Université Pierre et marie Curie — Année Universitaire 2007-2008
M2- Equations elliptiques linéaires
et non-linéaires

EXAMEN du 15 JANVIER 2008

Durée : 3 heures

Notes de cours autorisées
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Les questions délicates sont signalées par *.

Exercice I

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^2$. Pour une fonction f donnée dans $L^2(\Omega)$, on s'intéresse aux solutions de l'équation avec données de Dirichlet homogène

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\big((u^2+1)\nabla u\big) &= f \ \text{ dans}\,\Omega, \\ u &= 0 \text{ sur}\,\partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

A) Vérifier que $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$, et que si u et v sont deux applications de $H^2(\Omega)$ alors le produit uv est aussi une application de $H^2(\Omega)$.

B) On considère l'application $\mathcal{T} : H^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ définie par

$$\mathcal{T}(v) = -\mathrm{div}\big((v^2+1)\nabla v\big).$$

1) Montrer que $\mathcal{T}$ est différentiable, de classe C^1, et calculer $d\mathcal{T}$. Vérifier en particulier que

$$d\mathcal{T}(0)(v) = -\Delta v.$$

2) Montrer qu'il existe $\delta > 0$, et $\alpha > 0$ tel que si $\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta$, alors il existe une unique application $u = u_f \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ vérifiant (1) et

$$\|u_f\|_{H^2(\Omega)} \leq \alpha.$$

3) Montrer que si de plus $f \geq 0$, alors $u_f \geq 0$.

C) On suppose dans cette question que le domaine Ω est le disque unité de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire que

$$\Omega = D^2 = \{(x,y) \in R^2, x^2+y^2 < 1\}. \tag{2}$$

On suppose que f est à symétrie radiale, i.e $f(x)$ ne dépendant que de $|x|$. Montrer qu'alors le solution u_f trouvée en B2) est à symétrie radiale.

D) pour deux fonctions f et g données dans $L^2(\Omega)$, on cherche un couple de fonction (u,v) dans $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\big((v+1)\nabla u\big) &= f, \ \text{dans}\, \Omega, \\ -\mathrm{div}\big((u+1)\nabla v\big) &= g, \ \text{dans}\, \Omega. \end{aligned} \tag{3}$$

1) Montrer qu'il existe des nombres $\delta_1 > 0$, et $\alpha_1 > 0$ tel que si $\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta_1$ alors il existe un unique couple d'applications (u,v) dans $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ vérifiant (3) et l'inégalité

$$\|u_f\|_{H^2(\Omega)} + \|v_f\|_{H^2(\Omega)} \leq \alpha_1.$$

2) Que peut-on dire si f et g sont à symétrie radiale?

Exercice II

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^2$. On s'interesse dans cet exercice au système d'équations non-linéaires

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u^5 + uv^2 \\ -\Delta v &= v^5 + vu^2, \end{aligned} \tag{4}$$

que l'on complète avec des données de Dirichlet homogène au bord du domaine

$$u = v = 0 \, \text{sur}\, \partial\Omega.$$

A) On considère l'espace de Hilbert $H = H_0^1(\Omega)^2$ muni du produit scalaire

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_H := \langle u_1, u_2 \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle v_1, v_2 \rangle_{H_0^1(\Omega)}.$$

1) Montrer que les solutions $(u,v) \in (H_0^1(\Omega))^2$ correspondent aux points critiques de la fonctionnelle F définie sur $H = (H_0^1(\Omega))^2$ par

$$F(u,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\big) - \frac{1}{6}\int_\Omega (u^6 + v^6) - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 v^2.$$

2) Montrer que

$$\inf \{F(u,v), (u,v) \in (H_0^1(\Omega))^2\} = -\infty.$$

3) Montrer qu'il existe un nombre $\rho > 0$ tel que si $\|(u,v)\|_H \leq \rho$ alors

$$F(u,v) \geq \frac{1}{4}\|(u,v)^2\|_H.$$

4) Déduire des questions précédentes que la fonctionnelle F possède la géométrie du col (i.e existence d'une cuvette et existence d'un point bas).

B) On s'intéresse dans cette partie aux suites de Palais-Smale pour F.
1) Montrer que, si une suite $(u_n, v_n)_{n\in N}$ d'éléments de H est une suite de Palais-Smale pour

F, alors il existe une suite $(f_n, g_n)_{n\in N}$ de couples d'éléments de $H^{-1}(\Omega)$ tels que $\|f_n\|_{H^{-1}} + \|g_n\|_{H^{-1}} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et

$$\begin{aligned} -\Delta u_n &= u_n^5 + u_n v_n^2 + f_n \\ -\Delta v_n &= v_n^5 + v_n^2 u_n + g_n. \end{aligned} \tag{5}$$

2) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout couple (u, v) de fonctions de $L^6(\Omega)$

$$\int_\Omega u^2 v^2 \leq C\Big(\int_\Omega (u^6 + v^6)\Big)^{\frac{2}{3}}.$$

3) En déduire que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0$ tel que si $\|u\|_{L^6(\Omega)} + \|v\|_{L^6(\Omega)} \geq A$ alors

$$\int_\Omega u^2 v^2 \leq \varepsilon \int_\Omega (u^6 + v^6).$$

4) En utilisant les questions précédentes montrer que les suite de Palais-Smale sont bornées.
5) Montrer que F vérifie la condition de Palais-Smale.

C) Montrer que le système (4) possède une solution non nulle dans H.

D) Montrer que de plus, on peut trouver une telle solution telle que $u \geq 0$ et $v \geq 0$.

Exercice III

Pour $r > 0$ on considère le disque $D(r)$ de $\mathbb{R}^2$ défini par $D(r) = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 < r\}$, et on pose $D = D(1)$. Soit f une fonction de $L^\infty(D)$ et u une fonction de $H^1(D)$ telles que

$$-\Delta u = f \,\text{sur}\, D. \tag{6}$$

A 1) Montrer que pour tout réel $1 \leq p < +\infty$ il existe une constante $C_p > 0$ telle que

$$\|u\|_{W^{2,p}(D(\frac{1}{2}))} \leq C_p\big(\|f\|_{L^\infty(D(1))} + \|u\|_{L^\infty(D(1))}\big). \tag{7}$$

Indication : On pourra écrire $u = u_0 + u_1$, où u_1 est l'unique solution de solution de $H_0^1(D(1))$ de $-\Delta u_1 = f$, et écrire l'équation pour u_0.
2) En déduire qu'il existe une constante universelle $C_0 > 0$ telle que

$$|\nabla u(0)| \leq C_0\big(\|f\|_{L^\infty(D(1))} + \|u\|_{L^\infty(D(1))}\big). \tag{8}$$

B) Soit $0 < \lambda < 1$. On considère les fonctions u_λ et f_λ définies sur le disque $D(\frac{1}{\lambda})$ par $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ et $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$.
1) Montrer que $\nabla u_\lambda(x) = \lambda \nabla u(\lambda x)$ et $\Delta u_\lambda(x) = \lambda^2 \Delta u(\lambda x)$.
2) En déduire, en appliquant la partie A) à u_λ que pour tout $0 < \lambda < 1$, on a

$$|\nabla u(0)| \leq C_0\big(\lambda \|f\|_{L^\infty(D(1))} + \frac{1}{\lambda}\|u\|_{L^\infty(D(1))}\big). \tag{9}$$

3) En déduire, en optimisant le membre de gauche de cette inégalité par rapport à λ que si $\|f\|_{L^\infty(D(1))} \geq \|u\|_{L^\infty(D(1))}$ alors

$$|\nabla u(0)| \leq 2C_0\sqrt{\|f\|_{L^\infty(D(1))}\|u\|_{L^\infty(D(1))}}.$$

C (application) Soit $0 < \epsilon < 1$ et v_ϵ une solution dans $H^1(D)$ de l'équation

$$-\Delta v_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2}(v_\epsilon - v_\epsilon^3) \text{ dans } D.$$

On supppose de plus que $|v_\epsilon| \leq 1$ sur ∂D.
1) Montrer que

$$\|v_\epsilon\|_{L^\infty(D)} \leq 1.$$

2) Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$|\nabla v_\epsilon(0)| \leq \frac{C_1}{\epsilon}.$$

3) Montrer que pour tout x tel que $|x| \leq 1 - \epsilon$, on a

$$|\nabla v_\epsilon(x)| \leq \frac{C_1}{\epsilon}.$$