EXAMEN du 10 JUIN 2008

Durée : 3 heures

Notes de cours autorisées
Le sujet comporte deux exercices indépendants. Les questions délicates sont signalées par *.

Exercice I

Soit Ω un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^2$. On considère l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire habituel

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \; \forall \, u, v \in H_0^1(\Omega).$$

I a) Soit $f \in L^2(\Omega)$. Montrer qu'il existe un unique élément $u_f \in H_0^1(\Omega)$ solution faible de

$$-\Delta u = f \text{ sur } \Omega.$$

b) On note $T : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ l'application définie par $Tf = u_f$. Montrer que T est linéaire continue et compacte.
c) Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in L^2(\Omega)$ on a

$$\langle Tf, Tg\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle Tf, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, Tg\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

II On considère l'espace de Banach $X = L^4(\Omega)$, muni de sa norme habituelle et la fonction J définie de X vers $\mathbb{R}$ par

$$J(f) = \frac{1}{4}\int_\Omega f^4 dx - \frac{1}{2}\|Tf\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \; \forall f \in X.$$

a)Vérifier que la fonction J est paire, i. e $J(f) = J(-f), \forall f \in X$.
b) Montrer que J est différentiable au sens de Fréchet et calculer $dJ(f)g, \forall f, g \in X$.
Montrer que les points critiques f de J vérifient l'équation

$$f^3 = Tf. \tag{1}$$

c) Soit $f \in X$ une solution de l'équation (1). Montrer que $f \in C^0(\bar{\Omega})$.
d) On pose $u = f^3$. Montrer que la fonction u appartient à $C^0(\bar{\Omega})$ et qu'elle vérifie au sens faible l' équation

$$-\Delta u = \operatorname{sgn}(u)|u|^{\frac{1}{3}}, \text{sur } \Omega, \tag{2}$$

où pour $s \in \mathbb{R}, \; \operatorname{sgn}(s) = +1, \; \text{si } s > 0, \; \operatorname{sgn}(s) = -1$ si $s < 0$ et sgn $(0) = 0$.
e) Montrer que la fonction u est régulière en dehors de l'ensemble où elle s'annule.

f) La fonctionnelle J vérifient-elle la condition de Palais-Smale?

III a) Montrer que J semi-continue pour la convergence faible dans X.
b) Montrer que J est coercive. Montrer qu'il existe un élément f_0 de X tel que

$$J(f_0) = \inf\{J(f), f \in X\},$$

et que f_0 est solution de (1).
c) Montrer que

$$\inf\{J(f), f \in X\} < 0,$$

et en déduire que $f_0 \neq 0$.
d) Montrer que J n'est pas convexe.
e) On pose

$$c = \inf\{\sup_{s\in[0,1]} J(p(s)), \text{ pour } p \in \mathcal{P}\},$$

où

$$\mathcal{P} = \{p \in C^0([0,1], X) \text{ tel que } p(0) = f_0, p(1) = -f_0\}.$$

Montrer que c est une valeur critique généralisée de J. Est-ce une valeur critique?

Exercice II

Soit V une fonction régulière de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que V vérifie les conditions suivantes

$$V(x) \to +\infty \text{ lorsque } |x| \to +\infty. \tag{3}$$

et

$$V(x) \geq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^2. \tag{4}$$

On considère l'espace vectoriel H_V des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ défini par

$$H_V = \{u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ tel que } \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 < +\infty\}.$$

I a) Montrer que H_V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv, \ \forall u, v \in H_V.$$

b) Montrer que $\forall u \in H_V$, $u \in L^2(R^2)$ et que l'injection $H \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ est compacte.
c) Montrer de manière plus générale, que pour tout $p \geq 2$, H_V s'injecte dans $L^p(\mathbb{R}^2)$ et que cette injection est compacte.
*d) Construire un potentiel V satisfaisant les hypothèses (3) et (4) et tel que H_V ne s'injecte pas dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.

II a) Montrer que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, il existe un unique élément u dans H_V tel que

$$-\Delta u + V(x)u = f.$$

b) Montrer qu'il existe une base Hilbertienne $(e_n)_{n\in N^*}$ de $L^2(\mathbb{R}^2)$ et une suite croissante de réels positifs $(\lambda_n)_{n\in N^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $e_n \in H_V$ et

$$-\Delta e_n + V(x)e_n = \lambda_n e_n. \tag{5}$$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $e_n \in C^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$.
d) Montrer que e_1 ne s'annule pas, et que la dimension du sous-espace propre correspondant est exactement de dimension 1.
e) On suppose que V est à symétrie radiale. Que peut-on alors dire de e_1?

III Soit V une fonction satisfaisant les hypothèses (3) et (4). On considère dans cette partie la fonctionnelle F définie sur H_V par

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2 - \frac{\lambda_1}{2}u^2) - \int_{\mathbb{R}^2} u^4.$$

a) Vérifier que F est bien définie sur H, et qu'elle est de classe C^1.
b) Montrer que F vérifie la condition de Palais-Smale.
c) Construire un point critique non nul u pour F en utilisant le Lemme du Col. De quelle équation aux dérivées partielles la fonction u est-elle la solution?