Université Pierre et Marie Curie — Année Universitaire 1999-2000

DEA "Analyse Numérique" — 2^{eme} Semestre

Examen "Méthodes variationnelles..."

7 JUIN 2000

Durée : 3 heures

Le sujet comporte deux exercices indépendants.

Exercice 1

Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^2$. On considère, pour $\lambda \geq 0$ la fonctionnelle E_λ définie par

$$E_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{8}\int_\Omega (u^4 - 1)^2 .$$

I) a) Montrer que $\forall \lambda \geq 0$, E_λ est bien définie sur $H_0^1(\Omega)$.

b) Montrer que $\forall \lambda \geq 0$, E_λ est de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ et que les points critiques de E_λ vérifient l'équation

$$(I_\lambda) \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^3 (1 - u^4) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

c) Montrer que, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (I_λ), on a $|u| \leq 1$ sur Ω.

d) Montrer que toute solution de (I_λ) appartient à $C^\infty(\bar{\Omega})$.

e) Montrer que 0 est solution de I_λ, et qu'il s'agit d'un minimum local de E_λ, $\forall \lambda \geq 0$.

II) a) Montrer que $\forall \lambda \geq 0$, et $\forall u$ solution de (I_λ), on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \lambda \int_\Omega |u|^2 .$$

b) En déduire qu'il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^+_*$ tel que $\forall\, 0<\lambda<\lambda^*$, 0 est la seule solution de (I_λ).

III) Soit φ une fonction de classe C^∞, à support compact dans Ω, telle que :

$$\begin{cases} - & 0 \leq \varphi(x) \leq 1, \quad \forall x \in \Omega \\ - & \varphi(x) \equiv 1, \quad \forall x \in \Omega' \text{, où } \Omega' \text{ est un ouvert non vide } \subset \Omega. \end{cases}$$

a) Montrer qu'il existe $\lambda_1 > \lambda^*$ tel que $E_\lambda(\varphi) < E_\lambda(0)$, si $\lambda \geq \lambda_1$. En déduire que 0 ne minimise pas E_λ sur $H^1_0(\Omega)$, pour $\lambda \geq \lambda_1$.

b) Montrer que, $\forall \lambda \geq \lambda_1$, il existe $v_\lambda \in H^1_0(\Omega)$, $v_\lambda \neq 0$, t.q

$$E_\lambda(v_\lambda) = \operatorname{Inf}\{E_\lambda(u),\, u \in H^1_0(\Omega)\}$$

c) Montrer que v_λ ne s'annule pas sur Ω.

d) Montrer que, $\forall \lambda \geq 0$, E_λ vérifie la condition de Palais-Smale. En déduire que si $\lambda \geq \lambda_1$, alors on peut trouver une nouvelle solution w_λ par le Théorème du col.

IV*. Étudier la limite $\lambda \to +\infty$ de v_λ.

EXERCICE 2.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, régulier. On note $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les valeurs propres de $-\Delta$ (rangées par ordre croissant et multiplicité) sur $H^1_0(\Omega)$, et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les vecteurs propres correspondants, i.e

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n & \text{sur } \Omega & \lambda_n \nearrow +\infty \\ e_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \|e_n\|_{L^2} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la fonctionnelle F_α définie sur $H^1_0(\Omega)$ par

$$F_\alpha(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\alpha}{2}\int_\Omega u^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega u^4.$$

I a) Vérifier brièvement que F_α est de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$.

b) Montrer que F_α vérifie la condition de Palais-Smale pour $\alpha < \lambda_1$, où λ_1 désigne la première valeur propre de $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$.

II On suppose dorénavant et jusqu'à la fin de l'exercice que $\alpha < \lambda_1$. On rappelle que e_1 ne s'annule pas sur Ω : on peut donc choisir $e_1 > 0$ sur Ω.

a) Montrer que 0 est un minimum local de F_α.

b) Montrer qu'il existe un nombre $\mu_\alpha \in \mathbb{R}^+$, tel que $F_\alpha(\mu_\alpha e_1) < -1$.

c) On pose

$$c_\alpha = \operatorname{Inf}_{p \in \mathcal{P}} \left(\operatorname{Max}_{s \in [0,1]} F_\alpha(p(s)) \right),$$

où

$$\mathcal{P} = \left\{ p \in C^0([0,1], H_0^1(\Omega)),\ p(0)=0,\ p(1) = \mu_\alpha e_1 \right\}.$$

Montrer que c_α est une valeur critique de F_α. On note u_α un point critique correspond à c_α. Rappeler (brièvement) les arguments du cours qui permettent de choisir u_α de sorte que $u_\alpha > 0$ sur Ω.

d) Montrer que $0 \leq c_\alpha \leq C(\lambda_1 - \alpha)^2$, où C est indépendant de α. En déduire que $c_\alpha \to 0$ lorsque $\alpha \to \lambda_1$ $(\alpha < \lambda_1)$, puis que

$$\|u_\alpha\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \quad \alpha \to \lambda_1 \quad (\alpha < \lambda_1).$$

III On étudie ici le comportement de u_α lorsque $\alpha \to \lambda_1$ $(\alpha < \lambda_1)$. On pose à cet effet $\varepsilon^2 = \lambda_1 - \alpha$ $(\varepsilon > 0)$.

a) Montrer que $\dfrac{u_\alpha}{\|u_\alpha\|_{H_0^1(\Omega)}} \longrightarrow \dfrac{e_1}{\|e_1\|_{H_0^1(\Omega)}}$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

b) En reprenant les idées du cours montrer que

$$u_\alpha = C_1 \varepsilon e_1 + v_2,$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ est une constante que l'on déterminera, et où

$$\begin{cases} \cdot\ v_2 \in (\mathbb{R} e_1)^\perp \equiv \left\{ v \in L^2(\Omega),\ \int_\Omega v e_1 = 0 \right\} = \operatorname{vect}\{(e_n), n \geq 2\} \\ \cdot\ \|v_2\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^3 \end{cases}$$

Université Pierre et Marie Curie — Année Universitaire 2000-2001

DEA Analyse Numerique — 1^{er} Semestre

"Equation elliptiques"

Examen du 31 Janvier 2001
Durée : 3h.

Le sujet comporte trois exercices indépendants. Les questions délicates sont précédées de $*$.

Exercice 1

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ les valeurs propres de $-\Delta$, rangées par ordre croissant, sur $H_0^1(\Omega)$, et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$ de vecteurs propres associés i.e

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n \text{ sur } \Omega \qquad e_n \in H_0^1(\Omega), \ \|e_n\|_{L^2} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit g une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que

$$\frac{g(t)}{t} \longrightarrow \mu_1, \text{ lorsque } t \to 0$$

$$\frac{g(t)}{t} \longrightarrow \mu_2, \text{ lorsque } |t| \to +\infty,$$

où μ_1 et μ_2 sont deux nombres vérifiant

(H1) $$0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2.$$

On pose $G(t) = \int_0^t g(s)\,ds$, et on considère la fonctionnelle F définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega G(u).$$

I) 1) Montrer que F est de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ et que les points critiques de F vérifient

$$(I) \begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2) Montrer que 0 est solution de (I), et est un minimum local de F.

3) Montrer que $F(te_1) \to -\infty$ lorsque $t \to +\infty$, et en déduire $\inf_{u \in H_0^1} F = -\infty$. (Indication : vérifier que $\frac{G(t)}{2t^2} \longrightarrow \mu_2$ lorsque $|t| \to +\infty$)

I) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H_0^1(\Omega)$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H^{-1}(\Omega)$ t.q

$$\begin{cases} -\Delta u_n = g(u_n) + f_n & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et $f_n \longrightarrow 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$. On pose

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{H_0^1}} .$$

1) Vérifier $\|v_n\|_{H_0^1} = 1$. Montrer que, pour une s-suite $(v_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $v_{\sigma(n)} \rightharpoonup v$ dans $H_0^1(\Omega)$ faiblement, $v_{\sigma(n)} \longrightarrow v$ fort dans $L^2(\Omega)$ et $v_{\sigma(n)}(x) \to v(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$.

2) On suppose dans cette question $\|u_{\sigma(n)}\|_{H_0^1} \to +\infty$. Montrer qu'alors $\dfrac{g(u_{\sigma(n)}(x))}{\|u_{\sigma(n)}\|_{H_0^1}} \longrightarrow \mu_2 v(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$, et que v vérifie : $-\Delta v = \mu_2 v$, dans Ω. Conclure.

3) Déduire de la question précédente, qu'il existe $c>0$ t.q $\|u_{\sigma(n)}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c$.

4) Montrer que $u_{\sigma(n)}$ converge ds $H_0^1(\Omega)$, et que F vérifie la condition de Palais-Smale.

III. Montrer, en utilisant le Lemme du Col que (I) possède une solution non nulle.

Exercice II

A) Soient X et Y deux espaces de Banach, Φ une application de classe C^1 de X vers Y. On suppose :

(H1) $\forall x \in X$, $d\Phi(x) \in \mathrm{Inv}(X, Y)$ (i.e $d\Phi(x)$ est inversible)

(H2) $\forall K$ compact $\subset Y$, $\Phi^{-1}(K)$ est un compact de X (on dit alors que Φ est propre)

1) Montrer que (H1) entraîne que $\forall y \in Y$, $\Phi^{-1}(\{y\}) = \{x \in X,\ \Phi(x) = y\}$ est constitué de points isolés $\{$ i.e $\forall x \in \Phi^{-1}(\{y\}), \exists \varepsilon > 0$, t.q $B(x,\varepsilon) \cap \Phi^{-1}(\{y\}) = \{x\} \}$.

2) Déduire de (H2) que $\Phi^{-1}(\{y\})$ est constitué d'un <u>nombre fini</u> de points. On note $[y] = \mathrm{Card}\, \Phi^{-1}(\{y\})$.

3) Montrer que $\forall y \in Y$, $\exists \delta > 0$ tq $\|y - y_0\| \leq \delta \Rightarrow [y] \geq [y_0]$,

c'est à dire que $y \to [y]$ est semi-continue inférieurement.

*4) Montrer qu'en fait $y \to [y]$ est continue sur Y (on pourra raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe $y \in Y$, $y_n \to y$ t.q $[y_n] \geq [y]+1$).

5) En déduire que $[y]$ est constante sur Y, égale à $[0]$.

B) Application. Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On pose $X = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ $Y = L^2(\Omega)$, et $\Phi : X \to Y$ définie par $\Phi(u) = -\Delta u - g(u)$, où g est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $g(0)=0$, et t.q $\exists \mu > 0$, t.q

$$|g'(t)| \leq \mu, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On suppose de plus que $\mu < \lambda_1$, où λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$ sur $H_0^1(\Omega)$, i.e $\lambda_1 = \operatorname{Inf} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2, \ u \in H_0^1(\Omega), \ \|u\|_{L^2} = 1 \right\}$.

1) Vérifier que $|g(t)| \leq \mu |t|, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que Φ est C^1 sur X. Calculer $d\Phi$.

3) Montrer que $\forall u \in X$, $(\lambda_1 - \mu) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sqrt{\lambda_1} \|\Phi(u)\|_{L^2(\Omega)}$.

*4) En déduire que $\Phi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, puis que Φ est propre, i-e vérifie l'hypothèse (H2). Montrer que $d\Phi(u) \in \operatorname{Inv}(X, Y)$, $\forall u \in X$.

5) Montrer que $\forall h \in L^2(\Omega), \exists ! h \in H^2(\Omega)$ t.q

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) + h & \text{ds } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

EXERCICE III

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. On pose

$$H^1_{loc}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \ u_{|K} \in H^1(K), \ \forall K \text{ compact inclus dans } \Omega \}$$

et $W(\Omega) = C^0(\Omega) \cap H^1_{loc}(\Omega)$. On s'intéresse aux solutions faibles de l'équation

$$(\mathrm{I}) \quad -\Delta u + u^3 = 0 \quad \text{sur } \Omega,$$

i.e telles que $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi + u^3 \varphi = 0$.

On pose $\Sigma(\Omega) = \{ u \in W, \ u \text{ solution de (I)}, \ u \geq 0 \}$, ensemble des solutions positives

Enfin, on dira que $v \in W$ est <u>sursolution</u> de (I) ssi $-\Delta v + v^3 \geq 0$, i.e

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, on a $\int_\Omega \nabla v.\nabla\varphi + v^3\varphi \geq 0$.

I) Soient $\bar{u} \in H^1(\Omega)\cap C^0$, sursolution de (I), et $u \in H^1(\Omega)\cap C^0$ solution de (I)
Montrer que si $\bar{u} \geq u$ sur $\partial\Omega$, alors $\bar{u} \geq u$ dans Ω (on pourra considérer $(u-\bar{u})^+$).

II) Pour $x \in \mathbb{R}^N$, $a>0$, soit $B(0,a)$ la boule ouverte de centre x, de rayon a. Dans cette partie, $\Omega = B(0,a)$. On rappelle que si v, définie sur $B(0,a)$, ne dépend que de $r=|x|$, i.e $v(x)=f(r)$ (où $f : [0,a[\to \mathbb{R}$), alors $\Delta v = f''(r) + \frac{N-1}{r} f'(r)$.

1) Pour $p>0$, soit la fonction $v_a = \frac{1}{(r-a)^p}$. Vérifier que $v_a \in W(B(0,a))$.

2) Montrer qu'il existe $p_0>0$, $m_0>0$, t.q $\bar{u}_a = \frac{m_0}{(r-a)^{p_0}}$ soit une sursolution de (I) sur $B(0,a)$.

3) Soit b et α t.q $0<b<\alpha<a$, et $u \in \Sigma(B(0,a))$. Vérifier que si $\alpha-b$ est assez petit alors $\bar{u}_\alpha \geq u$ sur $\partial B(0,b)$. En déduire que $0 \leq u(0) \leq \frac{m_0}{b^{p_0}}$.

4) Montrer que si $u \in \Sigma(B(0,a))$, alors $0 \leq u(0) \leq \frac{m_0}{a^{p_0}}$.

III On revient au cas où Ω est un domaine borné régulier quelconque. Montrer que si $u \in \Sigma(\Omega)$, alors $\forall x_0 \in \Omega$, $0 \leq u(x) \leq \frac{m_0}{\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)^{p_0}}$.

IV On pose $X = H^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$, et on considère la norme sur X : $\|u\|_X = \|u\|_{H^1} + \|u\|_{L^4}$.
Pour $k>0$, soit $X_k = \{u \in X,\ u_{|\partial\Omega} = k\}$. Sur X_k, on considère la fonctionnelle F définie par $F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega |u|^4$, $\forall u \in X_k$.

1) Vérifier que X_k est un espace de Banach, que F est C^1 sur X_k, et que les points critiques de F vérifient l'équation (I).

2) Montrer que, pour $k>0$, il existe une unique solution $u_k \in X_k$ de (I).

3) Vérifier que $u_k \geq 0$ dans Ω, et $u_k \in C^0(\bar{\Omega})$.

4) Montrer que $\forall x \in \Omega$, la suite $u_k(x)$ est croissante, bornée. En déduire que la limite $u_* = \lim_{k\to+\infty} u_k(x)$ existe.

5) Montrer que $u_* \in \Sigma(\Omega)$, et que $\forall u \in \Sigma(\Omega)$, $0 \leq u \leq u_*$.

* 6) Vérifier que $u_*(x) \to +\infty$ lorsque $x \to \partial\Omega$.

Université Pierre et Marie Curie

Année Universitaire 2001 - 2002

DEA ANALYSE NUMÉRIQUE

EQUATIONS ELLIPTIQUES LINÉAIRES ET NON LINÉAIRES.

Examen du 30 Janvier 2002

Durée : 3 heures

Documents autorisés

Le sujet comporte deux exercices indépendants.

EXERCICE I

Rappels : On rappelle que si F est convexe C^1 sur X, alors $dF(u)=0 \Leftrightarrow F(u)=\inf_{v\in X} F(v)$, et que si $u,v \in X$, alors $(dF(u)-dF(v))(u-v) \geq 0$.

Soit $D^2=\{(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2, x_1^2+x_2^2<1\}$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$. Soit $q>2$ donné. Pour $f \in L^q(D^2)$, on considère le problème : trouver $u \in W^{2,q}(\Omega)$ tel que

$$(I)\quad \begin{cases} (1) & -\operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \quad \text{sur } \Omega \\ (2) & u=0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $|\nabla u|^2=\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2$.

A) 1) S'agit-il d'un problème linéaire ?

2) Montrer que si $f=0$ alors $u=0$ est la seule solution de (I).

B) On pose $X=W^{2,q}(\Omega)\cap W_0^{1,q}(\Omega)$, $Y=L^q(\Omega)$ et pour $v\in X$,

$$G(v)=-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}}\right)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right).$$

1) Vérifier que si $v \in X$, alors $|\nabla v|^2 \in C^0(\bar{D}^2)$.

2) Montrer que G est de classe C^1 de X vers Y. Calculer $DG(0)$.

3) Montrer, en utilisant le Théorème d'inversion locale, qu'il existe $\delta>0$, $\varepsilon>0$, t.q si $\|h\|_{L^q(D^2)} \leq \delta$, alors il existe une unique solution $u \in X$ de (I) vérifiant $\|u\|_{W^{2,q}(D^2)} \leq \varepsilon$.

4) Montrer que si $h \geq 0$, alors $u \geq 0$.

C 1) Montrer que les solutions de (I) sont points critiques, sur X de la fonction S définie par $S(v) = \int_{D^2} \sqrt{1+|\nabla v|^2} - hv \quad , \forall v \in X$.

2) S est-elle C^1 ? Convexe ? coercive ?

3) Montrer que si (I) a une solution, elle est forcément unique.

4) Montrer que si $h \equiv h_0$ est constante sur D^2, et si $|h_0|$ est assez grand, alors $\inf_{v \in X} S(v) = -\infty$. Que peut-on en conclure ?

5) L'espace X vous semble-t-il naturel pour traiter le problème de minimisation ? Par quel espace faudrait-il le remplacer ? Quelles difficultés rencontre-t-on ?

D) Pour $i = 1, 2$, soit $h_i \in L^q(D^2)$, et $u_i \in X$, t.q $G(u_i) = h_i$. On suppose $h_1 \geq h_2$. Montrer qu'alors $u_1 \geq u_2$.

E) On suppose de nouveau que h est constante sur D^2, i.e $h = h_0$. Soit $u \in X$ t.q $G(u) = h_0$.

1) Montrer que u est à symétrie radiale, i.e $u(x) = f(|x|)$, où f est une fonction de $[0,1]$ ds $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 0$.

2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$-\frac{d}{dr}\left(r \frac{f'(r)}{\sqrt{1+f'^2(r)}}\right) = h_0 r \qquad \text{sur } [0,1] .$$

3) Résoudre explicitement l'équation et dire pour quelles valeurs de h_0 il existe une solution.

4) Interpréter !

EXERCICE 2

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$. On rappelle que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, et que $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, $S \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, où $2^* = \frac{2N}{N-2}$ et où S est une constante indépendante de Ω.

Soit V une fonction définie sur Ω. On suppose dans tout l'exercice que :

$$V \in L^{N/2}(\Omega).$$

I A 1) Montrer que $\forall u \in H^1(\Omega)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$ $Vuv \in L^1(\Omega)$ et

$$\left| \int_\Omega Vuv \right| \leq C \|V\|_{L^{N/2}(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

2) Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. Montrer que $u \in H^1(\Omega)$ est solution de

$$(1) \qquad -\Delta u + V(x)\, u = f \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

ssi $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$(2) \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + V(x) u \varphi = \int_\Omega f \varphi$$

3) Montrer que si $V(x) \geq 0$, alors (1) possède une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

4) Montrer qu'il existe $\delta_0 > 0$, t.q si $\|V^-\|_{L^{N/2}(\Omega)} \leq \delta_0$, alors (1) possède une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ [Ici $V^- = \mathrm{Inf}\{V, 0\}$].

B) 1) Montrer qu'il existe une base Hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$, et une suite croissante $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tels que $e_n \in H_0^1(\Omega)$, $\forall n$, $\lambda_n \to +\infty$, et

$$-\Delta e_n + V(x) e_n = \lambda_n e_n \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

[On pourra commencer par le cas $\|V^-\|_{L^{N/2}(\Omega)} \leq \delta_0$].

C) On suppose dans cette partie que $N = 3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, tq $\lambda < \lambda_1$. Montrer en utilisant le lemme du col, que l'équation

$$-\Delta u + V(x) u = \lambda u + u^3$$

possède une solution non nulle $u \in H_0^1(\Omega)$.

II) On considère dans cette partie une solution $w \in H^1(\Omega)$ de

$$(3) \qquad -\Delta w + V(x)\, w = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Soit $x_0 \in \Omega$, $\rho>0$ t.q $B(x_0,\rho) \subset \Omega$, et soit $\eta \in C_c^\infty(B(x_0,\rho))$.

4

A) On suppose dans toute cette partie que $w \in L^\infty(\Omega)$.

1) Montrer que $\forall p \geq 1$, $\varphi_+ = w_+^p \eta^2$, $\varphi_- = w_-^p \eta^2$ appartiennent à $H_0^1(\Omega)$.

2) Montrer que pour une constante $C_0>0$ indépendante de x_0, ρ et Ω

$$\int_\Omega |\nabla |w|^{\frac{p+1}{2}} \eta|^2 \leq C_0 \left(\int_\Omega |w|^{p+1} |\nabla \eta|^2 + \left(\int_{B(x_0,\rho)} |V(x)|^{N/2}\right)^{2/N} \left(\int_\Omega ||w|^{\frac{p+1}{2}} \eta|^{2^*}\right)^{2/2^*}\right)$$

3) Montrer qu'il existe $\delta_1>0$ t.q si

$$(4) \quad \left(\int_{B(x_0,\rho)} |V(x)|^{N/2}\right) \leq \delta_1$$

alors
$$\int_\Omega |\nabla(|w|^{\frac{p+1}{2}} \eta)|^2 \leq 2C_0 \int_\Omega |w|^{p+1} |\nabla \eta|^2 .$$

4) En déduire que $\forall q \geq 2$, il existe une constante $C(q,\rho)$ telle que si (4) est vérifié, on a
$$\left(\int_{B(x_0,\frac{\rho}{2})} |w|^q\right)^{1/q} \leq C(q,\rho)\left(\int_{B(x_0,\rho)} |w|^2\right)^{1/2} .$$

B) On ne suppose plus ici que que $w \in L^\infty(\Omega)$. Pour $k>0$, on pose $w_k^+ = \max\{w_+, k\}$

1) Montrer que $w w_k^{+\,p-1} \eta^2 \in H_0^1(\Omega)$, $\forall p \geq 2$, et que
$$\int_\Omega |\nabla(w w_k^{+\frac{p-1}{2}} \eta)|^2 \leq C_0 \left[\int_\Omega |w|^{p+1} |\nabla \eta|^2 + \left(\int_{B(x_0,\rho)} |V(x)|^{N/2}\right)^{2/N} \left(\int_\Omega |w w_k^{+\frac{p-1}{2}} \eta|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}\right.$$

2) En déduire que si V vérifie (4), et $w \in L^{p+1}_{loc}(\Omega)$, alors la suite $w w_k^{+\frac{p-1}{2}} \eta^2$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, puis que $|w|^{\frac{p+1}{2}} \eta \in H_0^1(\Omega)$.

3) Montrer que si $w \in L^{p+1}_{loc}(\Omega)$, alors $w \in L^{\lambda(p+1)}_{loc}(\Omega)$, pour $\lambda = \frac{2^*}{2}$.

5) Montrer que $\forall q>1$, $w \in L^q_{loc}(\Omega)$.

C) On suppose ici $N \leq 4$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de l'équation
$$-\Delta u = u^3 \quad \text{dans } \Omega .$$

1) Montrer, en utilisant la question B5) que $u \in L^q(\Omega)$, $\forall q \geq 2$.

2) En déduire que $u \in C^\infty(\Omega)$.

Université Pierre et Marie Curie | Année Universitaire

2001 - 2002

DEA ANALYSE NUMERIQUE

Equations elliptiques linéaires et non linéaires

Examen du 10 Septembre 2002

Durée : 3 heures

Documents autorisés.

Le sujet comporte deux exercices indépendants.

EXERCICE I

Soit $D^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$, et soit W l'espace de fonctions $W = W_0^{1,4}(D^2) = \{u \in W^{1,4}(D^2),\ u_{|\partial D^2} = 0\}$. Pour $f \in L^2(D^2)$ donné, on considère la fonctionnelle F_f définie sur W par

$$F_f(v) = \frac{1}{4}\int_{D^2} (|\nabla v|^2 + 1)^2 - \int_{D^2} f \cdot v, \qquad \forall v \in W.$$

I a) Vérifier que F est bien définie sur W, de classe C^1.

b) Montrer que, pour tout $f \in L^2(D^2)$, il existe un unique $u_f \in W$ tel que

$$F_f(u_f) = \mathrm{Inf}\{F_f(v),\ v \in W\}.$$

c) Vérifier que u_f est l'unique solution dans W de l'équation

$$\text{(I)} \qquad -\operatorname{div}((|\nabla u|^2 + 1)\nabla u) = f \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(D^2).$$

d) Montrer qu'il existe une constant $C > 0$, indépendante de f telle que

$$\|\nabla u_f\|^3_{L^4(D^2)} \leq C \|f\|_{L^2(D^2)}$$

e) Montrer que si $f \geq 0$, alors $u_f \geq 0$.

f) De manière générale, montrer que si $f_1 \geq f_2$, alors $u_{f_1} \geq u_{f_2}$.

g) On suppose f à symétrie radiale, i.e qu'il existe une fonction

$\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \tilde{f}(|x|)$, $\forall x \in D^2$. Montrer que u_f est à symétrie radiale, i.e qu'il existe $\tilde{u}_f : [0,1] \to \mathbb{R}$, tel que $u_f(x) = \tilde{u}_f(|x|)$, $\forall x \in D^2$. Préciser l'équation différentielle vérifiée par $\tilde{u}_f$.

II On considère dans cette partie les espaces de Banach

$$X = W^{2,3}(D^2) \cap W_0^{1,3}(D^2) \quad , \quad Y = L^3(D^2)$$

et l'application $T : X \to Y$ définie par

$$Tv = -\operatorname{div}\left((|\nabla v|^2 + 1)\nabla v\right) \quad , \forall v \in X .$$

a) Montrer que T est de classe C^1 de X vers Y.

b) Montrer que T est injective

c) En utilisant le Théorème d'inversion locale, montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que si $\|f\|_{L^3(D^2)} \leq \varepsilon$, alors $u_f \in W^{3,3}(D^2)$.

III On s'intéresse dans cette partie au problème : trouver $u \in W_0^{1,4}(D^2)$ u non nul, tel que

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} -\operatorname{div}\left((|\nabla u|^2 + 1)\nabla u\right) = u^5 & \text{dans } \mathcal{D}'(D^2) \\ u = 0 & \text{sur } \partial D^2 \end{cases}$$

a) De quelle fonctionnelle E les solutions $u \in W_0^{1,4}(D^2)$ de (II) sont-elles les points critiques ?

b) Montrer que E vérifie la condition de Palais-Smale.

c) Démontrer l'existence d'une solution non nulle pour (II) à l'aide du Lemme du col.

Exercice II

Soit $I =]0,1[$ et $H = H_0^1[0,1]$. Pour $\lambda \geq 0$, on considère la fonctionnelle E_λ sur H définie par
$$E_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{v}^2 + \frac{\lambda^2}{4}\int_0^1 (v^2-1)^2$$
$\forall v \in H_0^1[0,1]$.

A I a) Vérifier que E_λ est de classe C^1 sur H, et que les points critiques de E_λ vérifie l'équation différentielle suivante
$$(A) \quad \begin{cases} -\dfrac{d^2}{dx^2} u = \lambda^2 u (1-u^2) & \text{sur } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

b) Montrer que si $u \in H$ est solution de (A), alors $u \in C^\infty(I)$, et
$$(1) \quad \frac{1}{2}\dot{u}^2(x) - \frac{\lambda^2}{4}(1-u^2(x))^2 = \frac{1}{2}\dot{u}^2(0) - \frac{\lambda^2}{4} = c^{te} \quad , \forall x \in [0,1]$$

c) En déduire que $|\dot{u}(0)| = |\dot{u}(1)|$.

d) Montrer que si u est solution de (A), alors
$$(2) \quad -\frac{d}{dx^2}(u^2-1) + 2\lambda^2 u^2 (u^2-1) \leq 0$$

e) En déduire que $0 \leq u^2 \leq 1, \ \forall x \in [0,1]$

II) On suppose, dans toute cette partie II que $u \in H$, vérifie A, et de plus est positive

i.e $\quad (3) \qquad u(x) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in [0,1]$

a) Montrer qu'alors $\dot{u}(0) \geq 0, \quad \dot{u}(1) = -\dot{u}(0) \leq 0$.

b) En déduire que si u vérifie (A) et (3), alors
$$u(x) = u(1-x) \quad , \ \forall x \in [0,1].$$

c) Montrer que si u vérifie (A) et (3), alors u est convexe sur $[0,1]$, $\max\limits_{x \in I} u(x) = u(\frac{1}{2})$ et $\dot{u} \geq 0$ sur $[0,\frac{1}{2}]$, $\dot{u} \leq 0$ sur $[\frac{1}{2},1]$. Montrer que si u n'est pas identiquement nulle, alors $u(x) > 0, \ \forall x \in]0,1[$.

III Soient u_1 et u_2 deux solutions positives, non identiquement nulles de (A), i.e (par II.c) $\quad u_1(x) > 0, \ u_2(x) > 0, \ \forall x \in I$. On suppose de plus que
$$\dot{u}_1(0) > \dot{u}_2(0)$$

a) Montrer que $\forall x \in]0,1[\quad u_1(x) > u_2(x)$. [On pourra raisonner par l'absurde, et considérer $x_0 = \operatorname{Inf}\{t \in I,\ u_1(t) = u_2(t)\}$].

b) Montrer que $\int_0^1 \dot{u}_1 u_2 = \int_0^1 u_1 u_2 (1 - u_1^2) = \int_0^1 u_1 u_2 (1 - u_2^2)$

c) En déduire $\int_0^1 u_1 u_2 (u_1^2 - u_2^2) = 0$.

d) Montrer que l'on aboutit à une contradiction, et qu'il existe donc au plus, une solution positive non identiquement nulle de (A).

B ... Pour $\lambda \geq 0$, on considère $\alpha_\lambda = \operatorname{Inf}\{E_\lambda(v),\ v \in H\}$

I a) Montrer que α_λ est atteint, i.e qu'il existe $u^\circ_\lambda \in H$ t.q $E_\lambda(u^\circ_\lambda) = \alpha_\lambda$

b) Montrer qu'alors on a $E_\lambda(|u^\circ_\lambda|) = \alpha_\lambda$. En déduire que u°_λ est de signe constant. On supposera par la suite que $u^\circ_\lambda \geq 0$

c) Montrer, en utilisant la partie ... que l'ensemble des minimiseurs de $E_\lambda(v)$ sur H est donné par $\{u^\circ_\lambda, -u^\circ_\lambda\}$ et contient donc, au plus, deux éléments.

II a) Montrer que si $0 \leq \lambda \leq \pi^2$, alors $u^\circ_\lambda = 0$, et si $\lambda > \pi^2$, alors u°_λ n'est pas nul

On pose $\varepsilon = \lambda - \pi^2$, pour $\lambda > \pi^2$

b) Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$, telle que, lorsque $\varepsilon \to 0^+$, on ait $\|u^\circ_\lambda - C\varepsilon^{1/2} \sin \pi x\|_{L^2} = o(\varepsilon^{1/2})$.

III a) Montrer, en utilisant (1) que $\frac{d}{dx} u^\circ_\lambda(x) \leq \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(1 - u^{\circ 2}_\lambda(x))\ \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$

b) En déduire que $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, $1 - u^\circ_\lambda(x) \leq 2 \exp - \sqrt{2}\lambda x$.

c) Montrer que $u^\circ_\lambda \to 1$ dans $L^2(I)$, lorsque $\lambda \to +\infty$

d) Montrer que $E_\lambda(u^\circ_\lambda) \sim C_1 \lambda$, lorsque $\lambda \to +\infty$, où C_1 est une constante que l'on précisera.

IV a) On considère, pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction w^k_λ définie par,

$$w^k_\lambda(x) = (-1)^k u^\circ_{k\lambda}(x - x_i), \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \text{ où } x_i = \frac{i}{k},$$

pour $i \in \{0, \dots k-1\}$. Montrer que w^k_λ est solution de A.

* b) Montrer que les fonctions w^k_λ et leurs opposés constituent TOUTES les solutions de A.

** c) Vérifier que w^2_λ est une solution col, pour $\lambda > 4\pi^2$.

Université Pierre et Marie Curie

DEA " Analyse Numérique "

Année Universitaire

2002 - 2003

EQUATIONS ELLIPTIQUES

LINEAIRES ET NON - LINEAIRES

Examen du 31 Janvier 2003

Durée : 3 heures

Documents autorisés

Le sujet comporte trois exercices indépendants

EXERCICE 1

On considère l'espace de Hilbert $H = H^1(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}),\ \dot{u} \in L^2(\mathbb{R})\}$.

I) Montrer que si $u \in H$, alors $|u(x)| \to 0$, lorsque $|x| \to +\infty$.

II) Pour $c > 0$, on considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

(1) $\quad -\ddot{u} + cu - u^2 = 0 \qquad$ sur $\mathbb{R}$.

1) Vérifier que les solutions $u \in H$ de (1) correspondent aux points critiques de la fonction $F \in C^1(H; \mathbb{R})$ définie par

$$F(v) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\dot{v}^2 + \frac{1}{2}cv^2 - \frac{v^3}{3}, \quad \forall v \in H.$$

2) Montrer que F possède la géométrie du col, mais que F ne vérifie pas la condition de Palais-Smale.

III) Pour trouver des solutions de (1), on introduit le problème auxiliaire :

(P_N) : trouver $u_N \in H_0^1([-N,N])$, t.q. $-\ddot{u}_N + cu_N - u_N^2 = 0$ sur $[-N,N]$.

1) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, le Théorème du col permet de trouver une solution $u_N > 0$ de (P_N). Vérifier que $u_N \in C^\infty([-N,N])$.

2) Montrer que si $x_N \in [-N,N]$ est tel que $u_N(x_N) = \underset{x \in [-N,N]}{\mathrm{Max}}\, u_N(x)$, alors $u_N(x_N) \geq c$.

3) Montrer que l'on peut supposer que $x_N \geq 0$ sans perdre de généralité

[On pourra considérer la fonction $\tilde{u}_N$ définie par $\tilde{u}_N(x) = u_N(-x)$].

3) On considère la fonction v_N définie sur $\mathbb{R}$ par

$$v_N(x) = u_N(x+x_N) \quad \text{pour} \quad -N-x_N \leq x \leq 0$$

$$v_N(x) = u_N(x-x_N) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq -N-x_N$$

et $v_n(x) = 0$ pour $x \notin [-(N+x_N), N+x_N]$.

Montrer que $v_N \in H^1(\mathbb{R})$, est paire, positive et que $v_N(0) \geq c$.

4) Montrer que v_N vérifie l'équation (1) sur $[-(N+x_N), N+x_N]$.

5) Montrer que les suites $(u_N)_{N\in\mathbb{N}}$ et $(v_N)_{N\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $H^1_0(\mathbb{R})$.

6) Montrer que pour une sous-suite $(v_{\sigma(N)})_{N\in\mathbb{N}}$, $v_{\sigma(N)}$ converge faiblement dans $H^1(\mathbb{R})$ vers une solution u non nulle, strictement positive, paire, de (1).

7) Vérifier que $u(0) \geq c$.

IV 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\dot{u}^2(x)}{2} + \frac{u^2(x)}{2} - \frac{u^3(x)}{3} = 0$.

2) En déduire une forme explicite de u.

V) En s'inspirant des parties précédentes, construire une solution $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, strictement positive, à symétrie radiale (i.e $u(x) = f(|x|)$, où $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$), de l'équation

$$-\Delta u + cu - u^2 = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2.$$

EXERCICE II

On considère l'espace de Hilbert $H = H^1(\mathbb{R}^2) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^2),\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^2), \forall i = 1,..,N\}$

On rappelle que l'injection $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ est continue, $\forall 1<q<+\infty$, et on admettra que $\forall \lambda > 0$, l'opérateur

$$(1) \qquad L_\lambda : H^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^2) \quad v \longmapsto L_\lambda(v) = -\Delta v + \lambda v$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

I) L'injection $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ est-elle compacte, pour $1<q<+\infty$?

II) Pour $\lambda > 0$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ on considère l'équation elliptique

$$(2) \quad -\Delta u + \lambda u + u^3 = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

1) Vérifier que $u \in H$ est solution de (2) ssi $\forall v \in H$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v + \lambda u v + u^3 v = \int_{\mathbb{R}^2} f v.$$

2) Montrer que les solutions $u \in H$ de (2) sont les points critiques d'une fonction F de classe C^1. Quelles sont les propriétés importantes de F ?

3) Montrer que l'équation (2) possède, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ une unique solution $u \in H$, notée $u = u_\lambda = T_\lambda(f)$, et que $F_\lambda(u_\lambda) = \alpha_\lambda(f) \equiv \operatorname{Inf}_{v \in H} F_\lambda(v)$.

4) Montrer que $u_\lambda \in H^2(\mathbb{R}^2)$, puis $u_\lambda \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

5 a) Montrer qu'il existe une constante $C_\lambda > 0$ t.q $\|T_\lambda(f)\|_{H^1} \leq C_\lambda \|f\|_{L^2}$.

b) Montrer que si $f_n \to f$ fort dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, alors $T_\lambda(f_n) \rightharpoonup T_\lambda(f)$ faiblement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, puis que $\alpha_\lambda(f_n) \to \alpha_\lambda(f)$.

c) Montrer que $u_n = T_\lambda(f_n)$ converge vers $u = T_\lambda(f)$ fortement dans H^1, puis que $u_n \to u$ fort dans H^2. Ainsi $\forall \lambda > 0$ T_λ est continue de L^2 vers H^2.

III 1) Vérifier que $T_\lambda(f) = -T_\lambda(-f)$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

2) Montrer que si $f \geq 0$, $f \neq 0$, alors $T_\lambda(f) > 0$.

3) Montrer que si $f_1 \geq f_2$, alors $T_\lambda(f_1) \geq T_\lambda(f_2)$. En déduire $|T_\lambda(f)| \leq T_\lambda(|f|)$.

4) Montrer que si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, alors $T_\lambda(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, et que

$$\sup_{\mathbb{R}^2} |u_\lambda|^3 \leq \sup_{\mathbb{R}^2} |f|.$$

IV) On suppose dans cette partie que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, supp $f \subset B(1)$. On pose pour $R > 0$

$$A_\lambda(R) = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(R)} |\nabla u_\lambda|^2 + \lambda |u_\lambda|^2 + |u_\lambda|^4.$$

1) Montrer que $\forall R > 1$ $\quad A_\lambda(R) = \left| \int_{\partial B(R)} u \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{\partial B(R)} |\nabla u|^2 + \lambda u^2.$

2) En déduire que $A_\lambda'(R) \leq -2\sqrt{\lambda}\, A_\lambda(R)$, et qu'il existe une constante $C_{0,\lambda} > 0$ telle que $\quad A_\lambda(R) \leq C_{0,\lambda} \exp(-2\sqrt{\lambda} R)$, $\forall R > 0$.

3) Montrer qu'il existe une constante $C_{1,\lambda} > 0$ telle que

$$(3) \quad |u_\lambda(x)| \leq C_{1,\lambda} \exp(-2\sqrt{\lambda}\, |x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

VI) 1) On suppose toujours $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp} f \subset B(1)$. Montrer qu'il existe $\lambda_n \to 0^+$, et une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ tel que $u_{\lambda_n} \to u$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^2$, et que u vérifie $-\Delta u + u^3 = f$ sur $\mathbb{R}^2$.

2) Construire une fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ et u solution de $-\Delta u + u^3 = f$ sur $\mathbb{R}^2$ tel que u ne soit pas à décroissance exponentielle.

EXERCICE III

Soit $I = [0,1]$, et $W_0 = \{ v \in C^2([0,1]; \mathbb{C}), \text{ t.q } v(0) = 1, v(1) = -1 \}$

I) On cherche $u \in W_0$ solution de l'équation

$$(1) \qquad \ddot{u} = i \|\dot{u}\|^2_{L^2(I)} \dot{u} \quad , u(0) = 1 \quad , u(1) = -1 .$$

1) Montrer que $|\dot{u}| = c^{te}$.

2) Montrer que l'unique solution de (1) est $u_0(x) = \exp i\pi x$.

II) Soit g une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ bornée. On considère l'application $\Phi : W_0 \times [0,1] \longrightarrow C([0,1]; \mathbb{C})$ définie par

$$\Phi(v,t) = -\ddot{v} + i(1 + t g(v)) \|\dot{v}\|_{L^2(I)} \dot{v} .$$

1) Montrer que l'application Φ est de classe C^1 et calculer

$\partial_v \Phi(v,t) w = d\Phi(v,t)(w,0)$, pour $w \in W = \{ w \in C^2([0,1]; \mathbb{C}), w(0) = w(1) = 0 \}$

2) En déduire que

$$\partial_v \Phi(u_0, 0) w = -\ddot{w} + i\pi \dot{w} - i\pi \alpha(w) \exp i\pi x$$

où $\alpha(w) = \int_0^1 \dot{w}(x) \exp i\pi x \, dx$.

3) Montrer que $\operatorname{Ker} \partial_v \Phi(u_0, 0) = \{0\}$.

4) Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une application ψ de classe C^1 de $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ vers W_0 telle que $\psi(0) = u_0$, et $v_\varepsilon = \psi(\varepsilon)$ vérifie

$$\ddot{v}_\varepsilon = i \|\dot{v}\|_{L^2} (1 + \varepsilon g(v)) \dot{v} \quad \text{sur } [0,1] .$$

* III) Montrer qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ telle que pour toute fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ b vérifiant $\|f\|_{C^1} \leq \varepsilon_1$, il existe une solution $u_\varepsilon \in W_0$ de

$$-\ddot{u}_\varepsilon = i \|\dot{u}_\varepsilon\|_{L^2} (1 + f(u_\varepsilon)) \dot{u}_\varepsilon \quad \text{sur } [0,1]$$

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE — Année Universitaire

DEA ANALYSE NUMERIQUE — 2002-2003

EQUATIONS ELLIPTIQUES LINEAIRES ET NON LINEAIRES.

Examen du 12 Septembre 2003

Durée : 3 heures

Documents autorisés.

Le sujet comporte deux exercices indépendants.

EXERCICE I

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre.

A) On considère le problème : trouver une fonction u_λ définie sur $[0,1]$ solution de

$$(P_\lambda)\quad \begin{cases} -u_\lambda'' = \lambda u_\lambda - \dfrac{u_\lambda^3}{1+u_\lambda^2} & \text{sur } [0,1], \\ u_\lambda(0) = u_\lambda(1) = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que les solutions u_λ de (P_λ) sont les points critiques sur $H_0^1[0,1]$ d'une fonctionnelle F_λ que l'on précisera.

b) Montrer que si $\lambda \leq \pi^2$, alors (P_λ) possède une unique solution que l'on déterminera.

c) Montrer que si $\pi^2 < \lambda < \pi^2 + 1$, $\operatorname{Inf} F_\lambda < +\infty$, et que l'infimum est atteint par une solution non nulle u_λ^0 de (P_λ).

d) Montrer que u_λ^0 ne s'annule pas sur $]0,1[$.

e) Montrer que lorsque $\lambda \to \pi^2$ $(\lambda > \pi^2)$, on a $u_\lambda^0 \sim \alpha(\lambda) \sin \pi x$ où l'on précisera la fonction $\lambda \to \alpha(\lambda)$.

f) Montrer que si $\lambda > \pi^2 + 1$, $\operatorname{Inf} F_\lambda = -\infty$.

g) En utilisant la théorie des bifurcations, montrer que (P_λ) a une solution non nulle pour $\lambda > 4\pi^2$. proche de $4\pi^2$.

B) On considère dans cette partie le problème : trouver v_λ sur $[0,1]$ solution de

$$(Q_\lambda) \quad \begin{cases} -v_\lambda'' = \lambda v_\lambda + \dfrac{v_\lambda^3}{1+v_\lambda^2} & \text{sur } [0,1] \\ v_\lambda(0) = v_\lambda(1) = 0 . \end{cases}$$

I a) Montrer que les solutions de (Q_λ) sont points critiques d'une fonctionnelle G_λ que l'on précisera.

b) Montrer que si $\lambda \leq \pi^2 - 1$, alors (Q_λ) possède pour unique solution 0.

c) Montrer que si $\lambda > \pi^2 - 1$, $\operatorname{Inf} G_\lambda = -\infty$.

II) On désire étudier dans cette partie la condition de Palais-Smale pour G_λ.

a) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H_0^1(0,1)$ telle que $\|w_n\|_{H_0^1} \to +\infty$. On pose $\tilde{w}_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|_{H_0^1}}$. Montrer que $(\tilde{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H_0^1 et que, pour une sous-suite, $\tilde{w}_{\sigma(n)}$ converge vers une fonction $\tilde{w}$, presque partout sur $[0,1]$, faiblement dans H_0^1, et fortement dans L^2.

b) Montrer que $\dfrac{w_{\sigma(n)}^3}{1+w_{\sigma(n)}^2} \cdot \|w_{\sigma(n)}\|_{H_0^1}^{-1} \longrightarrow \tilde{w}$ presque partout sur $[0,1]$.

c) On suppose dorénavant que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Palais-Smale pour G_λ. Montrer qu'alors $-\tilde{w}'' = (\lambda+1)\tilde{w}$ sur $[0,1]$.

d) En déduire que si $\lambda \notin \{k^2\pi^2 - 1,\ k\in\mathbb{N}\}$, $\tilde{w} = 0$ et que $\|w_n\|_{L^2} = o\left(\|w_n\|_{H_0^1}\right)$.

e) Montrer que si $\lambda \notin \{k^2\pi^2 - 1,\ k\in\mathbb{N}\}$, toute suite de Palais-Smale est bornée, puis que G_λ vérifie la condition de Palais-Smale.

III a) Montrer, en utilisant le Lemme du Col, que si $\pi^2 - 1 < \lambda < \pi^2$, alors (Q_λ) possède une solution qui ne s'annule pas sur $]0,1[$.

b) Etudier le comportement de v_λ lorsque $\lambda \to \pi^2$ $(\lambda < \pi^2)$.

EXERCICE II

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. Pour $1<p<+\infty$, on pose

$$W^{-1,p}(\Omega)=\left\{ v\in \mathcal{D}'(\Omega),\ \text{t.q}\ \exists C>0,\ \text{t.q}\ |\langle v,\varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \atop \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ \text{où}\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1 \right\}$$

On rappelle que $\forall f\in W^{-1,p}(\Omega)$ le problème $-\Delta u=f$ possède une unique solution $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, et que l'application $f\longmapsto u$ est un isomorphisme de $W^{-1,p}(\Omega)$ vers $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Pour $1\leq i,j\leq N$, on considère des fonctions bornées a_{ij} définies sur $\mathbb{R}^N$, telles que $a_{ji}=a_{ij}$ et telles qu'il existe $0<c_0\leq c_1$ t.q

$$c_0|\xi|^2 \leq \sum_{i\leq j} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leq c_1|\xi|^2 \quad \text{pour presque tout } x\in\mathbb{R}^N.$$

Enfin, pour $v\in W^{1,p}(\Omega)$, on pose

$$Lv=-\sum_{i\leq j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right).$$

I) a) Montrer que $\forall v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $Lv\in W^{-1,p}(\Omega)$ et que l'application L est linéaire continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ vers $W^{-1,p}(\Omega)$.

b) Montrer qu'il existe une constante $\varepsilon(p,\Omega)$ ne dépendant que de p et de Ω tel que si on a

$$(H_p) \qquad |a_{ij}(x)-\delta_{ij}| \leq \varepsilon(p,\Omega), \quad \forall x\in\mathbb{R}^N$$

alors L est un isomorphisme de $W_0^{1,p}(\Omega)$ vers $W^{-1,p}(\Omega)$ $(1<p<+\infty)$.

c) Montrer que si $\Omega=B(R)=\{x\in\mathbb{R}^N,\ \|x\|<R\}$, pour $R>0$, on peut choisir la constante $\varepsilon(p,B(R))$ dans (H_p) de manière indépendante de R.

d) Montrer que si $1<q<N$ et que si (H_p) est vérifiée pour $p=q^*=\frac{Nq}{N-q}$, alors $\exists!\, u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, tel que $Lu=f$.

II Soit $1<q<N$, et soit $u \in W^{1,q}(\Omega)$ tel que $Lu = 0$ (on ne suppose pas $u = 0$ sur $\partial\Omega$). Soit $\rho \in C_c^\infty(\Omega)$.

a) Calculer $L(\rho u)$ et montrer que $L(\rho u) \in L^q(\Omega) + W^{-1,q^*}(\Omega)$

b) En utilisant la partie I montrer que si (H_p) est vérifiée pour $p = q^*$, alors $\rho u \in W^{1,q^*}(\Omega)$.

c) En choisissant convenablement la fonction ρ, montrer que si $u \in W^{1,q}(\Omega)$ vérifie $Lu = 0$, et si (H_{q^*}) est vérifiée, alors $u \in W^{1,q^*}_{loc}(\Omega)$
[c.a.d, $\forall K$ compact $\subset \Omega$, $u \in W^{1,q^*}(K)$].

d) Soit $1<\ell<+\infty$. Montrer qu'il existe une constante η_ℓ tel que si $|a_{ij}(x) - \delta_{ij}| < \eta_\ell$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, et si $u \in W^{1,q}(\Omega)$ vérifie $Lu = 0$, alors $u \in W^{1,\ell}_{loc}(\Omega)$

III) On suppose dans cette partie que les fonctions a_{ij} sont continues.
Montrer que si $u \in W^{1,q}(\Omega)$ vérifie $Lu = 0$ $(1<q<+\infty)$, alors $u \in W^{1,\ell}_{loc}(\Omega)$, pour tout $1<\ell<+\infty$.
[On pourra recouvrir le domaine Ω par des boules de taille arbitraire, et utiliser la question I c]

Université Pierre et marie Curie — Année Universitaire 2003-2004
DEA Analyse Numérique

EXAMEN du 30 Janvier 2004

Durée: 3 heures

documents autorisés
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Les questions délicates sont signalées par *.

Exercice I

RAPPEL. Soit $N \geq 3$. Si u est une fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ qui ne dépend que de $r = |x|$, c'est à dire si $u(x) = f(|x|)$, où f est une fonction d'une variable réelle, alors

$$\Delta u = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{d}{dr}(r^{N-1} \frac{df}{dr}) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{(N-1)}{r} \frac{df}{dr}.$$

Pour $r > 0$, $B(x,r)$ désigne la boule de centre x et de rayon r, et on pose $B(r) = B(0,r)$.

I. Soit $\alpha > 0$ un nombre réel. Pour u définie sur $\overline{B}(1)$, on pose $L_\alpha(u) = -\Delta u + \alpha u$.
a- Montrer qu'il existe une constante c_N, ne dépendant que de N, telle que que $L_\alpha(exp(c_N\sqrt{\alpha}(|x|-1)) \geq 0$
b- En déduire que si u est une fonction régulière sur $\overline{B}(1)$ telle que $L_\alpha(u) \leq 0$ alors pour tout $x \in B(1)$

$$u(x) \leq exp(c_N\sqrt{\alpha}(|x|-1)) \sup_{y\in\partial B(1)} |u(y)|$$

c Soit $a > 0$ et soit u une fonction régulière telle que $|L_\alpha(u)| \leq a$ sur B(1). Montrer que pour tout $x \in B(1)$

$$|u(x)| \leq exp(c_N\sqrt{\alpha}(|x|-1)) \sup_{y\in\partial B(1)} |u(y)| + \frac{a}{\alpha}.$$

II. Soit $0 < \varepsilon < 1$ un paramètre, et g une fonction régulière définie sur $\overline{B}(1)$. On considère le problème

$$-\varepsilon\Delta u + u = g \ \text{ dans } B(1),\ u = 0 \text{ sur } \partial B(1).$$

a) Justifier brièvement l'existence d'une solution u régulière unique de ce problème.
b) Montrer que l'on peut écrire $u = g + w$, où la fonction w vérifie pour une constante $C_1 > 0$ indépendante de ε

$$\sup_{x\in B(\frac{1}{2})} |w(x)| \leq C_1 \|g\|_{C^2(B(1))}\varepsilon.$$

c*) Montrer de même que pour une constante $C_2 > 0$ indépendante de ε, on a

$$\sup_{x\in B(\frac{1}{2})} |\nabla w(x)| \leq C_2 \|g\|_{C^3(B(1))}\varepsilon.$$

III*). On considère dans cette partie, l'opérateur T défini, pour une fonction régulière u par $T(u) = -\Delta u + u^5$.
a) Montrer que si

$$T(u) \geq T(v), \text{ dans } B(1), \text{ et } u \geq v \text{ sur } \partial B(1),$$

alors $u \geq v$.
b) Montrer qu'il existe un exposant $p > 0$ et un nombre $\gamma_p > 0$ tel que la fonction φ_p définie sur $B(1)$ par

$$\varphi_p(x) \equiv \frac{\gamma_p}{(1 - |x|^2)^p}$$

vérifie $T(\varphi_p) \geq 0$.
c*).Déduire des questions précédentes qu'il existe une constante C_3 telle que si $T(u) \leq 0$ alors

$$\sup_{x \in B(\frac{1}{2})} u(x) \leq C_3.$$

Commenter.

Exercice II

RAPPEL. Soit $N \geq 2$. Si Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, alors $H^k(\Omega)$ s'injecte dans $C^0(\Omega)$ dès que $k > \frac{N}{2}$, avec injection compacte.

Soit $D^2 = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 < 1\}$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$. Pour $k \in \mathbb{N}_\star$, on pose

$$H_0^k(D^2) = \{v \in H^k(D^2),\ v = 0 \text{ sur } \partial D^2\} = H^k(D^2) \cap H_0^1(D^2).$$

Soit $b : \overline{D}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^∞. On considère l'application T définie, pour u application à valeurs réelles sur D^2 par

$$T(u) = -\Delta u + b.\nabla u + u^3,$$

(où $b.\nabla u = b_1 \partial_1 u + b_2 \partial u_2$).
I-a Montrer que T définie une application de classe C^1 de $H_0^4(D^2)$ vers $H^2(D^2)$. Déterminer l'application linéaire tangente $dT(u)$, pour tout u dans $H_0^4(D^2)$.
I-b Montrer que pour tout u dans $H_0^4(D^2)$, $dT(u) \in Inv(H_0^4(D^2), H^2(D^2))$.
I-c En déduire que l'image de $H_0^4(D^2)$ par T est une partie ouverte de $H^2(D^2)$, contenant 0.
I-d Montrer en particulier qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ telle que l'équation

$$T(u_0)(x) = \delta, \forall x \in D^2$$

possède une solution u_0 dans $H_0^4(D^2)$.

II-a Vérifier que T est impaire, i.e $T(-u) = T(u)$.
II-b Montrer que si $T(u) \leq T(v)$, alors $u \leq v$.
II-c* Déduire des questions I-d, II-a et II-b que

$$\forall u \in H_0^4(D^2) \quad -(\delta^{-1}\|T(u)\|_{L^\infty})u_0 \leq u \leq (\delta^{-1}\|T(u)\|_{L^\infty})u_0.$$

III-a* Montrer en utilisant la question II-c, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^4(D^2), \quad \|u\|_{H^4(D^2)} \leq C\|T(u)\|_{H^2(D^2)}.$$

III-b. En déduire que l'image de $H_0^4(D^2)$ par T est une partie fermée de $H^2(D^2)$.
III-c Montrer que pour tout f appartenant à $H^2(D^2)$ il existe une solution u dans $H_0^4(D^2)$ de l'équation

$$T(u) = f. \tag{1}$$

III-d Montrer que cette solution est unique.

IV Dans le cas particulier où $b \equiv 0$, connaissez-vous une autre méthode pour arriver aux conclusions de la partie III?

Exercice III

Soit $\lambda > 0$ un paramètre. On considère le problème: trouver une fonction u définie sur l'intervalle $I = [0,1]$ telle que

$$-\frac{d^2}{dx^2}u = \lambda u \exp(u^2), \text{ sur } [0,1], \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

I-a. Montrer, briévement que $H_0^1[0,1]$ s'injecte dans $C^0[0,1]$. L'injection est-elle compacte?
I-b. Montrer que les solutions u dans $H_0^1[0,1]$ de (2) sont exactement les points critiques de la fonctionnelle

$$F_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (|\frac{d}{dx}u|^2 - \lambda \exp u^2)dx$$

(on montrera que cette fonctionnelle est de classe C^1 sur $H_0^1[0,1]$).

II-a. Montrer qu'il existe λ_0, telle que si $0 < \lambda < \lambda_0$, alors F_λ possède la géometrie du Col.
II-b Montrer que l'on peut prendre $\lambda_0 = \pi^2$.

III. On étudie dans cette partie les suites de Palais-Smale pour F_λ. Soit $\{u_n\}_{n\in N}$ une suite de Palais-Smale pour F_λ , i.e telle que :

$$\exists C > 0, \text{ t.q } |F(u_n)| \leq C, \ \forall n,$$

$$-\frac{d^2}{dx^2}u_n = \lambda u_n \exp(u_n^2) + f_n,$$

où f_n tend vers zéro dans H^{-1}.
a) Montrer que pour une telle suite, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que $\forall n$

$$|\int_0^1 \lambda(u_n^2 - 1)\exp(u_n^2)| \leq C_1 + o(1)\|u_n\|_{H_0^1}$$

b) En déduire que la suite $\{u_n\}_{n\in N}$ est bornée dans $H_0^1[0,1]$.
c) Montrer que F vérifie la condition de Palais-Smale.

IV- a Montrer que si $0<\lambda<\pi^2$, alors l'équation (2) possède une solution non nulle.
IV- b sous la même hypothèse montrer que l'équation (2) possède une solution strictement positive de classe C^∞.

V. Dans cette question on considère le disque

$$D^2 = \{(x,y)\in R^2, x^2+y^2<1\}$$

et les fonctions de $H_0^1(D^2)$ qui possèdent la symétrie radiale, c'est à dire le sous espace

$$H^1_{0,\mathrm{rad}} = \{u\in H_0^1(D^2), t.q\ \exists f:[0,1]\to\mathbb{R},\ \text{tel que } u(x)=f(|x|) \text{ pour presque tout x} \in \mathrm{D}^2\}.$$

a) Montrer que $H^1_{0,\mathrm{rad}}$ est un sous-espace vectoiel fermé de $H_0^1(D^2)$ et que pour tout $u\in H^1_{0,\mathrm{rad}}$,

$$\int_{D^2}|\nabla u|^2 = 2\pi\int_0^1 r|\frac{df}{dr}|^2 dr,$$

où $\forall x\in D^2, u(x)=f(|x|)$.
b) Montrer qu'il existe une constante $C>0$, telle que si $u\in H^1_{0,\mathrm{rad}}$, alors, pour presque tout $x\in D^2$,

$$|u(x)|\leq C\sqrt{|ln|x||)}\|\nabla u\|_{L^2(D^2)}$$

c) Montrer que $H^1_{0,\mathrm{rad}}$ s'injecte dans $L^p(D^2)$, pour tout $1\leq p<\infty$. Cette injection est-elle compacte?
d*) On considère sur l'espace $H^1_{0,\mathrm{rad}}$, pour $\lambda>0$ la fonctionnelle

$$F_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{D^2}|\nabla u|^2 - \int_{D^2}\exp\lambda u dx$$

Montrer que F est de classe C^1 sur $H^1_{0,\mathrm{rad}}$, et que les points critiques de F sur $H^1_{0,\mathrm{rad}}$ vérifient l'équation

$$-\Delta u = \lambda\exp\lambda u,\ \text{sur } D^2,\quad u=0\ sur\ \partial D^2 \tag{3}$$

e*) Montrer en utilisant le Lemme du col, que si λ est assez petit, alors l'équation (3) possède une solution non nulle à symétrie radiale, de classe C^∞.

Université Pierre et marie Curie — Année Universitaire 2003-2004
DEA Analyse Numérique

EXAMEN du 6 septembre 2004

Durée : 3 heures

documents autorisés

Le sujet comporte deux exercices indépendants. Les questions délicates sont signalées par *.

Exercice I

soit $I = [0,1]$ et f une fonction continue sur I. Soit v une fonction de classe C^2 sur I, telle que

$$-\ddot{v} + v = f, \quad v(0) \geq 0, \quad v(1) \geq 0.$$

I) Montrer que si $f \geq 0$, alors $v \geq 0$.

II) soit g une fonction continue et croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux fonctions bornées sur [0,1], de classe C^2, $\underline{u}$ et $\overline{u}$ vérifiant $\underline{u} \leq \overline{u}$ ainsi que

$$-\ddot{\overline{u}}(x) + \overline{u}(x) \geq g(\overline{u}(x)) + f, \quad \overline{u}(0) \geq 0, \quad \overline{u}(1) \geq 0$$

$$-\ddot{\underline{u}}(x) + \underline{u}(x) \leq g(\underline{u}(x)) + f, \quad \underline{u}(0) \leq 0, \quad \underline{u}(1) \leq 0.$$

On désire montrer qu'il existe une fonction u sur I de classe C^2 telle que

$$-\ddot{u} + u = g(u) + f, \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{1}$$

A cet effet, on introduit u procédé itératif et on construit une suite de fonction u_n de classe C^2. On pose tout d'abord $u_0 = \underline{u}$.

a) En supposant que u_n a été construite, montrer qu'il existe une unique solution u_{n+1} dans $C^2(I)$ telle que

$$-\ddot{u}_{n+1} + u_{n+1} = g(u_n) + f, \quad u_{n+1}(0) = u_{n+1}(1) = 0.$$

b)Montrer que pour tout $n \in N$, on a

$$\underline{u} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \overline{u}.$$

(On pourra procéder par récurrence).

c)Montrer que u_n converge uniformément sur I vers une application u de classe C^2 solution de (**??**).

d) On suppose de plus que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}$. Construire alors des fonctions $\underline{u}$ et $\overline{u}$.

Exercice II

On considère le disque
$$D^2 = \{(x,y) \in R^2, x^2+y^2 < 1\}$$
et les fonctions de $H_0^1(D^2)$ qui possèdent la symétrie radiale, c'est à dire le sous-espace vectoriel
$$H^1_{0,\mathrm{rad}} = \{u \in H_0^1(D^2), t.q\ \exists f : [0,1] \to \mathbb{R},\ \text{tel que } u(x) = f(|x|) \text{ pour presque tout x} \in \mathrm{D}^2\}.$$
Pour $1 \leq p \leq +\infty$ on note de même L^p_{rad} l'ensemble des fonctions de $L^p(D^2)$ qui possède la symétrie radiale.

Ia) Montrer que $H^1_{0,\mathrm{rad}}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H_0^1(D^2)$ et que pour tout $u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}$,
$$\int_{D^2} |\nabla u|^2 = 2\pi \int_0^1 r|\frac{df}{dr}|^2 dr,$$
où, pour presque tout $x \in D^2, u(x) = f(|x|)$.
Ib) Montrer que si $u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}$, alors, pour presque tout $x \in D^2$, on a
$$|u(x)| \leq \int_{|x|}^1 |\frac{df}{dr}|.$$
Ic) en déduire que si $u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}$, alors, pour presque tout $x \in D^2$,
$$2\pi|u(x)|^2 \leq |ln|x||)\|\nabla u\|^2_{L^2(D^2)}.$$
Id) Montrer que $\forall \lambda > 0, \forall u \in H^1_{0,\mathrm{rad}}, \forall p \geq 1, \exp \lambda u \in L^p$.

IIa) Montrer qu'il existe une base hilbertienne $\{f_n\}_{n\in N^*}$ de $H^1_{0,\mathrm{rad}}$, et une suite croissante $\{\gamma_n\}_{n\in N^*}$ de nombre strictement positifs tels que
$$-\Delta f_n = \gamma_n f_n \quad \text{sur} \quad D^2.$$
IIb) Montrer que f_1 est une fonction de signe constant sur D^2.
IIc) Montrer que les valeurs propres γ_n sont de multiplicité 1 exactement.
IId) Montrer que pour $n \geq 2$ la fonction f_n change de signe.

IIIa) On considère, pour $\lambda > 0$ sur l'espace $H^1_{0,\mathrm{rad}}$ l'application G_λ définie par
$$G_\lambda(u) = \exp \lambda u.$$
Montrer que G_λ est bien défini de $H^1_{0,\mathrm{rad}}$ à valeurs dans $L^1(D^2)$.
IIIb) Pour $n \in N^*$, on considère l'application
$$G^n_\lambda(u) = \exp(\lambda \min(u,n)).$$
Montrer que G^n_λ est continue de $H^1_{0,\mathrm{rad}}$ dans $L^1(D^2)$.
IIIc) Montrer que G^n_λ converge uniformément sur tout borné vers G_λ lorsque n tend vers $+\infty$

et en déduire que G_λ est continue de $H^1_{0,\mathrm{rad}}$ dans $L^1(D^2)$.
IIId) On pose $W_\lambda = \int_{D^2} \exp \lambda u$. Montrer que W_λ est de classe C^1 sur $H^1_{0,\mathrm{rad}}$ et déterminer sa dérivée.

IVa) soit $p > 1$, et $f \in L^p_{\mathrm{rad}}$ donné. On considère l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u + \exp \lambda u = f & \text{sur } D^2, \\ u = 0 & \text{sur } \partial D^2. \end{cases} \tag{2}$$

Montrer que (**??**) possède une unique solution u_λ dans $H^1_{0,\mathrm{rad}}$.
IVb) Montrer qu'en fait $u_\lambda \in H^2$.
IV c) Montrer que si f appartient à H^2 alors u_λ est dans H^4. En déduire que u_λ est de classe C^2.
IVd) Montrer que si $f \leq 0$, alors $u_\lambda \leq 0$
IVe) Montrer que si f appartient à H^2, alors

$$\sup_{x \in D^2} (\exp \lambda u) \leq \max\{1, \sup_{x \in D^2} f\}$$

***IVf**) Etudier pour $f \leq 0$ la limite de u_λ lorsque λ tend vers $+\infty$.

V) On considère maintenant l'equation

$$\begin{cases} -\Delta v = \exp \lambda u & \text{sur } D^2, \\ u = 0 & \text{sur } \partial D^2. \end{cases} \tag{3}$$

Montrer que si λ est assez petit, cette équation possède une solution que l'on peut obtenir grâce au lemme du col.