UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE — ANNÉE UNIVERSITAIRE 2008-2009
M2- EQUATIONS ELLIPTIQUES LINÉAIRES ET NON-LINÉAIRES

EXAMEN du 13 JANVIER 2009

Durée : 3 heures.

Notes de cours autorisées
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Les questions délicates sont précédées de *

Exercice I

Soit $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ la boule unité de $\mathbb{R}^2$. Pour $f \in L^2(B)$ on considère, les solutions u_f de l'équation

$$\begin{aligned} -\Delta u_f + u_f &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u_f^3\right) + f \text{ sur } \ B, \\ u &= 0 \text{ sur } \ \partial B. \end{aligned} \tag{1}$$

A. On suppose dans toute cette partie que $f \in L^2(B)$ et que $u_f \in H_0^1(B)$ est une solution faible de l'équation (1).
A 1) Montrer l'égalité

$$\int_{B(1)} |\nabla u_f|^2 + u_f^2 = \int_B f.u_f. \tag{2}$$

A 2) En déduire que

$$\|u_f\|_{H^1(B)} \leq \|f\|_{L^2(B)},$$

où $\|u_f\|_{H^1(B)}$ désigne la norme H^1 usuelle, à savoir $\|u\|_{H^1(B)}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(B)}^2 + \|u\|_{L^2(B)}^2$.
A 3) Montrer que si $f \geq 0$ alors nécessairement $u_f \geq 0$ (on pourra multiplier l'équation (1) par u_f^+).
A 4) Montrer que $u_f \in H^2(B(1))$ et qu'il existe une constante $C_0 > 0$ indépendante de f telle que

$$\|u_f\|_{H^2(B)} \leq C\|f\|_{L^2(B)}.$$

A 5) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^2(B)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation (1) (où f est remplacé par f_n) a une solution u_{f_n}. On suppose que $f_n \to f$ lorsque $n \to +\infty$, fortement dans $L^2(B)$. Montrer que l'on peut extraire une sous-suite de $(u_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement dans $H^2(B)$.

B. On suppose dans toute cette partie que $f \in H^2(B)$ et que $u_f \in H_0^1(B)$ est une solution faible de (1).
B 1) Montrer que $u_f \in H^4(B)$ et qu'il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de f telle que

$$\|u_f\|_{H^4(B)} \leq C_1\|f\|_{H^2(B)}.$$

B 2) En déduire que $u_f \in C^2(B(1))$ et qu'il existe une constante $C_2 > 0$ indépendante de f telle que

$$\|u_f\|_{C^2(B)} \leq C_2 \|f\|_{H^2(B)}.$$

B *3) On suppose de plus que $f \geq 0$. Montrer qu'alors

$$\sup\{u_f(x), x \in B\} \leq \sup\{f(x), x \in B\}.$$

C. On pose $X = H^4(B) \cap H_0^1(B)$, que l'on munit de la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H^4(B)}$. On considère l'application $T : X \to H^2(B)$ définie par

$$T(u) = -\Delta u + u - \frac{\partial}{\partial x_1}\big(u^3\big), \text{ pour } u \in H^4 \cap H_0^1(B).$$

C 1) Montrer que T est de classe C^1 et calculer $dT(u)$, pour tout $u \in H^4(B) \cap H_0^1(B)$.
C 2) Montrer que $dT(u)$ est inversible, si $\|u\|$ est assez petit.
C 3) Montrer qu'il existe des nombres $\delta > 0$ et $\alpha > 0$ tel si

$$\|f\|_{H^2(B)} \leq \delta, \tag{3}$$

alors il existe une unique solution $u_f = A(f)$ de l'équation (1) vérifiant l'inégalité

$$\|u_f\|_{H^4(B)} \leq \alpha.$$

C 4) On suppose que f vérifie la condition (3) et de plus $f(x_1, -x_2) = f(x_1, x_2)$. Montrer que $A(f)(x_1, -x_2) = A(f)(x_1, x_2)$.

Exercice II

Soit $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ la boule unité de $\mathbb{R}^2$. Pour $1 < p < +\infty$ et $f \in L^p(B)$ on note $\Delta_0^{-1} f$ l'unique solution $v \in W^{2,p}(B) \cap W_0^{1,p}(B)$ de l'équation $\Delta v = f$ sur B.
1) Vérifier que si f et g appartiennent à $L^p(B)$ les intégrales suivantes ont un sens et que l'on a l'égalité

$$\int_B (\Delta_0^{-1} f)(\Delta_0^{-1} g) = \int_B \Big(\Delta_0^{-1}\big(\Delta_0^{-1} f\big)\Big) g.$$

On considère la fonction F définie sur $H_0^1(B)$ par

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_B |\nabla u|^2 - \frac{1}{4}\int_B |\Delta_0^{-1} u|^4. \tag{4}$$

1) Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $H_0^1(B)$ et calculer $dF(u)$ pour $u \in H_0^1(B)$.
2) Montrer qu'il existe une "cuvette" près de 0, puis que F a la géométrie du col.
3) Vérifier que F satisfait la condition de Palais-Smale.
4) En déduire qu'il existe une solution non nulle de l'équation

$$\begin{aligned} -\Delta(\Delta w) &= \big(\Delta_0^{-1} w\big)^3 \text{ sur } B, \\ w &= 0 \text{ sur } \partial B. \end{aligned} \tag{5}$$

5) Vérifier que $w \in C^\infty(\bar{B})$.

Exercice III

A (question préliminaire). Soit H un espace de Hilbert et soit L_1 et L_2 deux formes linéaires continues sur H. On suppose que $\ker L_1 \subset \ker L_2$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$L_2 = \lambda L_1.$$

B Soit $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ la boule unité de $\mathbb{R}^2$. On considère le sous-ensemble Λ de $H_0^1(B)$ défini par

$$\Lambda = \{u \in H_0^1(B),\ \text{tel que } \|u\|_{L^4(B)} = 1\},$$

et la fonction E définie sur $H_0^1(B)$ par

$$E(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(B)} = \frac{1}{2}\int_B |\nabla u|^2.$$

1) Montrer que Λ est non vide, fermé pour la converge faible dans $H^1(B)$.
2) Montrer qu'il existe $u_0 \in \Lambda$ tel que

$$E(u_0) = \inf\{E(v), v \in \Lambda\}. \tag{6}$$

3) Montrer qu'il existe un minimiseur u_0 de (6) qui est positif. Dans toute la suite, on supposera $u_0 \geq 0$.

C 1) Soit $v \in H_0^1(B)$. Vérifier qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que si $|t| \leq \delta_0$ alors $\|u_0 + tv\|_{L^4(B)} \geq \frac{1}{2}$. On pose alors

$$w_t = \frac{1}{\|u_0 + tv\|_{L^4(B)}}(u_0 + tv).$$

Vérifier que si $|t| \leq \delta_0$ alors

$$E(w_t) \geq E(u_0). \tag{7}$$

*2) En déduire que si v vérifie la relation $\int_B u_0^3 v = 0$ alors $\int_B \nabla u_0 \nabla v = 0$.
[on pourra développer le membre de gauche de l'inégalité (7) par rapport à t].
3) En utilisant la partie **A** montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$-\Delta u_0 = \lambda u_0^3 \text{ sur } B.$$

4) Montrer que $\lambda = 2E(u_0)$.
5) Montrer que u_0 ne s'annule pas sur B.
5) Pour $\eta \in \mathbb{R}$, on pose $v = \eta u_0$. Montrer que l'on peut choisir η de sorte que $v > 0$ sur B et soit solution de l'équation $-\Delta v = v^3$ sur B.