$$F(u) = 0 \iff |\dot{u}| = 1$$



B) Dans le même contexte considérons la fonctionnelle

$$G(v) = \int_0^1 \left[(1 - \dot{v}^2(x))^2 + v^2(x) \right] dx$$

De nouveau on vérifie que

$$G(v) \geq 0$$

Par ailleurs

$$G(u_n) = \int_0^1 |u_n|^2 dx \leq \frac{4}{n^2}$$

D'où il résulte que $G(u_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. On en déduit que

$$\operatorname*{Inf}_{v \in V} G(v) = 0$$

En revanche sur cet exemple l'infinum n'est pas atteint : en effet

$$G(v) = 0 \Rightarrow \int v^2 = 0 \text{ et } |\dot{v}| = 1$$

$$\Rightarrow v = 0 \quad \text{et } |\dot{v}| = 1 \quad \text{contradictoire}.$$

La conclusion que l'on peut tirer de ces exemples est que, lorsque le terme portant sur la dérivée d'ordre le plus élevé est non convexe (ici $(1-\dot{v}^2)^2$) alors de nombreux types de situations peuvent arriver. En revanche, lorsque celui est convexe, alors on peut utiliser une partie de notre analyse précédente. C'est l'objet du prochain paragraphe.

V.2 PERTURBATION COMPACTES DE FONCTIONS CONVEXES

Revenons à une situation plus abstraite : soit X un espace de Banach $F : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose que F peut se décomposer de la façon suivante

(1) $F = F_0 + W$

où

(2) F_0 est une fonction de classe $C^1 : X \to \mathbb{R}$ convexe

et

(3) W " " $X \to \mathbb{R}$ compacte

Cette dernière notion signifie

<u>Définition V-1</u>. Soient X et Y deux espaces de Banach. On suppose X reflexif. On dit que $\Phi : X \to Y$ est compacte ssi

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } X$$

entraîne

$$\Phi(u_n) \to \Phi(u) \quad \text{fort dans } Y.$$

Dans le cas qui nous intéresse W compacte signifie en fait W continue pour la convergence faible, i-e

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } X \Rightarrow W(u_n) \to W(u).$$

Il en résulte en particulier :

<u>Proposition V. 1</u> : Soit $F : X \to \mathbb{R}$ vérifiant (1), (2), (3). Alors F est s.c.i pour la convergence faible

<u>Preuve</u> : exercice.

<u>Proposition V. 1</u>. Soit $F : X \to \mathbb{R}$ vérifiant (1), (2), (3). On suppose de plus F coercive. Alors il existe $u \in X$ tel que

$$F(u) = \inf_{v \in X} F(v)$$

<u>Preuve</u> : exercice.

<u>R.q</u> : Bien entendu, dans une telle situation, on ne peut esperer l'unicité.

<u>V. 3 Applications</u>

A) Soit Ω un domaine borné de. On considère une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$(4) \qquad g(t)\,t \geq 0 \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

$\exists\ 1 \leq p < 2^* \ \exists c > 0$ tels que

$$(5) \qquad |g(t)| \leq C(1 + |t|^{p-1}) \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

On a alors

Proposition V.3. Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$(\text{II}) \quad \begin{cases} -\Delta u + g(u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

Remarque : a) Les hypothèses faites sur g sont différentes de celles de la proposition IV.3 : ici on ne suppose pas g croissante. En revanche, il faut que g soit sous-critique (cf (5)), alors que dans la proposition IV.3 la g pouvait être critique.

b) Il n'y a pas forcément unicité de la solution.

Preuve de la proposition V.3. Avec les mêmes notations que dans la proposition IV.3, on vérifie que $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution de (II) ssi

$$dF(u) = 0,$$

où $F = (E - L) + W$. On cherche donc $u \in H \equiv H_0^1(\Omega)$ t.q

$$(6) \qquad F(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in H} F(v)$$

A cet effet, on applique la proposition V.1. On pose

$$\tilde{E} = E - L \quad , W =$$

de sorte que $\tilde{E}$ est coercive convexe. Par ailleurs (4) entraîne

$$G(t) = \int_0^t g(s)\,ds \geq 0$$

et donc

$$W \geq 0$$

Il en résulte que $F \geq \tilde{E}$ est coercive. Montrons pour conclure que W est compacte : comme l'application $H_0^1(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} L^p$ est compacte et que l'application $T_G : L^p \hookrightarrow L^1$ est continue, on a $T_G \circ i$ compacte. Comme $W = \mathcal{L}(T_G \circ i)$, le résultat en découle.

B) Traitons pour conclure un cas à paramètre. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le problème

$$(\text{III}_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + u^3 = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que les solutions de $(\text{III})_\lambda$ dans $H_0^1(\Omega)$ sont exactement les points critiques de la fonction F_λ définie de $H = H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ par

$$F_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega \frac{|u|^4}{4} - \lambda \int_\Omega \frac{|u|^2}{2}$$

Commençons par une remarque évidente

<u>Lemme V.1</u> : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u = 0$ est solution de (III_λ).

[On a donc la branche de solutions évidentes]

<u>Lemme V.2</u> : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, F_λ est coercive

<u>Preuve</u> : On a par Cauchy-Schwarz

$$\int_\Omega |u|^2 \leq \left(\int_\Omega |u|^4\right)^{1/2} |\Omega|^{1/2}$$

et donc

$$F_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \left(\int_\Omega |u|^4\right)^{1/2} \left[\frac{1}{4}\left(\int_\Omega |u|^4\right)^{1/2} - \lambda |\Omega|^{1/2}\right)$$

Il en résulte que le deuxième terme est positif dès que

$$\int_\Omega |u|^4 \geq 16\lambda^2 |\Omega|$$

et donc si $\|u\|_{L^4}^4 \geq 16\lambda^2|\Omega|$, on a

$$F_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2$$

On vérifie que la norme $N(u) = \|u\|_{L^4} + \|\nabla u\|_{L^2}$ est équivalente à la norme H_0^1. On obtient donc : $\exists A_\lambda > 0$ t.q si $N(u) \geq A_\lambda$

alors $\exists c > 0$ t.q

$$F_\lambda(u) \geq c N(u)^2 \quad , \forall u \in H, \quad \|u\| \geq A_\lambda .$$

F_λ est donc coercive.

Lemme V.3 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, F_λ est s.c.i pour la convergence faible

Preuve : exercice.

Lemme V.4 La fonction F_λ est convexe ssi $\lambda \leq \lambda_1$. Dans ce cas elle est alors strictement convexe.

Preuve

a) Demonstrons d'abord que si $\lambda \leq \lambda_1$, F strictement convexe

On a $\forall u \in H_0^1(\Omega)$

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 .$$

Il en resulte que si $\lambda \leq \lambda_1$ la forme bilineaire a_λ definie par

$$a_\lambda(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v - \lambda \int_\Omega u . v$$

et positive et donc $a_\lambda(u,u)$ est convexe. Comme

$$F_\lambda(u) = \frac{1}{2} a_\lambda(u,u) + W(u)$$

où

$$W(u) = \int \frac{u^4}{4}$$

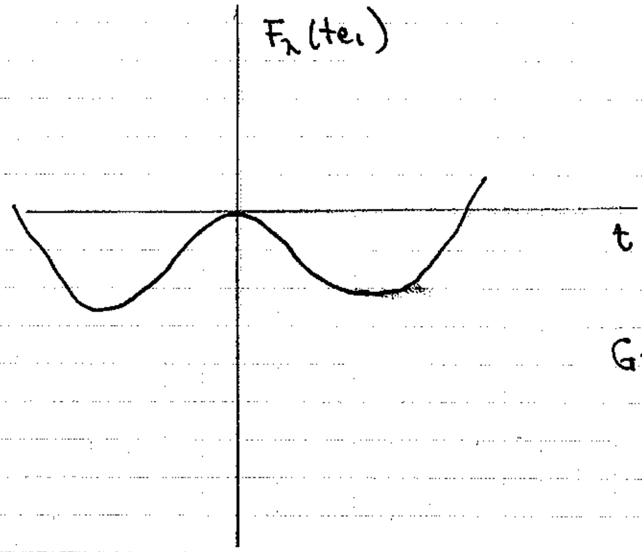
est strictement convexe, on obtient le resultat

b) Pour $\lambda > \lambda_1$ F n'est pas convexe. Soit e_1 la fonction propre positive associée à λ_1 telle que $\|e_1\|_{L^2} = 1$. Montrons que la restriction de F_λ à $V = \mathbb{R}e_1$ n'est pas convexe. On a

$$F_\lambda(te_1) = t^2 \left[\int_\Omega |\nabla e_1|^2 - \lambda \int_\Omega e_1^2 \right] + \frac{t^4}{4} \int_\Omega |e_1|^4$$

$$= t^2 (\lambda_1 - \lambda) + \frac{t^4}{4} \int_\Omega |e_1|^4$$

Pour $\lambda > \lambda_1$ $(\lambda_1 - \lambda) < 0$ et cette fonction n'est pas convexe.



Graphe de $F_\lambda(te_1)$

On a alors

Proposition V.4. a) Pour $\lambda \leq \lambda_1$ F_λ est convexe strictement, coercive $u=0$ est donc l'unique solution de (III_λ) et

$$0 = F_\lambda(0) = \operatorname*{Inf}_{v \in H} F_\lambda(v) .$$

b) Pour $\lambda > \lambda_1$, on a

$$(7) \qquad \operatorname*{Inf}_{v \in H} F_\lambda(v) < 0 = F(0)$$

et F_λ possède alors deux solutions distinctes (opposés $(u_\lambda, -u_\lambda)$ tels que

$$u_\lambda > 0 \quad \text{sur } \Omega$$

et tel que

$$F(u_\lambda) = F(-u_\lambda) = \operatorname*{Inf}_{v \in H} F_\lambda(u)$$

Preuve : a) évident

b) On a vu que

$$F(te_1) = -(\lambda - \lambda_1)\, t^2 + \alpha t^4 \qquad \text{où } \alpha = \int_\Omega e_1^4 > 0 .$$

et donc si t petit

$$F(te_1) < 0 .$$

(7) en résulte.

Nous laissons les autres affirmations en exercice.