Topologie et analyse différentielle

Benoît Perthame

November 10, 2007

.

Entre le risque et la certitude, il faut choisir le risque

Jacques BREL

Car pour moi les idées claires sont (...) des idées mortes et terminées.

Antonin ARTAUD (le théâtre et son double)

PRÉFACE

Ce cours contient quelques notions de topologie et d'analyse différentielle enseignés à l'École Normale Supérieure au premier semestre de la première année, ce qui correspond au niveau L3-M1. Le contenu est très classique et doit beaucoup aux ouvrages de H. Cartan, L. Schwartz et H. Brézis que l'on trouvera dans la bibliographie. L'esprit est toutefois différent de la tradition des cours enseignés ici, ou du moins tente de l'être, de deux points de vue. Contrairement à la tradition qui veut que les mathématiques soient enseignés linéairement (telle notion vient après telle autre suivant un ordre établi au cours des années), ce cours voit d'abord l'Analyse comme une immense toile où les différentes notions sont connectées entre elles, admettent différents niveau de compréhension et d'abstraction. Ensuite, il contient des exemples pour illustrer les notions abstraites et renvoyer à d'autres théories qui dépassent le niveau de ce cours. Surtout, ils tentent de montrer que les objets de l'Analyse sont avant tout des outils de modélisation; la plupart d'entre eux ont été inventés pour décrire les lois de la nature. Même si la nature que nous recherchons aujourd'hui est différente de celle que découvraient Newton, Euler, Maxwell, Boltzmann ou Riemann, les mêmes outils de modélisation une fois correctement étendus et approfondis, servent de base pour tenter de comprendre la compression et le traitement des données, les flots de données sur Internet, les nombreuses échelles du vivant, la matière dans ses nombreuses formes. En conséquence on trouvera mentionnés des théorémes qui peuvent être passés en première lecture, d'autres dont les démonstrations dépassent clairement le niveau L3-M1.

Plusieurs personnes ont participé à la rédaction de certaines parties de ce cours et je voudrais les remercier ici. O. Dudas a rédigé la preuve du théorème de Stone-Weierstrass et l'approximation par les polynômes de Bernstein et O. Guéant a rédigé la section concernant la topologie de l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact (topologies de Whitney et de Schwartz). F. Kassel a relu ce cours en détail et corrigé de nombreuses coquilles . P.-E. Jabin et A. Basson ont fourni pas mal d'exercices. A. Bentata et G. Raoul en ont relu des parties. Merci également à M. Desnous (INRIA, BANG) qui a réalisé la plupart des illustrations

Table des matières

Chapitre 1

Espaces métriques et distances

Lorsque l'on se pose la question de savoir si deux objets d'un semble sont plus ou moins "proches", la première idée consiste à essayer de construire une "distance" entre eux? Or cela n'est pas toujours suffisant; en effet, dans des espaces 'trop gros', on peut définir des suites convergentes sans avoir pour autant de notion de distance. Ces premiers chapitres visent à définir des notions permettant de répondre à cette question de façon très générale. On introduit ainsi la notion de 'topologie générale' qui s'appuie sur des notions purement ensemblistes. L'esprit de la topologie générale est donc assez proche de la théorie de la mesure qui vise à construire le "volume" des sous-ensembles et ceci doit passer par une "mesure" et plus généralement par la connaissance des ensembles "mesurables". Ces deux théories sont donc totalement entrelacées et les liens sont nombreux .

1.1 Espaces métriques et distances

1.1.1 Définitions

Définition 1.1 *On appelle espace métrique (E, d) la donnée d'un ensemble E et d'une application, appelée distance $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ telle que*
(i) (positivité) $d(x, y) \geq 0$ *et* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
(ii) (symétrie) $d(x, y) = d(y, x)$,
(iii) (inégalité triangulaire) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Une des conséquences, souvent utile, de (iii) et (ii) est *l'inégalité triangulaire généralisée* :

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z). \tag{1.1}$$

En effet on déduit de (iii) à la fois $d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$ et $d(y, z) - d(x, y) \leq d(x, z)$.

1.1.2 Exemples

1. Sur $E = \mathbb{R}^d$, ou $\mathbb{C}^d$, la distance classique est induite par la norme euclidienne: pour $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_d)$, elle est donnée par

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2} \ .$$

2. La distance discrète sur un ensemble E quelconque est définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \neq y, \\ 0 & \text{pour } x = y. \end{cases}$$

Un ensemble muni de cette distance est appelé 'ensemble discret'.
3. On introduira plus tard la notion de fermé, mais on peut dès à présent mentionner la *distance de Hausdorff* entre deux fermés, définie par

$$d_H(F_1, F_2) = \max_{x \in F_1} d(x, F_2) + \max_{y \in F_2} d(y, F_1).$$

4. Un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble fini V ('vertices', noeuds) et une ensemble non-vide E de 'edges' (paires non-ordonnées) $e = \{i, j\}$ avec $i \neq j \in V$. Deux noeuds i, j sont connectés s'il existe un chemin (de longueur $n + 1$ ici) (i, i_1), (i_1, i_2) ... (i_n, j) formé d'éléments de E. Un graphe est connecté si tous les noeuds sont connectés entre eux. On définit alors

$$d(i, j) = \{\text{nombre de 'edges' dans le chemin le plus court}\}.$$

C'est une distance.

1.1.3 Exercices

Exercice 1. Sur une espace métrique (E, d), on définit aussi des distances (bornées) par les formules

$$\tilde{d}(x, y) = \min(1, d(x, y)), \qquad \bar{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Exercice 2. Soient $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de distances. Montrer que $d_1 + d_2$ est aussi une distance. De même pour

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \frac{d_i(x, y)}{1 + d_i(x, y)}, \qquad \sup_{i \in \mathbb{N}} [\min(\frac{1}{i+1}, d_i(x, y))].$$

Exercice 3. (Distance riemanienne) Sur $\mathbb{R}^d$, soit $A(x) \in M_{d \times d}$ des matrices définies positives dépendant de x de façon régulière. On définit

$$d_a(x, y) = \inf \Big\{ \int_0^1 |A(x(t)).\dot{x}(t)| \ dt; \ x(0) = x, \ x(1) = y \Big\},$$

où l'infimum est pris sur toutes les trajectoires $x(\cdot) \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R}^d)$. Montrer que d_a est une distance. Quelle matrice $A(x)$ donne la distance euclidienne?
Cette métrique donne lieu à des questions intéressantes qui ont beaucoup progressé récemment : pour un point arbitraire pris comme origine on pose $u(x) = d_a(x,0)$. Cette fonction vérifie l'équation "Eikonale", un cas particulier des équations de Hamilton-Jacobi :

$$\big|A^{-1}(x).\nabla u(x)\big| = 1$$

au sens de la 'viscosité', voir [6].

3. Vérifier que la distance de Lévy-Prokhorov sur $\mathbb{R}^d$

$$d_{LP}(x,y) = \inf\{\varepsilon > 0;\ \#\{i, |x_i - y_i| > \varepsilon\} < \varepsilon d\},$$

est bien une distance.

Exercice 4. (Distance optique) Soit $n : \mathbb{R}^d \to]0,\infty[$ une fonction continue. On définit

$$d^n(x,y) = \inf\Big\{\int_0^T n\big(x(t)\big)\,dt;\ x(0) = x,\ x(T) = y,\ |\dot{x}(t)| = 1\Big\},$$

où l'infimum est pris sur les temps d'arrivée T et les trajectoires $x(\cdot) \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R}^d)$. Montrer que ceci définit une distance et donner la relation avec la distance Riemanienne de l'exercice 3. dans le cas $a_{ij}(x) = a(x)\delta_{ij}$. Trouver l'équation de Hamilton-Jacobi satisfaite par d^n.

Ces questions de minimisation font partie de la théorie plus générale du calcul des variations. Voir [14].

Une question difficile est de retrouver $n(x)$ connaissant $d(x,0)$ par exemple, appelée 'problème inverse'. Elle est liée aux problèmes d'imagerie médicale par exemple, ou de géophysique. Comment connaître un milieu à partir du temps passé par une onde s'y propageant?

1.2 Boules et sphères

Définition 1.2 *(i) On appelle boule ouverte de centre a et rayon $R > 0$:*

$$B(a,R) = \{x \in E;\ d(a,x) < R\}.$$

(ii) On appelle boule fermée de centre a et rayon $R > 0$:

$$\overline{B}(a,R) = \{x \in E;\ d(a,x) \le R\}.$$

(iii) On appelle sphère de centre a et rayon $R > 0$:

$$S(a,R) = \{x \in E;\ d(a,x) = R\}.$$

(iv) Une partie de E est dite bornée si elle contenue dans au moins une boule.

En général, "boule" seul signifie "boule ouverte".

Ainsi $\mathbb{R}^d$, muni de la distance euclidienne, n'est pas borné. Tout ensemble est borné pour la distance discrète ou l'une des distances $\tilde{d}$, $\bar{d}$ ci-dessus.

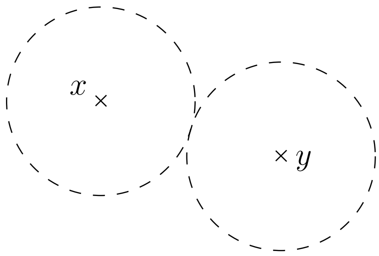

Figure 1.1: Propriété de séparation de Hausdorff

Théorème 1.1 *(Propriété de séparation de Hausdorff) Soit (E, d) un espace métrique et deux points $x \neq y$ de E. Alors il existe deux boules ouvertes contenant respectivement x et y, et d'intersection vide.*

Preuve. Il suffit de prendre $R = d(x, y)/2$ et de choisir $B(x, R)$ et $B(y, R)$, qui contiennent bien x et y et sont d'intersection vide. En effet, pour un éventuel point z de l'intersection, on obtient : $d(x, z) < R$ et $d(y, z) < R$. On déduit alors de l'axiome (iii)

$$2R = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < 2R,$$

une contradiction qui prouve qu'un tel z n'existe pas. $\square$

1.3 Espaces vectoriels normés

1.3.1 Définitions

Définition 1.3 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur E une fonction notée $x \to \|x\|$ telle que*
(i) (positivité) $\|x\| \geq 0$ *et* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
(ii) (homothétie) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,
(iii) (inégalité de convexité) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On dit alors que $(E, \| \ldots \|)$ est un espace vectoriel normé.

On déduit de (iii) la propriété (souvent utile!)

$$\|x-y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|.$$

Une *semi-norme* est définie par les propriétés (ii) et (iii) seulement et $\|x\| \geq 0\ \forall x \in E$. Les semi-normes sont souvent notées $|\dots|$.

Une *quasi-norme* est définie, pour un réel $k > 1$, par les axiomes
(i) $QN(x) \geq 0$ et $QN(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
(ii') $QN(\lambda x) = |\lambda|\, QN(x)$,
(iii') $QN(x+y) \leq k(QN(x) + QN(y))$.
Par exemple, on rencontre l'espace $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$, pour $1 \leq p < \infty$, des fonctions telles que $QN_p(f) < \infty$, avec

$$m(\sigma, f) = \mathcal{L}\{x \in \mathbb{R}^d;\ |f(x)| > \sigma\}, \qquad QN_p(f) = \sup_{\sigma>0} [\sigma\, m(\sigma, f)^{1/p}] < \infty.$$

Exercice Vérifier qu'il s'agit bien d'une quasi-norme (avec $k = 2$).

1.3.2 Normes et distances

Théorème 1.2 *Soit $\|\dots\|$ une norme sur un espace vectoriel E, alors*

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

est une distance.

Preuve. La propriété (i) des distances est évidente et (ii) aussi car $\|z\| = \|-z\|$ (avec $\lambda = -1$). Pour (iii), on écrit

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(y,z).$$

□

1.3.3 Exemples

1. Sur $\mathbb{R}^d$, on définit classiquement les normes

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|x\|_\infty = \max(|x_i|).$$

Le cas $p = 2$ fournit la norme euclidienne. La partie difficile à démontrer est l'inégalité de convexité (iii). Celle-ci se déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $p = 2$

$$\sum_{i=1}^{d} x_i\, y_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{d} |y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour les autres valeurs de p on utilise l'inégalité de Minkowski : pour $a,\ b \geq 0$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p,\ q \geq 1.$$

2. On définit les espaces $l^p(\mathbb{K})$ de suites réelles ou complexes $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Ce sont des espaces vectoriels normés de dimension infinie.

3. Sur $\mathcal{C}^0([0,1])$, deux normes sont

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt, \quad \|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Une semi-norme est

$$|f| = \int_0^1 |f(t) - \langle f\rangle|dt \quad \text{où} \quad \langle f\rangle = \int_0^1 f(t)dt.$$

Les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$ sont des e.v.n. importants (voir cours d'intégration).

1.4 Suites convergentes dans un espace métrique

Définition 1.4 *Dans un espace métrique (E,d), une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x si et seulement si*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

On note alors $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Théorème 1.3 *Soient $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de distances sur un ensemble E et la distance*

$$d(x,y) := \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i}\ \min\big(1, d_i(x,y)\big).$$

Alors $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ pour d est équivalent à $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ pour chaque d_i.

Preuve. (i) Supposons que $d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors on a évidemment, pour tout i, $\min(1, d_i(x_n, x)) \leq 2^i d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc aussi $d_i(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) Réciproquement, supposons $d_i(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout i. Soit $\varepsilon > 0$ et $I(\varepsilon)$ assez grand tel que $2\sum_{i\geq I} 2^{-i} \leq \varepsilon$. Soit alors $N(\varepsilon)$ assez grand pour que, pour chaque i, $1 \leq i \leq I(\varepsilon)$ on ait

$$d_i(x_n, x) \leq \varepsilon/(2I) \qquad \text{pour} \;\; n \geq N(\varepsilon).$$

Alors on a bien, pour $n \geq N(\varepsilon)$,

$$d(x_n, x) \leq \sum_{i\leq I} 2^{-i} d_i(x_n, x) + \sum_{i\geq I} 2^{-i} \leq \varepsilon.$$

□

1.5 L'espace de Schwartz, espaces de Fréchet

Définition 1.5 *On appelle espace de Fréchet, un espace vectoriel E muni d'une famille dénombrable de semi-normes $|\dots|_i$, $i \in \mathbb{N}^*$ telles que $|x|_i = 0 \ \forall i \in N^* \ \Leftrightarrow \ x = 0$ (on parle de famille filtrante).*

On munit les espaces de Fréchet d'une distance, comme ci-dessus, avec, par exemple, la formule

$$d(f, g) = \sum_i 2^{-i} \min(1, |f - g|_i).$$

Ce sont alors des espaces vectoriels topologiques (voir Section 3.5.6).

En général les espaces de Fréchet ne sont pas normables (voir exercice ci-dessous). C'est le cas de l'espace

$$L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^p\big(B(0,R)\big), \ \forall R > 0\},$$

muni des semi-normes

$$|u|_k = \|f\|_{L^p(B(0,k)}.$$

C'est aussi le cas de l'espace de Schwartz.

On définit l'espace de Schwartz des fonctions régulières à décroissance rapide par :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}) = \big\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}) \quad \text{t.q.} \quad (1+|x|^k)\frac{\partial^m f}{\partial x^m} \in \mathcal{C}^0_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall m = (m_1, ..., m_d) \in \mathbb{N}^d\big\}. \tag{1.2}$$

Il s'agit d'un espace vectoriel et on définit

$$|f|_{k,m} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \big[(1 + |x|^k)|\frac{\partial^m f}{\partial x^m}|\,\big].$$

En fait, la définition peut être modifiée, par exemple en choisissant plutôt $(1+|x|^k)\frac{\partial^m f}{\partial x^m} \in L^\infty$, ou bien $(1+|x|^k)\frac{\partial^m f}{\partial x^m} \in L^2$ et ceci sans modifier l'espace défini ainsi ni les topologies, comme définies dans le Chapitre 2, induites par les distances ci-dessous.

L'espace de Schwartz joue un rôle important en analyse pour plusieurs raisons. D'une part il est dense dans beaucoup d'espace normés. D'autre part de nombreuses applications linéaires agissent de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ dans lui-même. Par exemple les dérivations $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ou bien la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

qui est un homéomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (ici il faut choisir la variante $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$) dans lui-même, voir le paragraphe 3.4.

Exercice Considérons l'espace de Schwartz et montrons qu'il est métrisable (on verra plus tard qu'il n'est pas normable).
1. Montrer que $|f|_{k,m}$ définit une semi-norme.
2. On pose

$$d(f,g) = \sum_{k,m} 2^{-(k+|m|)} \ \min(1, |f-g|_{k,m}).$$

Montrer qu'il s'agit d'une distance invariante par translation.
3. Caractériser les suites convergentes pour cette distance.

Exercice Considérons l'example suivant. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_k := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[(1+|x|)^k |f(x)|\right] < \infty.$$

Ces normes permettent de définir un espace de Fréchet comme on l'a vu ci-dessus. On veut montrer que cet espace n'est pas normable. On suppose donc qu'il existe une norme telle que pour toute suite (f_n) de E

$$\|f_n - f\| \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d(f_n, f) \to 0.$$

1. Monter qu'il existe une constante $C_k > 0$, telle que

$$\forall f \in E \qquad \|f\|_k \le C_k \, \|f\|.$$

2a.Montrer qu'il existe une constante $\eta > 0$ telle que

$$\forall f \in E \qquad d(f,0) \le \eta \quad \Longrightarrow \quad \|f\| \le 1.$$

2b. En déduire qu''il existe un k_0 tel que

$$\forall f \in E, \qquad \|f\| \le \frac{1}{\eta}\|f\|_{k_0}.$$

3. On considère, pour $\lambda(n) \geq 1$, la série de terme général

$$u_n(x) = \frac{\eta\, 2^{-n}}{(1+|x|)^{k_0}} e^{-x^2/\lambda(n)^2} \in E.$$

3a. Montrer que $\|u_n\| \leq 2^{-n}$.
3b. Trouver $\lambda(n)$ tel que cette suite ne converge pas vers 0 pour la norme $\| \ldots \|_{k_0+1}$.
4. Conclure.

Exercice (À faire aprés le pr/'ecédent)! Considérons l'espace de Schwartz.
1. Montrer que $d(f_n, g) \to 0$ est équivalent à $|f_n - g|_{k,m} \to 0$ pour tout (k, m).
2. Montrer que $d(f_n, g) \to 0$ est équivalent à $\tilde{d}(f_n, g) \to 0$ avec

$$\tilde{d}(f,g) = \sup_{k,m} \min(\frac{1}{k+|m|}, |f-g|_{k,m}).$$

3. Montrer que cet espace métrique est complet (voir Chapitre 4).
4. Montrer qu'il n'existe pas de norme telle que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ si et seulement si $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ pour chaque semi-norme $\sum_{k,m} 2^{-(k+|m|)} \frac{|f-g|_{k,m}}{1+|f-g|_{k,m}}$.

Chapitre 2

Espaces topologiques

La notion de topologie permet de travailler sur des limites sans avoir recours à une distance. Plusieurs exemples (topologie de Zariski, distributions, topologies faibles) donnent lieu à des topologies que l'on ne peut pas définir à partir d'une distance.

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

2.1 Définition d'une topologie

Définition 2.1 *Une topologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E est la donnée de parties de E vérifiant les axiomes*
(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$, *et* $E \in \mathcal{T}$,
(ii) $\omega_1 \in \mathcal{T}, \omega_2 \in \mathcal{T} \implies \omega_1 \cap \omega_2 \in \mathcal{T}$,
(iii) $\omega_i \in \mathcal{T}, \ \forall i \in I \implies \bigcup_{i \in I} \omega_i \in \mathcal{T}$.

Les éléments $\omega \in \mathcal{T}$ sont appelés ouverts, $(E, \mathcal{T})$ est appelé espace topologique.

Exemples.
1) Topologie fine : $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$,
2) Topologie grossière : $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$,
3) Topologie de Zariski. Sur $E = \mathbb{N}$,

$$\omega \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{soit} & \omega = \emptyset, \\ \textit{soit} & \exists m \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \{m, m+1, ...\} \subset \omega. \end{cases}$$

Ce troisième exemple montre bien l'utilité des axiomes de stabilité par intersection *finie* et par réunion *quelconque*.

Définition 2.2 *Un ensemble est dit discret si il est muni de la topologie fine.*

Lemme 2.1 *L'intersection de deux (ou un nombre fini, ou un nombre infini) de topologies est une topologie :* $\mathcal{T} = \bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_j$ *est une topologie.*

La réunion de topologies n'est par contre pas une topologie en général.

Preuve. En effet les axiomes (i) et (ii) sont immédiatement réalisés pour $\mathcal{T}$. Si maintenant ω_i, $i \in I$ sont des ouverts de $\mathcal{T}$, alors on peut montrer (iii) i.e. que $\bigcup_{i\in I} \omega_i \in \mathcal{T}$. En effet, on sait que pour tout $i \in I$, $\omega_i \in \mathcal{T}_j$, $\forall j \in J$, donc par (iii) appliqué à la topologie $\mathcal{T}_j$, on sait que $\bigcup_{i\in I} \omega_i \in \mathcal{T}_j$, $\forall j \in J$. On en déduit le résultat. □

2.2 Topologie d'un espace métrique

Une classe importante de topologies est fournie par les espace métriques et il est rare qu'une topologie ne soit pas *métrisable* (i.e., construite comme ci-dessous) :

Définition-Théorème 2.1 *Soit* (E, d) *un espace métrique, on définit* $\mathcal{T}$ *par*

$$\omega \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \forall a \in \omega,\ \exists R > 0 \quad t.q. \quad B(a, R) \subset \omega. \tag{2.1}$$

Alors $\mathcal{T}$ *est une topologie sur* E*. Cette topologie est aussi définie comme l'ensemble des réunions quelconques de boules ouvertes.*

Preuve. L'axiome (i) est évidemment réalisé.

Pour (ii), soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}$ et $a \in \omega_1 \cap \omega_2$. Par définition on sait qu'il existe R_1, R_2 tels que $B(a, R_1) \subset \omega_1$ et $B(a, R_2) \subset \omega_2$. On en déduit que, pour $R = \min(R_1, R_2)$, $B(a, R) \subset \omega_1 \cap \omega_2$. Donc $\omega_1 \cap \omega_2$ vérifie bien la définition d'ouvert.

Pour la propriété (iii) soit $a \in \bigcup_{i\in I} \omega_i$, donc $a \in \omega_{i_0}$ pour un certain $i_0 \in I$, avec ω_{i_0} vérifiant la propriété (2.1). Alors, il existe $B(a, R) \subset \omega_{i_0}$, et on en déduit que $B(a, R) \subset \bigcup_{i\in I} \omega_i$, ce qui prouve que $\bigcup_{i\in I} \omega_i \in \mathcal{T}$.

Enfin, l'ensemble des réunions de boules vérifie bien (2.1), et réciproquement (2.1) montre qu'un tel ω est la réunion des $B(a, R)$ correspondantes. □

Exercice Pour tout ensemble E, montrer que la topologie fine est associée à la distance discrète (voir Section 1.1.2). Qu'en est-il de la topologie grossière?

2.3 Un peu de vocabulaire

Le jargon usuel nous oblige à une fastitieuse liste de définitions qui seront très utiles par la suite. "Cela ne durera qu'un instant, vous verrez".

On se place toujours dans un espace topologique $(E, \mathcal{T})$.

2.3.1 Voisinage

Définition 2.3 *Un sous-ensemble $\mathcal{V} \subset E$ est appelé voisinage d'un point a, s'il existe un ouvert $\omega \subset \mathcal{T}$ tel que $\omega \subset \mathcal{V}$ et $a \in \omega$.*

Un ensemble $\mathcal{V}$ est un ouvert si et seulement si il est un voisinage de chacun de ses points (en exercice).

2.3.2 Fermé

Définition 2.4 *Soit $F \subset E$, on dit que F est fermé si son complémentaire $E \backslash F$ est ouvert.*

Les fermés vérifient donc les propriétés complémentaires des ouverts

(i) E et $\emptyset$ sont fermés,
(ii) une intersection quelconque de fermés est fermée,
(iii) une réunion finie de fermés est fermée.

Exercice Pour la topologie de Zariski, F est fermé si et seulement si $F = \mathbb{N}$ ou F a un nombre fini d'éléments.

Exercice Dans un espace métrique, les boules fermées sont fermées.

À titre de contre-exemple sur $\mathbb{R}^d$, soit $R_i < R$ une suite croissante vers R, alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{B}(0, R_i) = B(0, R)$, donc une réunion dénombrable de fermés n'est pas nécessairement fermée.

2.3.3 Intérieur

Définition-Théorème 2.2 *Soit $A \subset E$, il existe un ensemble, et un seul, noté $Int(A)$, vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) $Int(A)$ est ouvert,
(ii) $Int(A) \subset A$,
(iii) pour tout ouvert ω tel que $\omega \subset A$, alors $\omega \subset Int(A)$.

Cet ensemble $Int(A)$ et appelé intérieur de A. C'est le plus grand ouvert inclus dans A.

La démonstration, similaire à la suivante, est laissée au lecteur. Bien entendu, on obtient l'intérieur comme

$$Int(A) = \bigcup_{\{\omega \text{ ouvert}, \, \omega \subset A\}} \omega.$$

Par exemple, sur $\mathbb{R}$ muni de la distance euclidienne, $\mathbb{Q}$ est d'intérieur vide (aucune boule, i.e., intervalle ouvert non vide n'est inclus dans $\mathbb{Q}$).

Exercice A est ouvert si seulement si $A = Int(A)$.

Exercice Sur un espace métrique $B(a, R) \subset Int(\overline{B}(a, R))$, mais il n'y a pas égalité en général (prendre la distance discrète). Par contre pour un espace vectoriel normé il y a égalité.

2.3.4 Adhérence, densité, séparabilité

Définition-Théorème 2.3 *Soit $A \subset E$, il existe un ensemble, et un seul, noté $\bar{A}$ ou $Adh(A)$, vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) $\bar{A}$ *est fermé,*
(ii) $A \subset \bar{A}$,
(iii) pour tout fermé F tel que $A \subset F$, alors $\bar{A} \subset F$.

Cet ensemble $\bar{A}$ et appelé adhérence de A. C'est le plus petit fermé contenant A.

Preuve. Pour l'existence, on construit $\bar{A} = \displaystyle\bigcap_{\{F \text{ fermé},\, A \subset F\}} F$. Cet ensemble a bien les propriétés de contenir A, d'être fermé (voir (ii) dans la Section 2.3.2) et que tout fermé F contenant A contient bien aussi $\bar{A}$.

Pour l'unicité, soient deux ensembles $\bar{A}_1$ et $\bar{A}_2$ vérifiant ces propriétés. Alors grâce à (iii), on a à la fois $\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2$ et $\bar{A}_2 \subset \bar{A}_1$, donc $\bar{A}_1 = \bar{A}_2$. $\square$

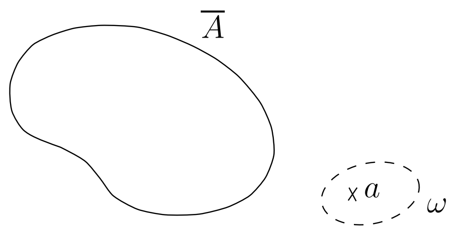

Figure 2.1: Adhérence d'un ensemble A

Théorème 2.1 *Un point $a \in \bar{A}$ si et seulement si tout ouvert contenant a rencontre A. On dit aussi que a est adhérent à A. .*

Par conséquent, dans un espace métrique (E, d), $a \in \bar{A}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un point $a_\varepsilon \in A$ tel que $d(a, a_\varepsilon) < \varepsilon$.

Preuve. (i) Soit $a \in \omega$ ouvert ne rencontrant pas A. Alors ω^C est un fermé contenant A. Par définition de $\bar{A}$, on en déduit que $\bar{A} \subset \omega^C$ donc $a \notin \bar{A}$.
(ii) Pour la réciproque, si $a \notin \bar{A}$, alors $a \in (\bar{A})^C$ ouvert ne rencontrant pas A.
(iii) L'énoncé concernant les espaces métriques et laissé en exercice. □

Exercice A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

Exercice Sur un espace métrique $Adh(B(a,R)) \subset \overline{B}(a,R)$ (et il n'y a pas égalité en général). Par contre pour un espace vectoriel normé il y a égalité.

Exercice On a la relation $\bar{A} = \big(Int(A^C)\big)^C$. Par exemple $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Ceci fournit aussi un exemple de la notion de densité et de séparabilité.

Définition 2.5 *Un sous-ensemble A d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dense si $\bar{A} = E$.*

Pour un espace métrique (E,d), le sous-ensemble A est dense si et seulement si pour tout $a \in E$ et $\varepsilon > 0$ on peut trouver un point $a_\varepsilon \in A$ tel que $d(a, a_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Définition 2.6 *Un espace topologique (E,d) est séparable s'il admet un sous-ensemble dénombrable dense.*

De nombreux espaces même très gros, sont séparables. En particulier, pour $1 \leq p < \infty$, les espaces $L^p(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, sont séparables. Par contre $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable. Une intuition derrière cette propriété est que les polynômes "tronqués" sont denses et on peut même les choisir à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Par contre dans L^∞ on ne peut se permettre une erreur de localisation : soit une suite $a_n < a$ et $a_n \to a$, alors $\mathbb{I}_{\{x \leq a_i\}}$ ne converge pas vers $\mathbb{I}_{\{x<a\}}$. Voir la Section 3.2 un peu plus loin pour ce point.

Exemple Soit l'espace vectoriel $M_{d,d}(\mathbb{R})$ des matrices $d \times d$ à coefficients réels, muni de la norme naturelle (de $\mathbb{R}^{d^2}$). Alors le sous-ensemble des matrices inversibles (de déterminant non nul) est dense.

Preuve. Soit $M \in M_{d,d}(\mathbb{R})$ une matrice de déterminant nul. Le déterminant

$$P(\lambda) = \det(M + \lambda I),$$

est un polynôme en λ. Ses racines (d au plus) sont donc isolées et pour $0 < \lambda < \lambda_1$ (avec λ_1 la plus petite racine strictement positive de P si elle existe) il ne s'annule pas. Les matrices $M + \lambda I$ sont donc inversibles et convergent vers M pour $\lambda \to 0$. On peut donc appliquer le résultat du Théorème 2.1. Voir également la Section 5.6 pour une application de ce résultat.

□

2.3.5 Frontière, extérieur

Définition 2.7 *On définit la frontière par* $Fr(A) = \bar{A} \backslash Int(A)$. *On note aussi* $\partial A = Fr(A)$ *lorsque* A *est un ouvert de* $\mathbb{R}^d$.

Cette frontière peut être "grosse" puisque sur $\mathbb{R}$, on a $Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Définition 2.8 *On définit l'extérieur de* A *par* $Ext(A) = (\bar{A})^C = Int(A^C)$.

On a donc le recouvrement disjoint $E = Int(A) \cup Fr(A) \cup Ext(A)$.

2.3.6 Espaces séparés ou espaces de Hausdorff

Définition 2.9 *(Axiome de Hausdorff) Un espace topologique* (E, d) *est dit séparé si*

$$\forall x \in E, \forall y \in E \text{ avec } x \neq y, \quad \exists \omega_x, \omega_y \text{ ouverts t.q.} \quad x \in \omega_x,\ y \in \omega_y, \quad \omega_x \cap \omega_y = \emptyset.$$

En anglais ce sont les "Hausdorff spaces" (voir [21]).

On a montré (Théorème 1.1) que tout espace métrique est séparé.

Exercice Vérifier que la topologie de Zariski n'est pas séparée, mais les points sont des fermés.

Propriété 2.1 *Dans un espace topologique* $(E, \mathcal{T})$ *séparé les points sont des fermés.*

On trouve la terminologie 'Espace $T1$' lorsque les point sont fermés, c'était le premier des cinq axiomes de séparation (*Trennungsaxiom* en allemand) introduits par Alexadroff et Hopf. Ce sont les espaces où deux points ont chacun un voisinage qui ne contient pas l'autre.

Preuve. Soit a un point de E. Pour tout point $x \neq a$ appelons ω_x un ouvert séparant x et a au sens de la définition ci-dessus. Il est clair que le complémentaire du point a s'écrit $\{a\}^C = \bigcup_{x \neq a} \omega_x$, et est donc un ouvert. Donc $\{a\}$ est un fermé. $\square$

2.3.7 Topologie induite (1)

Définition-Théorème 2.4 *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $A \subset E$, *alors*

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap \omega,\ \omega \in \mathcal{T}\},$$

définit une topologie sur A *appelée topologie induite sur* A.

Preuve. En exercice

On vérifie aussi que, pour un espace métrique (E,d), l'espace topologique induit n'est autre que l'espace métrique (A,d). En effet, les boules de (A,d) sont l'intersection avec A des boules de (E,d).

Théorème 2.2 *Soit (E,d) un espace métrique séparable et $A \subset E$, alors (A,d) est séparable.*

Preuve. Soit $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$ un ensemble dénombrable dense dans E. On peut trouver des points $b_{n,m} \in A$ tels que, pour tout $n,\ m \geq 1$,

$$d(a_n, b_{n,m}) \leq d(a_n, A) + \frac{1}{m}, \quad \text{où} \quad d(x,A) := \inf_{a \in A} d(x,a).$$

Ces points $b_{n,m}$ forment un ensemble dénombrable D_A. Montrons qu'il est dense en utilisant le critère du Théorème 2.1. Puisque $\bar{D} = E$, pour tout point $a \in A$, et tout $\varepsilon > 0$ il existe un point a_n tel que $d(a_n, a) \leq \varepsilon$. On a donc $d(a, b_{n,m}) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b_{n,m}) \leq 2\varepsilon + \frac{1}{m} \leq 3\varepsilon$ pour m assez grand, ce qui implique que $a \in \bar{D}_A$. $\square$

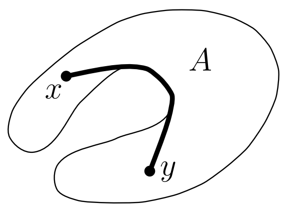

Figure 2.2: La distance intinsèque d'un ouvert A

La distance induite n'est pas forcément la distance la plus intuitive. Prenons par exemple un ouvert A borné (non convexe de préférence) de $\mathbb{R}^d$ (un anneau...mais ce pourrait être plus généralement une 'variété', la sphère par exemple). Supposons l'ensemble "connexe par arcs", voir la section 6.2, alors la distance naturelle (intrinsèque) serait plutôt

$$d_A(x,y) = \inf_{z \in \mathcal{C}^1([0,1];A)} \Big\{ \int_0^1 |\dot{z}(s)| ds;\ z(0) = x,\ z(1) = y \Big\},$$

(voir aussi la Section 1.1.2). Pour A ouvert, et fixant $y \in A$, cette distance $u(x) = d(x,y)$ vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} |\nabla u(x)| = 1, & \textit{dans } A, \\ u(y) = 0, \\ u(x) = \infty & \textit{pour } x \in A^c. \end{cases}$$

La dernière condition peut aussi s'écrire comme une condition aux limites sur la frontière de A qui a été découverte vers la fin des années 1980 (voir [6]).

2.3.8 Point isolé

Définition 2.10 *Un point x d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit isolé si $\{x\}$ est un ouvert .*

Exercice Montrer que tous les points de $(E, \mathcal{T})$ sont isolés si et seulement si $\mathcal{T}$ est la topologie discrète.

2.4 Comparaison des topologies, normes équivalentes

2.4.1 Topologie moins fine qu'une autre

Soit un ensemble E muni de deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

Définition 2.11 *On dit que la topologie $\mathcal{T}_1$ est moins fine (ou encore moins forte, ou encore elle a moins d'ouverts) que la topologie $\mathcal{T}_2$ si tout ouvert de $\mathcal{T}_1$ est aussi ouvert pour $\mathcal{T}_2$. En d'autres termes $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.*

La topologie discrète est donc la plus fine des topologies, la topologie grossière est la moins fine. Si une topologie est séparée, toute topologie plus fine est encore séparée.

Remarquons que ceci définit une structure d'ordre partiel sur les topologies de E.
Les propriétés suivantes sont évidentes

Propriété 2.2 *Soit $\mathcal{T}_1$ une topologie moins fine que $\mathcal{T}_2$, et $A \subset E$, alors*

$$Int_{\mathcal{T}_1}(A) \subset Int_{\mathcal{T}_2}(A), \qquad Adh_{\mathcal{T}_2}(A) \subset Adh_{\mathcal{T}_1}(A).$$

Exercice La topologie induite par une distance est la moins fine contenant toutes les boules ouvertes.

Notons que, l'intersection de topologies étant une topologie la notion de 'topologie la moins fine vérifiant une propriété' a un sens (comme intersection de toutes les topologies vérifiant cette propriété). On ne peut pas donner de sens en général au concept inverse.

2.4.2 Cas des espaces métriques

Définition 2.12 *Deux métriques d_1, d_2 sont dites équivalentes si elles définissent la même topologie.*

Attention, ce vocabulaire est dangeureux car des métriques équivalentes ne définissent pas les mêmes complétés (voir Section 4.2).

Exercice Sur un espace métrique (E, d), montrer que les distances $d(x, y)$, $\min(1, d(x, y))$ et $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ sont équivalentes.

Exercice Si il existe une constante $k > 0$ telle que $d_1(x, y) \leq k d_2(x, y)$ alors $\mathcal{T}_1$ est moins fine que $\mathcal{T}_2$. La réciproque est fausse (l'exercice ci-dessus fournit un contre-exemple).

2.4.3 Cas des espaces vectoriels normés

Définition-Théorème 2.5 *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\dots\|_1$ et $\|\dots\|_2$. Alors*

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \qquad \mathcal{T}_1 \textit{ est moins fine que } \mathcal{T}_2 \\ \iff & \quad \exists k > 0 \textit{ tel que } \|x\|_1 \leq k\|x\|_2,\ \forall x \in E, \\ \iff & \quad \exists k > 0 \textit{ tel que } B_2(1) \subset B_1(k). \end{aligned}$$

Deux normes sont dites équivalentes si elles définissent la même topologie, c'est-à-dire s'il existe deux constantes $k > 0$ et $K > 0$ telles que

$$\|x\|_1 \leq k\|x\|_2 \leq K\|x\|_1, \qquad \forall x \in E.$$

Preuve. (i) Montrons d'abors que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ implique $\|x\|_1 \leq k\|x\|_2$, $\forall x \in E$. Pour cela considérons la boule unité $B_1(1)$ de $\|\dots\|_1$. Celle-ci est un ouvert de $\mathcal{T}_1$ et c'est donc un ouvert de $\mathcal{T}_2$. Il s'ensuit que $B_1(1)$ contient une boule de cente l'origine pour $\|\dots\|_2$, disons $B_2(1/k)$: $B_2(1/k) \subset B_1(1)$. Donc $\|x\|_2 < \frac{1}{k} \Rightarrow \|x\|_1 < 1$, ce qui revient à dire $\|x\|_1 \leq k\|x\|_2$.

(ii) Pour la réciproque considérons un ouvert ω de $\mathcal{T}_1$. Il contient donc un boule $B_1(a, r)$ pour chacun des points $a \in \omega$. Or $B_2(a, r/k) \subset B_1(a, r) \subset \omega$. Donc ω contient bien une boule de la norme $\|\dots\|_2$ centrée sur chacun de ses points, c'est donc un ouvert de $\mathcal{T}_2$. On a bien montré que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. $\square$

Exemple Sur $\mathcal{C}^0([0, 1])$ la topologie associée à la norme $\|\dots\|_\infty$ est plus fine (forte) que la topologie associée à la norme $\|\dots\|_1$.

Exemple Sur $\mathbb{R}^d$ les normes définies dans la Section 1.3.3 sont équivalentes et on a

$$\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} |x_i| \leq \max_{i=1,\dots,d} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i|,$$

$$\frac{1}{\sqrt{d}}\Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\Big)^{1/2} \leq \max_{i=1,\dots,d} |x_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\Big)^{1/2}.$$

Plus généralement

$$\frac{1}{d^{1/p}}\|x\|_p \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \quad \forall p,\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Et les constantes sont optimales car atteintes pour les vecteurs de coordonnées égales, ou de coordonnées toutes nulles sauf une.

2.5 Base d'ouverts et construction de topologies

2.5.1 Base d'ouverts, système fondamental de voisinages

Définition 2.13 *Soit $x \in (E, \mathcal{T})$, espace topologique, et $\mathcal{V}_x$ un ensemble de parties de E tel que tout $V \in \mathcal{V}_x$ est un voisinage de x. On dit que $\mathcal{V}_x$ est un système fondamental de voisinages (ou encore une base de voisinages) de x si tout ouvert ω contenant x contient aussi un voisinage $V \in \mathcal{V}_x$.*

Définition 2.14 *On dit qu'une partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ est une base d'ouverts lorsque tout ouvert est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.*

Exemple Pour une topologie métrique, on se donne $r_0 > 0$. Les boules ouvertes $\big(B(x,r)\big)_{x\in E, r<r_0}$, fournissent une base d'ouverts. Les mêmes boules fermées fournissent une base de voisinages de x.

Sur $\mathbb{R}^d$ on peut aussi choisir comme base d'ouverts les "rectangles" ou "pavés" $R(x; r_1, \ldots, r_d) = \prod_{i=1}^d \,]x_i - r_i, x_i + r_i[$. Ceux-ci sont stables par intersection finie et les deux topologies ainsi construites sont donc les mêmes.

Sur $\mathbb{R}^2$ on peut encore choisir la base d'ouverts formée des rectangles $]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r^2, x_2 + r_2[$, qui à nouveau ne sont pas stables par intersection.

2.5.2 Système générateur d'une topologie, prébase

Théorème 2.3 *Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de E contenant E et $\emptyset$, stable par intersection finie. Alors on définit une topologie par*

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \left\{ \omega = \bigcup_{quelconque} B_i, \quad B_i \in \mathcal{B} \right\} \\ &= \{\omega \subset E \quad t.q. \quad \forall x \in \omega, \quad \exists B \in \mathcal{B}\, t.q.\, x \in B \subset \omega\}\,.\end{aligned}$$

Il s'agit bien sûr de la topologie la moins fine contenant $\mathcal{B}$, et $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts.

Il y a donc une façon très simple de construire des topologies.

Définition 2.15 *Soit $\mathcal{G}$ un ensemble de parties de E contenant E et $\emptyset$, soit $\mathcal{B}$ les intersections finies de partie de $\mathcal{G}$. Alors $\mathcal{B}$ étant stable par intersection finie, l'ensemble des réunions de parties de $\mathcal{B}$ est une topologie*

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{quelconque} \bigcap_{finie} G_i, \qquad G_i \in \mathcal{G} \right\}.$$

On dit que $\mathcal{G}$ est une prébase ou encore un système générateur de cette topologie ou encore que $\mathcal{G}$ engendre cette topologie.

Il s'agit de la topologie la moins fine contenant les éléments de $\mathcal{G}$.

Preuve du Théorème 2.3. (i) On a : $\emptyset \in \mathcal{T}$, $E \in \mathcal{T}$ grâce à l'hypothèse similaire sur $\mathcal{B}$.
(ii) On vérifie la stabilité par intersection finie grâce à la deuxième définition de $\mathcal{T}$. Soit $x \in \bigcap_{finie} \omega_i$, alors $x \in \omega_i$ pour tout i, donc on peut trouver $B_i \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_i$ et $B_i \subset \omega_i$. Alors l'intersection finie des B_i est incluse dans $\bigcap_{finie} \omega_i$, contient x et appartient à $\mathcal{B}$.
(iii) La stabilité par réunion est évidente sur la première définition de $\mathcal{T}$.
(iv) On laisse en exercice l'égalité des deux ensembles. $\square$

2.5.3 Engendrer efficacement une topologie

La méthode ci-dessus n'est pas toujours efficace. Par exemple ce n'est pas celle utilisée pour définir la topologie d'un espace métrique. En effet les boules ne sont pas stables par intersection finie (mais les rectangles de $\mathbb{R}^d$ le sont). Une autre méthode est la suivante.

Donnons-nous un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de E vérifiant

$$\begin{cases} E \in \mathcal{B},\ \emptyset \in \mathcal{B}, \\ \\ \forall B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad t.q. \quad x \in B \subset B_1 \cap B_2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Théorème 2.4 *On définit une topologie par*

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \quad &= \{\omega = \bigcup_{quelconque} B_i, \quad B_i \in \mathcal{B}\} \\ &= \{\omega \subset E \quad t.q. \quad \forall x \in \omega \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad t.q. \quad x \in B \subset \omega\}. \end{aligned}$$

Cette topologie est la moins fine contenant $\mathcal{B}$. De plus $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $\mathcal{T}$.

Preuve. En exercice.

La topologie des espaces métriques a bien été construite comme ceci.

2.6 Exemple: l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, topologies de Schwartz et de Whitney

On considère l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, C^∞ à support compact, noté $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.
Sur cet espace, on peut définir deux topologies pertinentes, à savoir les topologies de

Schwartz et de Whitney qui sont toutes les deux définies suivant le même principe. On considère une famille non vide de 'boules généralisées' $\{B_i\}_{i\in I}$ vérifiant

$$\forall i, j \in I, \forall x \in B_i \cap B_j, \exists k \in I, x \in B_k \subset B_i \cap B_j$$

et on dira qu'un ensemble Ω de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est un ouvert si $\forall x \in \Omega, \exists i \in I, x \in B_i \subset \Omega$. On définit ainsi une topologie dépendant de la famille $\{B_i\}_{i\in I}$ comme dans le Théorème 2.4.

Définition 2.16 (Topologie de Schwartz) *La topologie de Schwartz, notée $\mathcal{T}_s$, est définie comme ci-dessus en prenant pour famille $\{B_i\}_{i\in I}$ les ensembles :*

$$B_s(f,\epsilon) = \{g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), |\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha g(x)| \leq \epsilon(x), \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \alpha(x) \in \mathbb{N}^d \textit{ tel que } |\alpha| < \min_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{\epsilon(x)}\}$$

où $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et ϵ est continue strictement positive et tendant vers 0 lorsque $x \to \infty$ (i.e. $\epsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+^*)$).

Définition 2.17 (Topologie de Whitney) *La topologie de Whitney, $\mathcal{T}_w$, est quant à elle définie en prenant pour famille $\{B_i\}_{i\in I}$ les ensembles :*

$$B_w(f,\epsilon,m) = \{g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), |\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha g(x)| < \epsilon(x), \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \textit{ tel que } |\alpha| \leq m\}$$

où $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, m est un entier naturel et $\epsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*)$.

On veut en particulier montrer que ces deux topologies sont différentes, ne sont pas métrisables et définissent les mêmes suites convergentes.

2.6.1 Quelques propriétés préliminaires

Proposition 2.1 *La topologie de Whitney est strictement moins fine que celle de Schwartz (i.e. $\mathcal{T}_w \subset \mathcal{T}_s$ et l'inclusion est stricte).*

Preuve. (i) Montrons d'abord que $\mathcal{T}_w \subset \mathcal{T}_s$.
Il suffit de prouver que

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \forall m \in \mathbb{N}, \forall \epsilon_1 \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*), \exists \epsilon_2 \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*), B_s(f,\epsilon_2) \subset B_w(f,\epsilon_1,m).$$

Or, si $\epsilon_2(x) = \min(\frac{1}{m}, \epsilon_1(x))$ on a d'une part $\epsilon_2 \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*)$ et d'autre part, $\forall g \in B_s(f,\epsilon_2)$:

$$|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha g(x)| \leq \epsilon_2(x), \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \textit{ tel que } |\alpha|_1 \leq \frac{1}{\epsilon_2(x)}$$

donc,

$$|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha g(x)| \leq \epsilon_1(x), \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \textit{ tel que } |\alpha|_1 \leq m.$$

On a ainsi $g \in B_w(f, \epsilon_1, m)$, et l'inclusion est donc prouvée.

(ii) Reste à prouver que $\mathcal{T}_w \neq \mathcal{T}_s$.
On prend $\epsilon(x_1, ..., x_d) = \frac{1}{2+||x||_1}$ qui est bien de limite nulle en l'infini et il suffit de montrer que $\forall \epsilon^* \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*), \forall m \in \mathbb{N}, B_w(0, \epsilon^*, m) \not\subset B_s(0, \epsilon)$.
Soit $\epsilon^* \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*)$ et $m \in \mathbb{N}$. Considérons le compact $K = \overline{B}(m, 1)$ et ψ une fonction plateau sur K, c'est-à-dire une fonction C^∞ de K dans $[0; 1]$ vérifiant $\psi(x) = 1$ sur $\overline{B}(m, \frac{1}{2})$ et $\psi(x) = 0$ hors de K. Posons enfin $\phi_n(x) = \frac{\sin(n(x_1-m))\psi(x)}{n^{m+\frac{1}{2}}}$.
On a clairement ϕ_n fonction C^∞ à support compact avec $||\frac{\partial^k}{(\partial x_1)^k}\phi_n||_\infty \leq n^{k-m-\frac{1}{2}}$, et puisque ϵ^* est minorée par une quantité strictement positive sur K, on peut choisir n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \phi_n \in B_w(0, \epsilon^*, m)$. Reste à montrer que $\exists n \geq n_0, \phi_n \notin B_s(0, \epsilon)$ et pour cela remarquons que $\frac{\partial^{m+1}}{(\partial x_1)^{m+1}}\phi_n(m, 0, ..., 0) = \sqrt{n}\sin^{(m+1)}(0)$ et $\frac{\partial^{m+2}}{(\partial x_1)^{m+2}}\phi_n(m, 0, ..., 0) = n^{\frac{3}{2}}\sin^{(m+2)}(0)$ par définition de la fonction plateau ψ.
Si on avait alors $\forall n \geq n_0, \phi_n \in B_s(0, \epsilon)$, on aurait en particulier $\forall n \geq n_0, |\sqrt{n}\sin^{(m+1)}(0)| \leq \frac{1}{m+2}$ et $|n^{\frac{3}{2}}\sin^{(m+2)}(0)| \leq \frac{1}{m+2}$ ce qui absurde puisque l'une des deux quantités tend vers $+\infty$ lorsque $n \to \infty$. □

Passons maintenant à une caractérisation des suites convergentes dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ pour les deux topologies mais avant cela remarquons par application de la proposition précédente que si une suite (f_n) converge vers f dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de Schwartz alors il en de même dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de Whitney.

Proposition 2.2 (Caractérisation des suites convergentes) *Soit (f_n) une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) (f_n) converge vers f pour la topologie de Schwartz.
(ii) (f_n) converge vers f pour la topologie de Whitney.
(iii) $\exists R, \forall n, supp(f_n) \subset \overline{B}(0, R), supp(f) \subset \overline{B}(0, R)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $(\partial^\alpha f_n)$ converge uniformément sur $\overline{B}(0, R)$ vers $\partial^\alpha f$.

Preuve. (a) On a déjà remarqué que $(i) \Rightarrow (ii)$.

(b) Montrons que $(ii) \Rightarrow (iii)$.
Si (f_n) converge vers f pour la topologie de Whitney, posons tout d'abord R_f tel que $supp(f) \subset \overline{B}(0, R_f)$.
On a
$$\forall \epsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*), \exists n_\epsilon, \forall n \geq n_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R}^d, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon(x),$$
donc on particulier si $n \geq n_\epsilon$ et $x \notin \overline{B}(0, R_f)$, $|f_n(x)| \leq \epsilon(x)$.
Supposons alors que les (f_n) n'aient pas un support commun. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \notin \overline{B}(0, n), \exists \varphi(n) \in \mathbb{N}, f_{\varphi(n)}(x_n) \neq 0.$$
On peut classiquement s'arranger pour que $(f_\varphi(n))$ soit une suite extraite de (f_n) et puisque $\lim_{n\infty} ||x_n|| = +\infty$ on peut aussi extraire de (x_n) une suite $(x_{\psi(n)})$ avec toujours

$||x_{\psi(n)}|| > \psi(n) \geq n$ mais aussi $||x_{\psi(n+1)}|| - ||x_{\psi(n)}|| \geq 1$.
On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{\varphi(\psi(n))}(x_{\psi(n)}) \neq 0$ mais aussi $lim_{n\infty} f_{\varphi(\psi(n))}(x_{\psi(n)}) = 0$.
En effet, $\forall \eta > 0$, si $\epsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*)$ vérifie $||\epsilon||_\infty \leq \eta$ alors, $\forall n \geq \max(n_\epsilon, R_f), ||x_{\psi(n)}|| > n \geq R_f$ donc $|f_{\varphi(\psi(n))}(x_{\psi(n)})| \leq \epsilon(x_{\psi(n)}) \leq \eta$.
Prenons alors $\epsilon_1 \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\epsilon_1(x_{\psi(n)}) = \frac{|f_{\varphi(\psi(n))}(x_{\psi(n)})|}{2}$ ce qui est possible d'après ce que nous venons de voir et puisque nous avons pris soin d'imposer $||x_{\psi(n+1)}|| - ||x_{\psi(n)}|| \geq 1$.
On a donc, d'après ce que nous avons dit au début,

$$\forall n \geq \max(n_{\epsilon_1}, R_f), |f_{\varphi(\psi(n))}(x_{\psi(n)})| \leq \epsilon_1(x_{\psi(n)})$$

Cette dernière inégalité étant absurde par construction même de ϵ_1, on a bien prouvé que $\exists R$ (que l'on peut choisir $\geq R_f$) tel que $\forall n, supp(f_n) \subset \overline{B}(0, R)$ et vérifiant donc aussi $supp(f) \subset \overline{B}(0, R)$.
Reste donc à prouver la propriété de convergence uniforme.
Pour cela, prenons $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\forall \eta > 0, \exists \epsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*)$ tel que $||\epsilon||_\infty \leq \eta$.
Par hypothèse,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in n_0, f_n \in B_w(f, \epsilon, |\alpha|_1).$$

Ainsi, $\forall x \in \overline{B}(0, R), \forall n \geq n_0, |\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f_n(x)| \leq \eta$ ce qui prouve bien la convergence uniforme de $(\partial^\alpha f_n)$ vers $\partial^\alpha f$.

(c) Montrons que $(iii) \Rightarrow (i)$.
Soient (f_n) vérifiant les hypothèses de (iii) et $\epsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*)$.
Posons $m = \min_{||x|| \leq R} \epsilon(x)$ et remarquons que pour écrire $f_n \in B_s(f, \epsilon)$ il suffit d'avoir la propriété $(\diamondsuit)$ suivante :

$$\forall x \in \overline{B}(0, R), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha|_1 \leq \frac{1}{m} \Rightarrow |\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f(x)| \leq m.$$

Or pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et donc a fortiori si $|\alpha|_1 \leq \frac{1}{m}$ on a $(\partial^\alpha f_n)$ qui converge uniformément sur $\overline{B}(0, R)$ vers $\partial^\alpha f$. Ainsi, $\exists N, \forall n \geq N, f_n$ vérifie la propriété $\diamondsuit$ et donc (f_n) converge vers f pour la topologie de Schwartz. $\square$

Remarque 2.1 *Ceci permet en particulier de montrer que l'une des deux topologies n'est pas métrisable. En effet, elles définissent les mêmes suites convergentes et ne sont pourtant pas égales.*

2.6.2 Non métrisabilité des topologies $\mathcal{T}_w$ et $\mathcal{T}_s$

En fait, on va montrer quelquechose de plus fort à savoir que ni l'une ni l'autre ne sont métrisables (ces topologies ne sont pas définies par des distances).

Pour cela, on va considérer l'ensemble $E = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \mid supp(f) = \overline{B}(0,1), \forall x \in B(0,1), f(x) > 0\}$. On prend alors $\phi \in E$ et définit un autre ensemble :

$$\mathcal{E} = \{x \mapsto f(x) + \lambda\phi(x - \frac{1}{f(0)}e_1) \mid f \in E, \lambda > 0\}$$

C'est à partir de cet ensemble que l'on va prouver la non métrisabilité des topologies $\mathcal{T}_s$ et $\mathcal{T}_w$.
Plus précisement, on va montrer, d'une part qu'aucune suite de $\mathcal{E}$ ne peut converger vers 0 (ceci, comme nous l'avons vu dans la caractérisation des suites convergentes, ne dépend pas du choix de la topologie choisie parmi $\mathcal{T}_s$ et $\mathcal{T}_w$), et d'autre part que $0 \in \overline{\mathcal{E}}$ pour la topologie de Schwartz (et a fortiori pour celle de Whitney puisque $\mathcal{T}_w \subset \mathcal{T}_s$).

Lemme 2.2 *Aucune suite de $\mathcal{E}$ ne peut converger vers 0 pour l'une des deux topologies.*

Preuve. Par l'absurde, soit (f_n) une suite de $\mathcal{E}$ convergeant vers 0 pour $\mathcal{T}_s$ ou $\mathcal{T}_w$.
Par définition de $\mathcal{E}$, $\forall n, \exists g_n \in E, \exists \lambda_n > 0, f_n(x) = g_n(x) + \lambda_n\phi(x - \frac{1}{g_n(0)}e_1)$.
Soit alors $R > 0$ tel que $\forall n, supp(f_n) \subset \overline{B}(0,R)$.
On a trivialement $0 \leq g_n(x) \leq f_n(x)$ et donc, puisque (f_n) converge uniformément vers 0, $\lim_{n\infty} g_n(0) = 0$. Ainsi, $\exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{g_n(0)} > R$ donc $0 = f_n(\frac{1}{g_n(0)}) > \lambda_n\phi(0)$, ce qui est absurde car $\phi \in E$ et $\lambda_n > 0$. $\square$

Lemme 2.3 $0 \in \overline{\mathcal{E}}$ *pour la topologie de Schwartz (et donc pour celle de Whitney).*

Preuve. Il suffit de montrer que $\forall \epsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*), B_s(0,\epsilon) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$.
Soit donc $\epsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*)$ et $m = min_{x\in\overline{B}(0,1)}\epsilon(x)$. Prenons $f \in E$ vérifiant $|\partial^\alpha f| \leq m, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ *tel que* $|\alpha|_1 \leq \frac{1}{m}$; une telle fonction existe bien et quitte à la multiplier par un scalaire, on peut supposer $f(0) > 2$ de sorte que $\overline{B}(0,1) \cap \overline{B}(\frac{1}{f(0)}e_1, 1) = \emptyset$.
Posons alors $\mu = min_{x\in\overline{B}(\frac{1}{f(0)}e_1,1)}\epsilon(x)$. Il va exister un scalaire $\lambda > 0$ vérifiant $\lambda|\partial^\alpha\phi(x)| \leq \mu, \forall x \in \overline{B}(\frac{1}{f(0)}e_1, 1), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ *tel que* $|\alpha|_1 \leq \frac{1}{\mu}$ et donc, si $g(x) = f(x) + \lambda\phi(x - \frac{1}{f(0)}e_1)$ on a par construction $g \in B_s(0,\epsilon) \cap \mathcal{E}$. $\square$

Ces deux lemmes permettent donc d'énoncer le théorème auquel nous voulions aboutir :

Théorème 2.5 *Les topologies de Schwartz et de Whitney ne sont pas métrisables.*

Preuve. Si l'une des deux topologies était métrisable, puisque $0 \in \overline{\mathcal{E}}$ on aurait l'existence d'une suite de $\mathcal{E}$ convergeant vers 0 ce qui n'est pas le cas. $\square$

2.6.3 Complétude de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ au sens des e. v. t.

On pourrait donc se croire incapable de manipuler ses topologies, mais il convient de remarquer que, malgré leur non-métrisabilité, les topologies de Schwartz et de Whitney munissent tout de même $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ d'une structure d'espace vectoriel topologique permettant de parler de suite de Cauchy et donc de complétude ce qui est fondamental.
Dans cette dernière partie, on va donc s'atteler à démontrer la complétude des espaces $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \mathcal{T}_w)$ et $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \mathcal{T}_s)$.

Théorème 2.6 *(Complétude)* $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \mathcal{T}_w)$ *et* $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \mathcal{T}_s)$ *sont des evt complets.*

Preuve. Remarquons tout d'abord que, puisque $\mathcal{T}_w \subset \mathcal{T}_s$, toute suite de Cauchy dans $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \mathcal{T}_s)$ est aussi de Cauchy dans $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \mathcal{T}_w)$. Ainsi, puisque la convergence des suites ne dépend pas de la topologie choisie parmi $\mathcal{T}_w$ et $\mathcal{T}_s$, il suffit de prouver que $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \mathcal{T}_w)$ est complet.
Soit donc (f_n) de Cauchy dans $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \mathcal{T}_w)$. On peut montrer, d'une manière quasi-identique à celle employée pour les suites convergentes, que :

$$\exists R > 0, \forall n, supp(f_n) \subset \overline{B}(0, R)$$

Il nous faut donc juste montrer qu'il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $(\partial^\alpha f_n)$ converge uniformément sur $\overline{B}(0, R)$ vers $\partial^\alpha f$, puisqu'alors f sera aussi nulle hors de $\overline{B}(0, R)$.
Pour cela, on va plonger notre suite de Cauchy dans des espaces de Banach bien connus, à savoir les $C^k(\overline{B}(0, R), \mathbb{R})$ dont la norme $||.||_k$ est définie par :

$$||f||_k = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha|_1 \leq k} ||\partial^\alpha f||_\infty$$

De fait, comme nous l'avons déjà remarqué, $\forall \eta > 0, \exists \epsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*)$ tel que $||\epsilon||_\infty \leq \frac{\eta}{\sum_{i=0}^k d^i}$. Ainsi, puisque $\exists N, \forall n, p > N, f_n - f_p \in B_w(0, \epsilon, k)$, on a $\forall n, p > N, ||f_n - f_p||_k \leq \eta$ et donc la suite (f_n) est de Cauchy dans $C^k(\overline{B}(0, R), \mathbb{R})$ et converge donc vers une fonction f qui est elle aussi C^k. Puisque la limite f ne dépend pas de k (c'est en fait la limite simple des (f_n)), et puisque le raisonnement fait précédemment est valable pour tout k, on a bien obtenu une fonction f de classe C^∞ vérifiant les propriétés souhaitées.
Ainsi, (f_n) converge vers f pour la topologie de Whitney et l'espace considéré est complet.
□

Ce type de topologies fournit des bases théoriques à la théorie des distributions [25].

2.7 Exercices

Exercice (Topologie de Zariski) Soit k un corps. Une partie F de k^n est un fermé de Zariski s'il existe une famille $(P_i)_{i \in I}$ de polynmes de $k[X_1, \ldots, X_n]$ telle que

$$F = \{x \in k^n \mid \forall i \in I, \ P_i(x) = 0\}.$$

1. Vérifier qu'il existe une (unique) topologie sur k^n dont les fermés soient exactement les fermés de Zariski.
2. Lorsque $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, comparer la topologie de Zariski et la topologie usuelle.
3. La topologie de Zariski est-elle séparée ?

Exercice (Topologie de la "limite supérieure" sur $\mathbb{R}$) On munit $\mathbb{R}$ de la topologie $\mathcal{T}_{\limsup}$ engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ et $]b, +\infty[$.

1. Cette topologie est-elle plus fine ou moins fine que la topologie usuelle ? Est-elle séparée ?
2. Montrer que les intervalles $]a, b]$ (avec $a < b$) forment une base d'ouverts.
3. Déterminer l'adhérence de $]a, b]$.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour cette topologie.
5. Montrer qu'elle n'est pas métrisable (*indication: il n'existe pas de base dénombrable d'ouverts*).
6. À quelle condition une suite x_n de réels converge-t-elle vers x ?
7. On définit de faon analogue la topologie de la limite inférieure $\mathcal{T}_{\liminf}$. Montrer que $\mathcal{T}_{\limsup} \cap \mathcal{T}_{\liminf}$ est la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.

Exercice (Axiomes de séparation) On peut définir plusieurs axiomes de séparation pour un espace topologique $(X, \mathcal{O})$:

- (axiome de Kolmogorov) On dit que X est T_0 si pour toute paire a, b de points distincts de X, on peut trouver un ouvert U tel que ($a \in U$ et $b \notin U$) ou ($a \notin U$ et $b \in U$).
- (axiome de Fréchet) On dit que X est T_1 si pour toute paire a, b de points distincts de X, on peut trouver deux ouverts U et V tels que $a \in U$, $b \in V$, $a \notin V$ et $b \notin U$.
- (axiome de Hausdorff) On dit que X est T_2, ou séparé, si pour toute paire a, b de points distincts de X, on peut trouver deux ouverts disjoints U et V tels que $a \in U$ et $b \in V$.

1. Montrer que X est T_1 si et seulement si les points sont des fermés.
2. Montrer que X est T_2 si et seulement si chaque point est l'intersection de ses voisinages fermés.
3. On a bien entendu $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. Montrer que les implications réciproques sont fausses. Les limites des suites sont-elles uniques dans les espaces T_0 ? Et dans les espaces T_1 ?

On introduit également les axiomes suivants:

- On dit que X est T_3 si pour tout fermé A et tout point $b \notin A$, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $b \in V$.

- On dit que X est T_4 si pour toute paire de fermés disjoints A et B, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

On dit qu'un espace est *régulier* s'il est T_0 et T_3, et *normal* s'il est T_1 et T_4.

4. Montrer que $T_3 \not\Rightarrow T_2$ et que $T_4 \not\Rightarrow T_3$. Montrer en revanche qu'un espace régulier est séparé, et qu'un espace normal est régulier.
5. Montrer qu'un espace X est régulier si et seulement si pour tout point x de X, les voisinages fermés de x forment une base de voisinages de x.
6. Donner un exemple d'espace séparé non régulier.
Indication: mettre sur $\mathbb{R}$ *la topologie engendrée par les intervalles ouverts et par* $\mathbb{Q}$.
7. Montrer que les espaces métriques sont normaux.
8. Montrer que l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\limsup})$ introduit à l'exercice précédent est normal.

Chapitre 3

Continuité, limites, convergence

3.1 Fonctions continues entre espaces topologiques

3.1.1 Espaces topologiques

On se donne deux espaces topologiques $(E_1, \mathcal{T}_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2)$, et une application $f : E_1 \to E_2$.

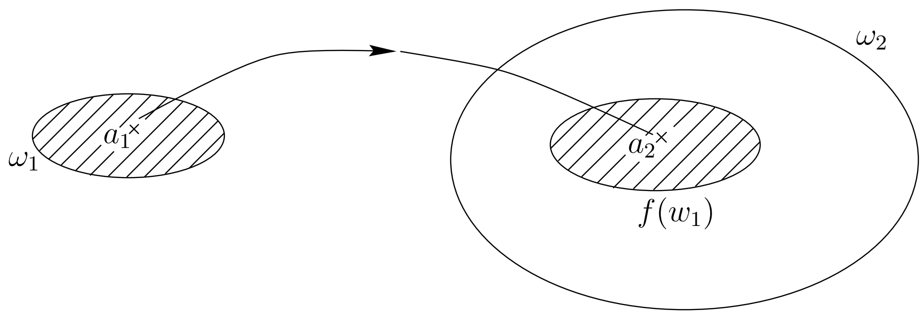

Figure 3.1: Continuité d'une fonction f au point a_1.

Définition 3.1 *Soit $a_1 \in E_1$ et $a_2 = f(a_1)$. On dit que f est continue au point a_1 si*

$$\begin{array}{c} \forall \omega_2 \text{ ouvert contenant } a_2, \quad \exists \omega_1 \text{ ouvert contenant } a_1 \text{ t.q.} \\ x \in \omega_1 \Rightarrow f(x) \in \omega_2 \quad (\text{ou encore } f(\omega_1) \subset \omega_2). \end{array} \tag{3.1}$$

La fonction f est dite continue si elle est continue en tout point de E_1.

Théorème 3.1 *f est continue au point a_1 si et seulement si*

$\forall V_2$ *voisinage de* a_2, $\quad \exists V_1$ *voisinage de* a_1 *t.q.* $x \in V_1 \Rightarrow f(x) \in V_2$ *(ou encore* $f(V_1) \subset V_2$*).*

Preuve. Il faut simplement montrer que les deux énoncés "voisinage de" et "ouvert contenant" sont bien équivalents. Tout d'abord, remarquons que l'énoncé du théorème est équivalent à

$$\forall V_2 \text{ voisinage de } a_2, \qquad \exists \omega_1 \text{ ouvert contenant } a_1 \; t.q. \; x \in \omega_1 \Rightarrow f(x) \in V_2,$$

car si cela est vrai pour un voisinage, ce l'est aussi pour un ouvert qui est inclus dans ce voisinage -et il en existe!-, et si c'est vrai pour un ouvert, ça l'est aussi pour un voisinage puisqu'un ouvert est un voisinage!

Par ailleurs, ce second énoncé est bien équivalent à

$$\forall \omega_2 \text{ ouvert contenant } a_2, \qquad \exists \omega_1 \text{ ouvert contenant } a_1 \; t.q. \; x \in \omega_1 \Rightarrow f(x) \in \omega_2,$$

car si cela est vrai pour tout voisinage a fortiori c'est vrai pour les ouverts car ce sont des voisinages, d'autre part si c'est vrai pour tout ouvert, quand on choisit un voisinage il contient un ouvert ω_2 et la conséquence est donc réalisée en choisissant ω_1 correspondant à cet ouvert ω_2. $\square$

Définition 3.2 *Soit $F \subset E_1$ (muni de la topologie induite), $a_1 \in \bar{F}$ et f une application continue de $F \to E_2$. On dit que f admet une limite a_2 en a_1, on note $a_2 = \lim_{F \ni a \to a_1} f(a)$ si pour tout ouvert $\omega_2 \ni a_2$ de E_2, il existe un ouvert $\omega_1 \ni a_1$ de E_1 tel que $f(\omega_1 \cap F) \subset \omega_2$.*

Une telle fonction se prolonge par continuité à $F \cup \{a_1\}$ avec $f(a_1) := a_2$.

Exercice Quelles sont les fonctions continues en un point donné pour la topologie grossière de E_1? pour la topologie discrète de E_1?

Exercice Quelles sont les fonctions continues de $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{Zariski})$ dans $\mathbb{R}$? (Ce sont les suites convergentes).

Exercice La fonction $u \to \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$, de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même est continue pour les topologies de Schwartz et de Whitney.

Théorème 3.2 *L'application f est continue si et seulement si pour tout ouvert ω_2 de E_2, $f^{-1}(\omega_2)$ est un ouvert de E_1 :*

$$\forall \omega_2 \in \mathcal{T}_2, \qquad f^{-1}(\omega_2) \in \mathcal{T}_1.$$

Ou encore si f^{-1}(fermé) est fermé.

Preuve. ($\Rightarrow$) Soit $\omega_2 \in \mathcal{T}_2$, et posons $A_1 = f^{-1}(\omega_2)$, est-ce un ouvert de E_1? Soit un point $a \in A_1$, comme $a_2 = f(a)$ appartient à ω_2, la définition de la continuité au point a montre qu'il existe $\omega_a \in \mathcal{T}_1$ contenant a tel que $f(\omega_a) \subset \omega_2$, i.e., $a \in \omega_a \subset f^{-1}(\omega_2) = A_1$.

Donc on peut écrire $A_1 = \bigcup_{a \in \omega_1} \omega_a$ et c'est bien un ouvert car une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.

($\Leftarrow$) Soit $a_2 = f(a_1)$ et ω_2 ouvert contenant a_2. Alors $\omega_1 = f^{-1}(\omega_2)$ est un ouvert contenant a_1 et convient donc dans la définition de la continuité au point a_1. $\square$

Théorème 3.3 *Soient deux fonctions $f : (E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$, $g : (E_2, \mathcal{T}_2) \to (E_3, \mathcal{T}_3)$ continues, alors $g \circ f$ est continue.*

Preuve. En exercice.

Théorème 3.4 *Avec les notations du Théorème 3.2, soit A dense dans E_1 alors $f(A)$ est dense dans $f(E_1)$ pour sa topologie induite.*

Preuve. On utilise le résultat du Théorème 2.1 avec $\bar{A} = E_1$. Soit $\omega_2 \cap f(E_1)$ un ouvert non vide de $f(E_1)$, alors $f^{-1}(\omega_2 \cap f(E_1)) = f^{-1}(\omega_2)$ est un ouvert non vide de E_1, donc il contient un élément $a \in A$ et $f(a) \in \omega_2 \cap f(E_1)$.

Théorème 3.5 *Soit une fonction $f : (E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$ continue au point $a \in E_1$, alors f est encore continue pour toute topologie plus fine sur E_1 et moins fine sur E_2.*

Preuve. En exercice.

3.1.2 Cas des espaces métriques

Théorème 3.6 *Soient deux espaces métriques (E_1, d_1) et (E_2, d_2), et une application $f : E_1 \to E_2$. L'application f est continue au point a_1 équivalent à*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \quad t.q. \quad d_1(x, a_1) < \eta \Rightarrow d_2(f(x), f(a_1)) < \varepsilon,$$

et aussi équivalent à : pour toute suite $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a_1$, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a_1)$.

Preuve. La démonstration de cette nouvelle version suit le même raisonnement que pour la preuve du Théorème 3.1

En effet, l'énoncé (3.1) est équivalent à :

$$\forall \omega_2 \text{ ouvert contenant } a_2, \qquad \exists \eta \ t.q.\ x \in B_1(a_1, \eta) \Rightarrow f(x) \in \omega_2,$$

car si cela est vrai pour un ouvert, ce l'est aussi pour une boule ouverte qui est incluse dans ce voisinage -et il en existe!-, et si c'est vrai pour une boule, ça l'est aussi pour un ouvert puisqu'une boule ouverte est un ouvert!

Par ailleurs, ce second énoncé est bien équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \ t.q. \Big(x \in B_1(a_1, \eta) \Rightarrow f(x) \in B_2(a_2, \varepsilon)\Big),$$

car si cela est vrai pour tout ouvert a fortiori c'est vrai pour les boules ouvertes, d'autre part si c'est vrai pour toute boule ouverte, quand on choisit un ouvert contenant a_2, il contient une boule ouverte $B_2(a_2, \varepsilon)$ et la conséquence est donc réalisée pour la boule $B_1(a_1, \eta)$ correspondante. $\square$

Exemple Une application constante est toujours continue.

Exemple L'application $x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\} \mapsto 1/x$ est continue.

Exemple Dans un espace métrique (E, d) l'application $x \mapsto d(x, a)$ est continue.

Exercice Considérons deux espaces métriques (E, d_E), (F, d_F) tels que

$$d_E(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \min(1, d_i(x, y)), \qquad \text{(avec } d_i \text{ des distances sur } E\text{).}$$

et considérons une application $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$.
(i) Montrer que si il existe d_i telle que $f : (E, d_i) \to (F, d_F)$ est continue alors f est continue pour d_E. Trouver un contreexemple à la réciproque.
(ii) Montrer que $f : (F, d_F) \to (E, d_E)$ est continue si et seulement si pour tout d_i, $f : (F, d_F) \to (E, d_i)$ est continue.
(iii) Montrer que l'application $u \to \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$, de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même est continue pour sa topologie métrique naturelle (voir le paragraphe 1.5).

3.1.3 Semi-continuité

Définition 3.3 *Une application $f : (E, \mathcal{T}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite semi-continue inférieurement au point a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \textit{il existe un ouvert } \ \omega \ni a \ \textit{t.q.} \ \forall x \in \omega, \ f(x) > f(a) - \varepsilon.$$

Définition 3.4 *Une application $f : (E, \mathcal{T}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite semi-continue inférieurement si les propriétés équivalentes suivantes sont satisfaites*
(i) elle est semi-continue inférieurement en tout point,
(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\{x;\ \lambda < f(x)\}$ est un ouvert de $\mathcal{T}$,
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\{x;\ f(x) \leq \lambda\}$ est un fermé.

Ces propriétés sont équivalentes de façon évidente et sont laissées en exercice. En pratique la propriété (ii) est celle qui est utilisée ou bien l'une des propriétés suivantes.

On définit de même les applications semi-continues supérieurement, $f : (E, \mathcal{T}) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \{x;\ f(x) < \lambda\} \quad \text{est un ouvert de } \ \mathcal{T}.$$

On voit immédiatement qu'une application $f : (E, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si elle à la fois s.c.s. et s.c.i.

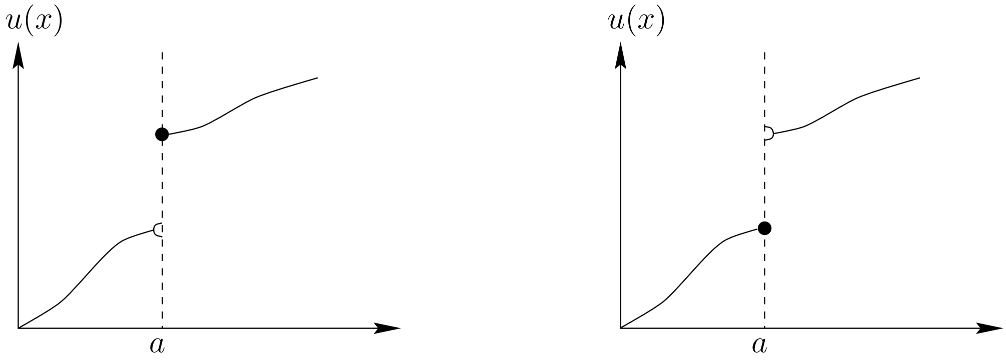

Figure 3.2: Exemple de fonctions s.c.s. (à gauche) et s.c.i (à droite).

Propriété 3.1 *Une somme finie, un* min *fini d'applications semi-continues inférieurement est semi-continu inférieurement. Pour une famille quelconque d'applications semi-continues inférieurement* $(f_i)_{i \in I}$,

$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x),$$

est semi-continue inférieurement.

Preuve. Nous ne démontrons que le dernier résultat en utilisant le critère (ii). Soit $\lambda < f(a)$, alors on peut trouver un $i_0 \in I$ tel que $\lambda < f_{i_0}(a) \leq f(a)$. Puisque f_{i_0} est s.c.i., il existe un ouvert contenant a, ω, tel que $f_{i_0}(x) > \lambda$ pour tout $x \in \omega$. On en conclut que $f(x) > \lambda$ pour tout $x \in \omega$ ce qui prouve (ii). $\square$

Définition 3.5 *Soit une application* $f : (E, \mathcal{T}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *et* $a \in E$. *On définit la limite inférieure pour* x *tend vers* a, *par :*

$$\liminf_{x \to a} f(x) = \sup\{\lambda; \exists\, \omega \text{ ouvert contenant } a \text{ t.q. } f(x) \geq \lambda \quad \forall x \in \omega\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Contrairement à la limite, la *liminf* existe toujours dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Exercice Soit $f : (E, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit

$$u^*(x) = \limsup_{y \to x} u(y), \qquad u_*(x) = \liminf_{y \to x} u(y).$$

Montre que u^* est s.c.s. et u_* est s.c.i.

Exercice Pour toute fonction $x(\cdot)$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^d$, continue ou non, on définit sa longueur $l(x)$ par

$$l(x) = \sup_n \sup_{0 = t_0 < \ldots < t_n = 1} \sum_{i=1}^{n} |x(t_{i-1}) - x(t_i)| \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

On appelle courbe, l'image de $x(/cdot)$ et chemin (ou arc) une telle fonction lorsqu'elle est continue. que x et y décrivent la même courbe s'il existe $\phi \in \mathcal{C}^0([0,\ 1],\ [0,\ 1])$, bijective telle que $x(\phi(t)) = y(t)$, $\forall t \in [0,\ 1]$.

1. Montrer que deux fonctions x et y qui décrivent la même courbe ont la même longueur.

2. Montrer que l est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R}^d)$.

3. On munit $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^d)$ de la "norme $\mathcal{C}^1$"

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{C}^1} = \sup_{0\le t\le 1} |x(t)| + \sup_{0\le t\le 1} |x'(t)|.$$

Montrer que l est continue sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^d)$ et qu'alors

$$l(x) = \int_0^1 |x'(t)|\, dt.$$

3.1.4 Uniforme continuité

Définition 3.6 *Une application $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ est dite uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \quad t.q. \quad \forall x,\ y, \quad d_1(x,y) < \eta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

En d'autres termes, le choix de η ne dépend pas du point de continuité (y ici). Par exemple, dans $\mathbb{R}$, les fonctions

$$x \mapsto \sin(x), \quad x \mapsto |x|^\alpha\ (0 < \alpha \le 1), \quad x \mapsto \frac{x^2}{1+|x|},$$

sont uniformément continues (car hölderiennes). Par contre

$$x \mapsto |x|^\alpha\ (\alpha > 1), \quad x \mapsto x\ \sin(x), \quad x \mapsto e^x,$$

ne sont pas uniformément continues.

Définition 3.7 *Soit $\alpha > 0$, une application $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ est dite hölderienne d'ordre α si il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$d_2(f(x), f(y)) \le k\big(d_1(x,y)\big)^\alpha.$$

De telles applications sont uniformément continues. Pour $\alpha = 1$, une telle application est dite lipschitzienne (on dit aussi k-lipschitzienne).

Propriété 3.2 *Pour une famille quelconque d'applications k-lipschitziennes bornées à valeurs réelles $(f_i)_{i\in I}$, les fonctions*

$$f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x), \qquad g(x) = \inf_{i\in I} f_i(x),$$

sont k-lipschitziennes.

Preuve. Pour $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, on peut trouver i_0 tel que

$$f_{i_0}(x) \geq f(x) - \varepsilon.$$

On a alors

$$f(x) - f(y) \leq f_{i_0}(x) + \varepsilon - f_{i_0}(y) \leq kd(x,y) + \varepsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$f(x) - f(y) \leq kd(x,y).$$

En intervertissant les variables, on trouve bien que

$$|f(x) - f(y)| \leq kd(x,y).$$

□

Définition-Théorème 3.1 *Soit une application uniformément continue $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$, le module de continuité de f est*

$$\omega(f;h) = \sup_{d_1(x,y)<h} d_2(f(x), f(y)).$$

Cette fonction $\omega(f;\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifie
(i) $\omega(f;\cdot)$ est continue en 0 en posant $\omega(f;0) = 0$,
(ii) $\omega(f;\cdot)$ est croissante,
(iii) $h \mapsto \omega(f;h)$ est s.c.i.
et lorsque E_1 est un espace vectoriel normé :
(iv) $\omega(f;\cdot)$ est sous-additive, i.e., $\omega(f;h+k) \leq \omega(f;h) + \omega(f;k)$,
(v) $h \to \omega(f;h)$ est continue et $\omega(f;h) = \sup_{\|x-y\| \leq h} d_2(f(x), f(y))$.

Récriproquement, si $\omega(f;h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ alors l'application f est uniformément continue.

Preuve. Les points (i) et (ii) sont évidents, de même que la réciproque de (i).

Pour le point (iii), soit $h_0 > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, deux points x_ε et y_ε tels que $d_1(x_\varepsilon, y_\varepsilon) := h_\varepsilon < h_0$ et

$$\omega(f;h_0) < d_2(f(x_\varepsilon), f(y_\varepsilon)) + \varepsilon.$$

Alors par monotonie de $\omega(f;\cdot)$, on obtient, pour $h \geq h_\varepsilon$

$$\omega(f;h) \geq d_2(f(x_\varepsilon), f(y_\varepsilon)) > \omega(f;h_0) - \varepsilon.$$

Ceci prouve que $\omega(f;\cdot)$ est s.c.i.

Pour démontrer (iv), il faut voir que pour chaque paire (x,y) telle que $\|x-y\| < h+k$, on peut trouver un $z \in E$ tel que $\|x-z\| < h$, $\|z-y\| < k$. Ceci est possible en choisissant $z = x + \frac{h}{h+k}(y-x)$. On laisse (v) en exercice. □

On rencontrera à nouveau les applications uniformément continues pour plusieurs résultats fondamentaux : (i) leur prolongement pour les espaces complets dans la Section 4.3, (ii) un théorème d'uniforme continuité pour les compacts dans le Théorème 5.9, (iii) la théorie de l'approximation, (iv) les théorèmes d'Ascoli.

Exercice Montrer qu'un application uniformément continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ vérifie

$$|(x) - u(0)| \leq C|x|, \qquad \text{pour } \ |x| >> 1.$$

Exercice Trouver des exemples où $h \mapsto \omega(f; h)$ n'est pas continue en dehors de 0, semi-continue inférieurement, semi-continue supérieurement.

Exercice Montrer que les propriétés (iv) et (v) du Théorème 3.1 sont aussi vraies pour les espaces de Fréchet.

3.1.5 Exemple: la distance au bord

Dans un espace métrique (E, d), pour tout sous-ensemble $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, la fonction $d(x, A) : E \to \mathbb{R}^+$ est définie par :

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Proposition 3.1 *La distance au bord est continue et lipschitzienne. De plus $d(x, A) = d(x, \bar{A})$ et $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$.*

Preuve. On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 3.1 $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Ce lemme conclut bien la démonstration du premier point puisqu'alors pour tout $y \in E$ et $\varepsilon > 0$, pour $\eta = \varepsilon$ on a bien que $d(x, y) < \eta$ implique $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \varepsilon$.

Pour démontrer le lemme, pour tout $\varepsilon > 0$ on choisit un point $a_\varepsilon \in A$ tel que $d(x, a_\varepsilon) \leq d(x, A) + \varepsilon$. Alors, comme $d(x, A) \leq d(x, a_\varepsilon)$, on a

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, a_\varepsilon) + \varepsilon - d(y, a_\varepsilon) \leq d(x, y) + \varepsilon.$$

Passant à la limite $\varepsilon \to 0$ on trouve $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Par symétrie de la relation on a donc montré le lemme.
De plus, puisque $A \subset \bar{A}$ on a $d(x, \bar{A}) \leq d(x, A)$. Pour l'inégalité opposée, soit $\varepsilon > 0$ et $a_\varepsilon \in \bar{A}$ tel que $d(x, a_\varepsilon) \leq d(x, \bar{A}) + \varepsilon$. Grâce au Théorème 2.1, il existe $b_\varepsilon \in A$ tel que $d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \leq \varepsilon$, on en déduit que

$$d(x, A) \leq d(x, b_e) \leq d(x, a_e) + d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \leq d(x, \bar{A}) + 2\varepsilon.$$

Passant à la limite $\varepsilon \to 0$ on en déduit que $d(x, A) = d(x, \bar{A})$.

Enfin, si $x \in \bar{A}$ alors clairement $d(x, \bar{A}) = 0$. Réciproquement si $d(x, A) = 0$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $d(x, a_\varepsilon) \leq \varepsilon$, toujours d'après le Théorème 2.1, ceci signifie que $x \in \bar{A}$. $\square$

Pour $E = \mathbb{R}^d$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, on peut montrer que la fonction $u(x) = d(x, \Omega^C)$ vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} |\nabla u(x)| & = 1 \qquad sur \quad \Omega, \\ \quad u(x) & = 0 \qquad sur \quad \Omega^C. \end{cases}$$

Ceci est assez simple pour les points de dérivabilité de u, sinon il faut le comprendre au sens des solutions de viscosité ([6]).

3.2 Suites convergentes

On considère maintenant des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E.

Définition 3.8 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $l \in E$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, ou qu'elle admet a comme limite, ou qu'elle tend vers a pour $n \to \infty$, si*

$$\forall \omega \text{ ouvert contenant } a, \qquad \exists N(\omega) \in \mathbb{N} \; t.q. \; n \geq N \Rightarrow x_n \in \omega.$$

On peut remplacer "ouvert contenant" par "voisinage de" dans la définition ci-dessus.

Théorème 3.7 *Si $\mathcal{T}_1$ est moins fine que $\mathcal{T}_2$ et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ pour $\mathcal{T}_2$ alors elle converge vers x aussi pour $\mathcal{T}_1$.*

Dans un espace topologique séparé, la limite d'une suite est unique. On utilise alors la notation $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Si $f : (E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$ est continue et si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ pour $\mathcal{T}_1$ alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ pour $\mathcal{T}_2$.

Preuve. En exercice.

Exercice. Montrer que pour $E = \mathbb{N}$ muni de la topologie de Zariski, la suite $x_n = n$ admet plusieurs limites.

Théorème 3.8 *Dans un espace métrique (E, d), une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Définition 3.9 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que le point a est adhérent à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout ouvert ω contenant a il existe une infinité de valeurs de n telles que $x_n \in \omega$.*

Par exemple, la suite réelle $(-1)^n$ admet les deux valeurs d'adhérence 1 et -1 mais ne converge pas. Si une suite converge sa limite est valeur d'adhérence (et la seule dans un espace topologique séparé).

Définition 3.10 *Une sous-suite extraite de la suite (x_n) est une suite $x_{k(n)}$ où $n \to k(n)$ est strictement croissante.*

Lemme 3.2 *Dans un espace métrique (E, d), une suite admet la valeur d'adhérence a si et seulement si il existe une sous-suite extraite qui converge vers a. Ceci est encore vrai si $(E, \mathcal{T})$ admet une base dénombrable de voisinage au point a.*

Cette équivalence est fausse pour les espaces topologiques, mais si il existe une sous-suite extraite qui converge vers a alors a est valeur d'adhérence même sur un espace topologique.

Preuve. On considère alors un point d'adhérence a de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La boule $B(a, 1)$ contient un élément noté $x_{k(1)}$. De même la boule $B(a, 1/2)$ contient un élément noté $x_{k(2)}$ avec $k(2) > k(1)$ (puisqu'il y en a une infinité). Ainsi de suite, pour tout n, la boule $B(a, 1/n)$ contient un élément $x_{k(n)}$ avec $k(n) > k(n-1)$. Cette suite converge vers a puisque $d(a, x_{k(n)}) \leq 1/n$.

Réciproquement, si une sous-suite converge vers a, toute boule centrée sur a (donc tout ouvert contenant a, ou tout voisinage de a) contient bien une infinité de valeurs en appliquant directement la définition de la convergence ($n \geq N$). $\square$

Théorème 3.9 *(Continuité séquentielle) Considérons un espace métrique (E_1, d_1).*
(i) Soit $A \subset E_1$, alors $a \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite (x_n) de A qui converge vers a.
(ii) La partie A est fermée si et seulement si pour toute suite (x_n) de A convergeant vers a on a $a \in A$.
(iii) Une fonction $f : (E_1, d_1) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$ est continue au point $a \in E$ si et seulement si elle est "séquentiellement continue", i.e., $f(x_n) \to f(a)$ pour toute suite $x_n \to a$.
Il suffit que $(E_1, \mathcal{T}_1)$ admette une base dénombrable de voisinage de a.

Remarque 3.1 *Cet énoncé est faux en général pour les espaces topologiques (par contre si il existe une suite (x_n) de A telle que $x_n \to a$ alors $a \in \bar{A}$, même sur un espace topologique). Par exemple, deux topologies différentes sur un ensemble E peuvent avoir les mêmes suites convergentes. C'est le cas de $\mathcal{T}_W$ et $\mathcal{T}_S$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (voir Section 2.6). Par contre, deux distances qui ont les mêmes suites convergentes définissent les mêmes topologies.*

Preuve. Voir le Théorème 2.1 et le Lemme 3.2. □

Exercice (Cône positif)
(i) L'ensemble des fonctions positives ou nulles est fermé dans $\mathcal{C}^0([0,1])$, dans $L^2(\Omega)$.
(ii) L'ensemble des fonctions strictement positives est d'intérieur vide dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, et est ouvert dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$.
(iii) Soit une fonction $N(x) \in \mathcal{C}^0([0,1])$, telle que $N(0) = 0$ et $N(x) > 0$ pour $x > 0$. Soit E l'espace vectoriel normé des fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telles que $\|f\|_E = \sup_{x\in]0,1]} |\frac{f(x)}{N(x)}| < \infty$. L'intérieur du cône positif est-il l'ensemble des fonctions f continues, nulles en 0 et strictement positives pour $x > 0$? (non).

3.3 Théorème de prolongement de Tietze-Urysohn

Théorème 3.10 *Soit (E, d) un espace métrique, $F \subset E$ un fermé et une application $f : F \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Il existe une application continue $g : E \to \mathbb{R}$ telle que*

$$f(x) = g(x)\ \forall x \in F, \qquad \sup_{x\in E} g(x) = \sup_{x\in F} f(x), \qquad \inf_{x\in E} g(x) = \inf_{x\in F} f(x).$$

Corollaire 3.1 *Soit (E, d) un espace métrique, $F \subset E$ un fermé et ω un ouvert tel que $F \subset \omega$. Alors il existe une application $g : E \to [0,1]$ continue telle que*

$$g(x) = 1 \ \textit{pour}\ x \in F, \qquad g(x) = 0 \ \textit{pour}\ x \notin \omega.$$

On peut aussi consulter le Théorème d'Uryshon 5.5 pour une version plus générale de ce résultat.

Preuve. En effet considérons la fonction f définie sur le fermé $F \cup \omega^C$ par $f(x) = 1$ pour $x \in F$ et $f(x) = 0$ pour $x \in \omega^C$. Cette fonction est bien continue grâce à l'hypothèse $F \subset \omega$ (utiliser le critère de continuité séquentielle du Théorème 3.9 par exemple). □

Preuve du Théorème 3.10. Le cas facile est $\inf_{x\in F} f(x) = \sup_{x\in F} f(x) := c$, car alors $g = c$ convient. Dans l'autre cas, on peut toujours supposer $\sup_{x\in F} f(x) > \inf_{x\in F} f(x) > 0$ (par translation et dilatation). On choisit alors

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{pour}\ x \in F, \\ \\ \inf_{y\in F} [f(y)\, \dfrac{d(x,y)}{d(x,F)}], & \textit{pour}\ x \notin F. \end{cases}$$

On vérifie en effet que
(i) pour $x \notin F$, soit y_ε est un point de F tel que $d(x,F) \geq d(x, y_\varepsilon) - \varepsilon$, alors

$$g(x) \leq f(y_\varepsilon)\frac{d(x,y_\varepsilon)}{d(x,F)} \leq f(y_\varepsilon)\ \frac{d(x,y_\varepsilon)}{d(x,y_\varepsilon) - \varepsilon}.$$

Or $d(x, y_\varepsilon)$ reste strictement positive (sinon il existerait une suite extraite telle que $d(x, y_{n(k)}) \to 0$ donc $x \in F$, une contradiction). On en déduit que

$$g(x) \leq \sup_{y \in F} f(y) \; \frac{d(x, y_\varepsilon)}{d(x, y_\varepsilon) - \varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \sup_{y \in F} f(y),$$

donc $g(x) \leq \sup_{y \in F} f(y)$.
(ii) pour $x \notin F$, $g(x) \geq f(y_\varepsilon)\frac{d(x,y_\varepsilon)}{d(x,F)} - \varepsilon$ pour un certain $y_\varepsilon \in F$. Donc

$$g(x) \geq f(y_\varepsilon) - \varepsilon \geq \inf_{y \in F} f(y) - \varepsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout ε, on a bien $g(x) \geq \inf_{y \in F} f(y)$.
(iii) Pour montrer la continuité en un point $x_0 \in F^C$ on utilise simplement que $x \mapsto \frac{1}{d(x,F)}$ est lipschitzienne sur une boule B définie par $d(x, x_0)$ assez petit pour que $d(x, F)$ reste positive. Puis que le produit $f(y)\ \frac{d(x,y)}{d(x,F)}$ est uniformément lipschitzienne (de constante k indépendante de $y \in F$ sur cette boule). Enfin que $x \mapsto \inf_{y \in F}\ [f(y)\ d(x, y)]$ est donc lipschitzienne de constante k donc continue (mais en général l'infimum de fonctions continues n'est que semi-continue supérieurement).
(iv) Pour montrer la continuité en un point $x \in F$, on considère une suite $x_n \to x$ et le cas intéressant est celui où $x_n \notin F$ et par conséquent $x \in Fr(F)$. On pose $0 < \varepsilon_n = d(x_n, F) \to 0$. Soit $y_n \in F$ tel que $d(x_n, F) \geq d(x_n, y_n) - (\varepsilon_n)^2$ alors $d(x_n, y_n) \to 0$ donc $y_n \to x$. On a

$$g(x_n) \leq f(y_n)\frac{d(x_n, y_n)}{d(x_n, F)} \leq f(y_n)\frac{d(x_n, F) + (\varepsilon_n)^2}{d(x_n, F)} = f(y_n)(1 + \varepsilon_n) \to f(x).$$

Par ailleurs, soit $z_n \in F$ tel que $\inf_{y \in F}\ [f(y)\ d(x_n, y)] \geq f(z_n)\ d(x_n, z_n) - (\varepsilon_n)^2$. Comme $d(x_n, F) \leq d(x_n, z_n)$, on a

$$g(x_n) \geq f(z_n)\frac{d(x_n, z_n)}{d(x_n, F)} - \varepsilon_n \geq f(z_n) - \varepsilon_n \to f(x).$$

On en déduit bien que $g(x_n) \to f(x)$. □

3.4 Applications ouvertes, fermées, homéomorphismes

Définition 3.11 *Soient E et F deux espaces topologiques, on dit qu'une application $f : E \to F$ est ouverte (resp. fermée) si l'image par f de tout ouvert (resp. fermé) de E est un ouvert (resp. fermé) de F.*

Attention, ce n'est la même chose que lorsque f est bijective.

Définition 3.12 *Soient E et F deux espaces topologiques, on dit qu'une application $f : E \to F$ est un homéomorphisme si f est une bijection continue dont l'inverse est continu. En d'autres termes f est une bijection ouverte dont l'inverse est ouverte. Deux espaces topologiques sont dits homéomorphes si il existe au moins un homéomorphisme entre les deux.*

Par exemple, sur $\mathbb{R}^2$

$$f : \{x^2 + y^2 \leq 1\} \to \{|X| \leq 1, |Y| \leq 1\}, \quad \text{où} \quad X = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2}}{\max(|x|, |y|)}, \quad Y = \frac{y\sqrt{x^2 + y^2}}{\max(|x|, |y|)},$$

définit un homéomorphisme de la boule fermée sur le carré fermé (prendre les ouverts ne change rien).

Exercice La transformée de Fourier est un homéomorphisme de l'espace de Schwartz dans lui-même (voir le paragraphe 1.5).

La notion d'homéomorphisme est centrale dans de nombreux domaines telle la topologie algébrique (voir [19, 11]). La section 6.4 donnent quelques résultats qui semblent simples mais ne peuvent s'obtenir à ce niveau. Notons aussi que
(i) il existe une application continue surjective de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^2$ (le chemin de Péano, voir la construction dans [24] par exemple) mais $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes pour $n \neq m$,
(ii) la sphère et la boule ne sont pas homéomorphes, voir aussi le théorème de point fixe de Brouwer (énoncé dans le paragraphe 5.6.5),
(iii) si U et V sont deux parties homéomorphes de $\mathbb{R}^n$ (pour leur topologie induite), et si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors V aussi.

3.5 Continuité et constructions de topologies

La continuité permet de construire naturellement des topologies. Donnons quelques exemples.

3.5.1 Topologie induite (2)

Théorème 3.11 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset F$. La topologie induite sur A, $\mathcal{T}_A$, (voir la Section 2.3.7) est la moins fine rendant continue l'identité $Id_A : A \to E$.*

Preuve. La continuité de Id_A signifie que, pour tout ouvert ω de E, la partie

$$Id_A^{-1}(\omega) = \{x \in A;\ x = Id_A(x) \in \omega\} = A \cap \omega$$

est un ouvert de A. La topologie ayant le moins d'ouverts (la moins fine) réalisant ceci consiste bien à choisir $\{A \cap \omega,\ \omega \in \mathcal{T}\}$ c'est-à-dire la topologie induite. $\square$

3.5.2 Topologie la moins fine rendant continue une application

On se donne une application d'un ensemble E dans un espace topologique F,

$$f : E \to (F, \mathcal{T}_F).$$

On cherche une topologie sur E, notée $\mathcal{T}_f$, qui rende continue l'application f. Bien sûr la topologie discrète (fine) répond à la question. On cherche donc une topologie ayant moins d'ouverts. Grâce au Théorème 3.2, une telle topologie doit au moins contenir tous les ensembles $f^{-1}(\omega)$, $\omega \in \mathcal{T}_F$.

Définition-Théorème 3.2 *On définit une topologie sur E par*

$$A \in \mathcal{T}_f \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = f^{-1}(\omega), \quad \textit{avec} \quad \omega \in \mathcal{T}_E.$$

Cette topologie $\mathcal{T}_f$ est la moins fine rendant continue l'application f. On l'appelle topologie initiale associée à f.

Preuve. (i) $E = f^{-1}(F)$ et $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ sont bien des ouverts,
(ii) Une réunion de tels A_i, $i \in I$ vérifie bien la propriété :

$$\cup_{i\in I} f^{-1}(\omega_i) = f^{-1}\Big(\cup_{i\in I}\, \omega_i \Big),$$

est bien l'image réciproque d'un ouvert.
(iii) De même l'intersection de deux ouverts

$$f^{-1}(\omega_1) \cap f^{-1}(\omega_2) = f^{-1}(\omega_1 \cap \omega_2),$$

est bien l'image réciproque d'un ouvert.
(iv) Toute topologie rendant f continue contient bien les $f^{-1}(\omega)$, $\omega \in \mathcal{T}_E$, et contient donc $\mathcal{T}_f$. $\square$

3.5.3 Topologie initiale

Il est un peu plus délicat de construire une topologie sur E rendant continue une famille quelconque d'applications

$$f_i : E \to (F_i, \mathcal{T}_i), \qquad \forall i \in I.$$

Définition-Théorème 3.3 *(Topologie initiale) On définit une topologie sur E par $\omega \in \mathcal{T}_E$ est ouvert si pour tout point $a \in \omega$, il existe une famille finie J d'ouverts $(\omega_i \in \mathcal{T}_i)_{i\in J}$ telle que $a \in \bigcap_{i\in J} f_i^{-1}(\omega_i) \subset \omega$. En d'autres termes, les $f_i^{-1}(\omega_i)$ forment une prébase de $\mathcal{T}_E$.*

Cette topologie $\mathcal{T}_E$ est la moins fine rendant continue les applications f_i, elle est aussi obtenue comme l'ensemble des réunions quelconques d'intersections finies $\bigcap_{i\in J} f_i^{-1}(\omega_i)$, $\omega_i \in \mathcal{T}_i$.

L'exemple d'applications constantes montre qu'une topologie initiale peut ne pas être séparée.

Preuve. (i) E et $\emptyset$ sont bien des ouverts.
(ii) Une réunion de tels ω^α, $\alpha \in X$ vérifie bien la propriété : si $a \in \bigcup_{\alpha\in X} \omega^\alpha$, alors $a \in \omega^{\alpha_0}$ pour un certain ω^{α_0} et donc il existe une intersection finie $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(\omega_i) \subset \omega^{\alpha_0}$, $\omega_i \in \mathcal{T}_i$ contenant a. Celle-ci est bien incluse dans la réunion des ω^α.
(iii) Soit $a \in \omega^1 \cap \omega^2$ alors il existe deux intersections finies contenant a, disons $B^1 = \bigcap_{i\in I_1} f^{-1}(\omega_i^1) \subset \omega^1$ et $B^2 = \bigcap_{i\in I_2} f^{-1}(\omega_i^2) \subset \omega^2$. Alors $B^1 \cap B^2$ est bien une intersection finie contenant a et incluse dans $\omega^1 \cap \omega^2$.
(iv) On vérifie comme d'habitude que cette définition coïncide bien avec la définition d'une topologie comme réunion quelconque d'intersections finies.
(v) Toute topologie rendant les f_i continues contient bien les $f_i^{-1}(\omega_i)$, $\omega_i \in \mathcal{T}_i$, et donc toutes les intersections finies de tels ensembles puis leurs réunions quelconques. C'est donc une topologie plus fine que $\mathcal{T}_f$. $\square$

Cette construction est à la base de la théorie des "topologies faibles" qui seront largement étudiées par la suite (voir [4] par exemple):

Définition 3.13 *Soit $(E, \|\ldots\|)$ un espace de Banach et E' son dual topologique (voir Section 7.2), on appelle topologie faible (ou vague pour les mesures) la topologie initiale sur E rendant continue tous les éléments de E'. On la note popologie $\sigma(E, E')$.*

Définition 3.14 *Soit $(E, \|\ldots\|)$ un espace de Banach et E' son dual topologique, on appelle topologie faible étoile (faible-$\star$) (ou faible pour les mesures) la topologie initiale sur E' rendant continue tous les éléments de E comme applications*

$$x \in E : \quad \begin{aligned} E' &\to \mathbb{R}, \\ f &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

On la note popologie $\sigma(E', E)$.

Ces deux topologies sont moins fines (moins fortes) que les topologies des normes respectives (c'est pourquoi on les appelle souvent topologies fortes).

Certains d'espaces de Banach usuels (L^p pour $1 < p < \infty$) sont dits réflexifs car on peut indentifier par $E'' = E$ et les topologies faible et faible-étoile coincident alors (voir [4]).
En général la toplogie faible-$\star$ est bien plus agréable que la topologie faible à cause d'un théorème de compacité très général conséquence du Théorème de Tychonoff (voir section 5.5).

Lemme 3.3 *Les topologies faible et faible-$\star$ sont toujours séparées.*

Preuve. Ce sont des conséquences du Théorème de Hahn-Banach (voir Section 7.2 et [4]).

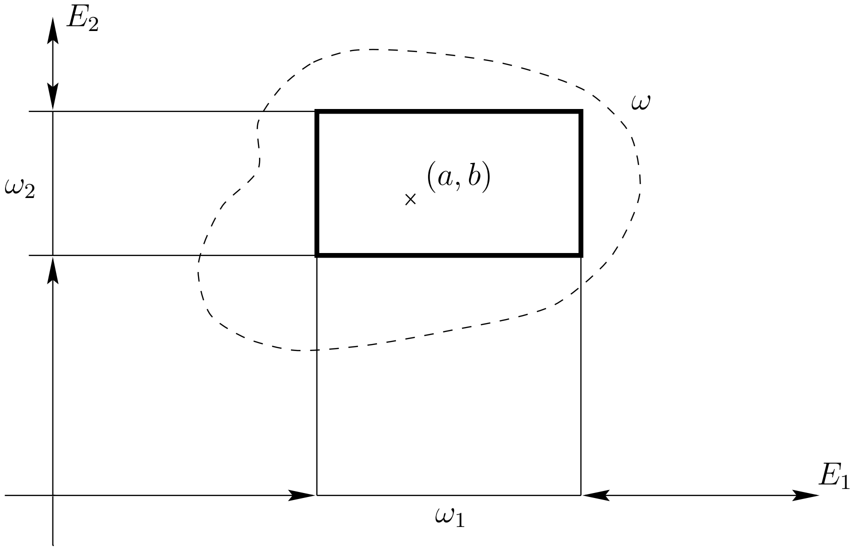

Figure 3.3: Ouverts de la topologie produit.

3.5.4 Topologie produit

Définition-Théorème 3.4 *Soit $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques. On définit une topologie sur $E = E_1 \times E_2$ par $\omega \in \mathcal{T}$ si pour tout point $(a, b) \in \omega$ il existe deux ouverts $\omega_1 \in \mathcal{T}_1$ et $\omega_2 \in \mathcal{T}_2$ tels que $a \in \omega_1$, $b \in \omega_2$ et $\omega_1 \times \omega_2 \subset \omega$.*

Cette topologie est appelée topologie produit sur $E_1 \times E_2$. Les ouverts $\omega_1 \times \omega_2$ sont appelés rectangles ou pavés ouverts. Les ouverts de la topologie produit sont donc des réunions (quelconques) de rectangles ouverts (qui forment donc une base de la topologie produit).

Preuve. Il s'agit d'une application du Théorème 2.4. Les rectangles ouverts sont stables par intersection et forment donc une base d'ouverts (stables par intersection) pour la topologie produit. $\square$

Théorème 3.12 *Soit $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques. La topologie produit est la topologie la moins fine rendant continues les deux projections π_1 et π_2*

$$\begin{cases} \pi_1 : E_1 \times E_2 \to E_1, & \pi_1(x_1, x_2) = x_1, \\ \pi_2 : E_1 \times E_2 \to E_2, & \pi_2(x_1, x_2) = x_2. \end{cases}$$

En outre ces applications sont ouvertes.

En d'autres termes la topologie produit est la topologie initiale associée aux projections.

Preuve. Si ces projections sont continues alors, pour $\omega_1 \in \mathcal{T}_1$ et $\omega_2 \in \mathcal{T}_2$ on doit avoir que $\pi_1^{-1}(\omega_1) = \omega_1 \times E_2$ et $\pi_2^{-1}(\omega_2) = E_1 \times \omega_2$ sont ouverts, donc aussi $\omega_1 \times E_2 \cap E_1 \times \omega_2 = \omega_1 \times \omega_2$. On a donc bien, avec les rectangles ouverts, définie la topologie initiale pour ces deux projections. $\square$

Théorème 3.13 *Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, alors la topologie produit de $E_1 \times E_2$ est métrisable pour la distance*

$$d_{E_1 \times E_2}\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2).$$

Le produit d'espaces vectoriels normés est normés pour la somme des normes.

Preuve. En exercice. On remarquera que $\max\big(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\big)$ définit la même topologie. $\square$

Exercice L'application $(x, y) \to d(x, y)$ est continue pour la topologie produit.

Cette notion d'espace produit peut se généraliser à un produit infini.

Définition-Théorème 3.5 *Soient $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'espaces topologiques. Sur $E = \prod_{i \in I} E_i$ on appelle rectangles ouverts les ensembles de la forme*

$$R = \prod_{i \in J} \omega_i \times \prod_{i \notin J} E_i$$

avec ω_i ouverts de E_i et J partie finie de I. On définit les ouverts de E comme des réunions de rectangles ouverts. Ceci définit bien une topologie sur E appelée topologie produit. Il s'agit de la topologie la moins fine rendant continues les projections π_i

$$\pi_i : E \to E_i, \qquad \pi_i(x) = x_i, \qquad \textit{avec } x = (x_1, x_2, \ldots).$$

Pour $\mathcal{T}_i$ métrisable et I dénombrable (disons $I = \mathbb{N}$), cette topologie est métrisable pour la distance

$$d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \min(1, d_i(x_i, y_i)), \quad \textit{ou} \quad \tilde{d}(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \min(\frac{1}{i+1}, d_i(x_i, y_i)).$$

Preuve. Il s'agit toujours d'une application du Théorème 2.4 avec la base d'ouverts formée des rectangles $\prod_{i \in J\, finie} \omega_i \times \prod_{i \notin J} E_i$. $\square$

On peut démontrer facilement des résultats généraux tels

Théorème 3.14 *Une suite (x_n) de $E = \prod_{i \in I} E_i$ converge si et seulement si chacune des suites projetées $\big(\pi_i(x_n)\big)$ converge.*

Exemple Soit un Banach E et son dual topologique E'. La topologie faible étoile de E' est également la topologie induite sur E' par la topologie produit $\mathbb{R}^E$. Les projections sont simplement les

$$\begin{cases} \pi_x : E' \subset \mathbb{R}^E \to \mathbb{R} \\ \quad f \mapsto f(x) \end{cases}$$

Théorème 3.15 *Soient $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ et $(F, \mathcal{T})$ des espaces topologiques*
(i) Soient des applications $f_i : F \to E_i$. Pour que l'application $f = \prod_{i\in I} f_i$ soit continue de F dans $\prod_{i\in I} E_i$, il faut et il suffit que chaque f_i soit continue,

(ii) La topologie produit sur $\prod_{i\in I} E_i$ est séparée si et seulement si chacune des topologie $\mathcal{T}_i$ est séparée.

On verra plus loin un autre résultat important concernant les topologies produit, le théorème de Tychonoff, Section 5.5.

3.5.5 Groupe topologique

Définition 3.15 *Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ muni d'une action de groupe $(x, y) \to x\times y$ est appelé groupe topologique si les applications $(x, y) \in E \times E \to x \times y \in E$ et $x \mapsto x^{-1}$ sont continues.*

Exemple La demi-droite ouverte $]0, \infty[$ muni de la multiplication des réels est un groupe topologique.

Exemple Les sous-ensembles de l'espace vectoriel normé $M_{d\times d}(\mathbb{R})$, $O(\mathbb{R}^d)$ et $SO(\mathbb{R}^d)$ sont des groupes topologiques pour la multiplication des matrices.

3.5.6 Espace vectoriel topologique

Définition 3.16 *Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel topologique si les applications $(x, y) \in E \times E \to x + y \in E$, $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \to \lambda\, x \in E$ sont continues.*

Théorème 3.16 *Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel topologique pour la topologie associée à sa norme.*

Preuve. Montrons par exemple la continuité de l'addition des vecteurs. Pour cela on considère deux paires (x, y) et $(\tilde{x}, \tilde{y})$. On a $\|x + y - (\tilde{x} + \tilde{y})\| \leq \|x - \tilde{x}\| + \|y - \tilde{y}\|$. L'addition est donc 1-lipschitzienne. De même la multiplication de $\mathbb{K} \times E \to E$ est aussi lipschitzienne sur tout borné (en exercice). $\square$

Théorème 3.17 *Dans un espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$, l'adhérence d'un sous-espace vectoriel F est encore un sous-espace vectoriel.*

Preuve. Soit $x \in \bar{F}$, $y \in \bar{F}$ et posons $z = x + y$. On doit montrer que $z \in \bar{F}$, c'est-à-dire que pour ω ouvert contenant z, on doit montrer que cet ouvert coupe F. Par continuité de l'addition et le Théorème 3.12, il existe deux ouverts $\omega_x \ni x$ et $\omega_y \ni y$ tels que $\omega_x + \omega_y \subset \omega$. Ces ouverts coupent F et il existe donc $x' \in F \cap \omega_x$ et $y' \in F \cap \omega_y$. On a donc trouvé un élément $x' + y' \in F \cap \omega$.

Le même raisonnement s'applique à $\lambda\, x$. □

Exercice (Espaces de Fréchet) Soit E un espace vectoriel et $(p_i(\cdot))_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de semi-normes sur E. On peut définir une distance sur E par :

$$d(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \, \frac{p_i(x - y)}{1 + p_i(x - y)}.$$

On suppose que $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ (on parle alors de famille filtrante). Montrer (E, d) est un espace vectoriel topologique et que la topologie induite est la moins fine rendant continue la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Voir aussi la Section 1.5.

Plus généralement, pour des familles non dénombrables, on définit sur E la topologie la moins fine rendant continue des semi-normes (voir la Section 3.5.3). On vérifie que E est alors un espace vectoriel topologique.

3.5.7 Topologie finale

On peut aussi construire une topologie sur F rendant continue une famille d'applications

$$f_i : (E_i, \mathcal{T}_i) \to F, \qquad i \in I.$$

Définition-Théorème 3.6 *(Topologie finale) On définit une topologie $\mathcal{T}_F$ sur F par $\omega \in \mathcal{T}_F$ est ouvert si $f_i^{-1}(\omega) \in \omega_i$ $\forall i \in I$.*

C'est la topologie la plus fine sur F rendant continue toutes les applications f_i.

Notons que, même pour (E, d) espace métrique, la topologie finale n'est pas toujours séparée comme le montre l'exemple des topologies quotient (voir Section 3.5.8).
Preuve. Ceci découle du simple fait que $\forall i \in I$,

$$f_i^{-1}(\omega_1 \cap \omega_2) = f_i^{-1}(\omega_1) \cap f_i^{-1}(\omega_2), \qquad f_i^{-1}(\bigcup_{j \in J} \omega_j) = f_i^{-1} \bigcup_{j \in J} f_i^{-1}(\omega_j).$$

□

3.5.8 Topologie quotient

On se donne un ensemble E et une relation d'équivalence sur E notée $\mathcal{R}$, i.e., $x\mathcal{R}x$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$, et $x\mathcal{R}y$, $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

On peut alors définir un ensemble quotient $F = E/\mathcal{R}$ (l'ensemble des classes d'équivalences, i.e., des parties de E dont les éléments sont en relation; chaque élément de E appartient donc à un élément de F et un seul noté $\hat{x}$). On peut donc définir une application canonique

$$\begin{aligned} \pi : \quad & E \to F = E/\mathcal{R} \\ & x \mapsto \hat{x} \end{aligned}$$

De plus E est la réunion disjointe des classes $\hat{x}$.

Réciproquement, une façon simple de définir une relation d'équivalence consiste à choisir un recouvrement disjoint $E = \bigcup_{disjointe} A_i$. Les A_i sont alors des classes d'équivalences pour la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe i tel que $x \in A_i$ et $y \in A_i$.

Définition 3.17 *Soit $(E, \mathcal{T}_E)$ un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. On appelle topologie quotient, la topologie la plus fine sur F rendant continue π. En d'autres termes $\omega \subset F = E/\mathcal{R}$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(\omega) \in \mathcal{T}_E$.*

Il s'agit simplement de la topologie finale pour l'application π. On obtient donc assez facilement que

Proposition 3.2 *Une application $f : E/\mathcal{R} \to (G, \mathcal{T}_G)$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : E \to (G, \mathcal{T}_G)$ est continue.*

Même pour une espace topologique E séparé, la topologie quotient de $E/\mathcal{R}$ n'est pas toujours séparée. Par exemple sur $\mathbb{R}$ si on choisit $A =]-\infty, 0]$ et $B =]0, \infty[$ alors les ouverts de $E/\mathcal{R} = \{A, B\}$ sont $\{A, B\}$, $\emptyset$ et $\{B\}$. Mais $\{A\}$ n'est pas un ouvert de $E/\mathcal{R}$ car $A = \pi^{-1}(\{A\})$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

La projection $\pi : E \to F$ n'est pas toujours ouverte. En effet, dans l'exemple ci-dessus, $\pi(]-2, -1[) = \{A\}$ n'est pas un ouvert.

Proposition 3.3 *Si la topologie de $E/\mathcal{R}$ est séparée alors les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ sont des parties fermées de E.*

Preuve. En effet, les points $a \in E/\mathcal{R}$ sont fermés pour une topologie séparée et donc $\pi^{-1}(a)$ sont aussi fermés dans $(E, \mathcal{T}_E)$. $\square$

Définition 3.18 *Soit une partie A de E, le saturé de A par $\mathcal{R}$ est*

$$\mathcal{R}A := \bigcup_{a \in A} \pi(a) = \pi^{-1}\big(\pi(A)\big).$$

Une partie A est dite saturée si $A = \mathcal{R}A$, en d'autres termes si elle contient la classe d'équivalence de chacun de ses points.

On a: A est ouvert (fermé) saturé dans E si et seulement si $\pi(A)$ est ouvert (fermé) de $E/\mathcal{R}$.

Proposition 3.4 *L'espace topologique $F = E/\mathcal{R}$ est séparé si et seulement si pour tous $a, b \in E$, tels que $\hat{a} \neq \hat{b}$ alors il existe deux ouverts saturés disjoints contenant a et b respectivement.*

Preuve. ($\Rightarrow$) Soient deux points a, b de E tels que $\hat{a} \neq \hat{b}$, on peut trouver deux ouverts disjoints de F (supposé séparé) tels que $\hat{a} \in \omega_1$, $\hat{b} \in \omega_2$. Alors $\Omega_1 = \pi^{-1}(\omega_1)$ et $\Omega_2 = \pi^{-1}(\omega_2)$ sont deux ouverts saturés disjoints contenant a et b respectivement.
($\Leftarrow$) Soient deux classes d'équivalence $\hat{a} \neq \hat{b}$ et des ouverts saturés disjoints de E avec $a \in \Omega_1$ et $b \in \Omega_2$. Alors (voir ci-dessus) $\omega_1 = \pi(\Omega_1)$ et $\omega_2 = \pi(\Omega_2)$ sont des ouverts disjoints de F qui séparent donc $\hat{a}$ et $\hat{b}$. □

Soit (E, d) un espace métrique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. L'application

$$\delta(A, B) = \inf_{x \in A,\, y \in B} d(x, y),$$

ne définit pas toujours une distance car les propriétés (i) et (iii) ne sont pas forcément vérifiées.

Exercice Cette construction définit une distance par exemple sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on trouve alors la topologie sur $[0, 1[$ définie par la métrique

$$d(\xi, \eta) = \min(|\xi - \eta|, |\xi - \eta - 1|, |\xi - \eta + 1|), \qquad \xi,\ \eta \in [0, 1[.$$

L'espace topologique $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe à la sphere S^1. Il est obtenu intuitivement en recollant 0 et 1 dans l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice Soit $f : (E, \mathcal{T}_E) \to (G, \mathcal{T}_G)$ une application continue. On dit qu'elle se factorise par $\mathcal{R}$ si pour tout $x \in E$ et $y \in \hat{x}$ on a $f(y) = f(x)$. On définit alors $\hat{f} : F = E/\mathcal{R} \to G$ par $\hat{f}(\hat{x}) = f(x)$.
(i) Montrer que pour $\omega \in \mathcal{T}_G$, $f^{-1}(\omega)$ est une ouvert saturé de F.
(ii) Montrer que $\hat{f}$ est continue.
(iii) Montrer que si f est ouverte alors $\hat{f}$ est ouverte.
(iv) On identifie $\S^1$ à la sphère unité de $\mathbb{C}$. Soit $f : \S^1 \to \S^1$ définie par $f(z) = z^2$. on pose $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$. Montrer que f se factorise par $\mathcal{R}$ et que $\S^1$ est homéomorphe à $\S^1/\mathcal{R}$.

Exercice Le tore $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ (groupe quotient) est homéomorphe à $\displaystyle\bigotimes_{i=1}^{d} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Exercice La ceinture est l'espace $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times [0, 1]$. Le ruban de Möbius est au contraire défini par le recollement après une torsion, d'un bord de $[0, 1] \times [0, 1]$, la relation d'équivalence est alors $(x, y)\mathcal{R}(x, y)$ et $(0, y)\mathcal{R}(1, 1 - y)$. Une coupe longitudinale donne alors une ceinture (de longueur double). Trouver la distance à mettre sur $[0, 1[\times[0, 1]$ pour arriver à cet espace topologique et la relation d'équivalence associée.

Théorème 3.18 *Soit $(E, \|\ldots\|)$ un espace vectoriel normé et $G \neq E$ un sous-espace vectoriel fermé de E. On définit une relation d'équivalence par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in G$. L'espace quotient $F = E/G$ (mini de sa topologie quotient) est alors un espace vectoriel normé pour la "norme quotient"*

$$\|\hat{x}\|_F = \inf_{y \in G} \|x + y\|.$$

Si E est un espace de Banach, E/G est aussi un espace de Banach (voir la Section 4.2).

Ce résultat s'étend aux espaces vectoriels dont la topologie est définie par une famille de semi-normes p_i (voir Section 3.5.6) en utilisant les semi-normes

$$\widehat{p_i}(\hat{x}) = \inf_{y \in G} p_i(x + y).$$

Preuve. L'énoncé concernant les Banach sera démontré plus tard, voir le théorème 4.6.

Montrons d'abord que l'on a bien défini une norme ci-dessus.
(i) Il est évident que $\|\hat{x}\|_F \geq 0$ et $\|\hat{x}\|_F = 0$ signifie qu'il existe une suite $(y_n) \in G^{\mathbb{N}}$ telle que $x + y_n \to 0$. Comme G est fermé, cela implique que $x = -\lim\ y_n \in G$, donc que $x \in G$, donc que $\hat{x} = \hat{0}$.
(ii) Pour la propriété d'homothétie :

$$\|\widehat{\lambda\, x}\|_F = \inf_{y \in G} \|\lambda x + y\| = \inf_{y \in G} \|\lambda x + \lambda y\| = |\lambda| \inf_{y \in G} \|x + y\| = |\lambda|\ \|\hat{x}\|_F.$$

(iii) Enfin, soient $x_1 \in E$, $x_2 \in E$ et, pour $\varepsilon > 0$ donné, soient $y_1 \in G$, $y_2 \in G$ tels que $\|x_1 + y_1\| \leq \|\widehat{x_1}\|_F + \varepsilon$ et $\|x_2 + y_2\| \leq \|\widehat{x_2}\|_F + \varepsilon$. On a alors, $\forall z \in G$

$$\|\widehat{x_1} + \widehat{x_2}\|_F \leq \|x_1 + x_2 + z\| \leq \|x_1 + y_1\| + \|x_2 + y_2\|$$

en choisissant $z = y_1 + y_2$. On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|\widehat{x_1} + \widehat{x_2}\|_F \leq \|\widehat{x_1}\|_F + \|\widehat{x_2}\|_F + 2\varepsilon,$$

et le résultat s'ensuit.

Il reste à voir si la topologie quotient est bien associée à cette norme. Tout d'abord l'application π est continue pour cette norme et même lipschitzienne puisque $\|\hat{x}\|_F \leq \|x\|$. La topologie de la norme est donc moins fine que la topologie quotient. Réciproquement, soit un ouvert ω de la topologie quotient contenant une classe $\hat{a}$. Alors, $\pi^{-1}(\omega)$ est ouvert contenant a et contient donc une boule $B_E(a;r) = \{x \in E \ t.q.\ \|x - a\| < r\}$. Donc ω contient

$$\pi(B_E(a,r)) = \big\{\{y + z;\ y \in G\},\ z \in B(a,r)\big\} = B_F(\hat{a};r),$$

(cette dernière égalité est laissée au lecteur à titre d'exercice). Donc ω est une réunion de boules ouvertes pour la norme quotient, et c'est donc un ouvert pour cette norme. Ceci prouve que les deux topologies sont identiques. $\square$

Nous verrons plus loin la notion d'espace connexe mais on peut dores et déjà noter le résultat suivant

Proposition 3.5 *Tout espace quotient d'un espace connexe est connexe.*

Il s'agit d'une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. Voir le corollaire 6.2.

Exercice Soit un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$ et sur $L^1(\Omega)$ on peut définir la relation d'équivalence $f\mathcal{R}g$ si et seulement si $f(x) = g(x) + Cste$. Ceci correspond à choisir le sous-espace vectoriel $G = \{Cste\}$. La norme quotient est équivalente à la norme

$$\|f\|_{F,1} = \int_\Omega \Big| f(x) - \langle f\rangle \Big| dx, \qquad \langle f\rangle = \int_\Omega f(x)dx,$$

mais pas égale (même à une constante près, prendre des fonctions proches d'une masse de Dirac).

Exercice Par contre sur $L^2(\Omega)$ (voir aussi le Chapitre 8), la norme quotient est bien

$$\|f\|_{F,2} = \int_\Omega \Big| f(x) - \langle f\rangle \Big|^2 dx, \quad \text{où} \quad \langle f\rangle = \int_\Omega f(x)dx,$$

3.6 Théorèmes de Stone et de Weierstrass

Weierstrass a le premier démontré que les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}^0([0,1])$. De son côté Stone a compris les propriétés fondamentales des polynômes qui conduisent à leur densité. Les démonstrations de Stone et Weierstrass ne sont toutefois pas constructives.

Ici, nous allons donner une démonstration simple du Théorème de Weierstrass qui permet aussi de comprendre une question connexe : le taux d'approximation optimal.

3.6.1 Quelques énoncés

Théorème 3.19 *(Weiertrass) L'espace vectoriel des polynômes est dense dans* $\mathcal{C}^0([0,1])$ *pour la topologie de la convergence uniforme.*

Corollaire 3.2 *Les polynômes "trigonométriques"*

$$p_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} a_j \, e^{i\,j\,x},$$

sont denses dans $\mathcal{C}^0_{\mathrm{per}}([-\pi,\pi];\mathbb{C})$*, espace vectoriel des fonctions continues périodiques* $(f(\pi) = f(-\pi))$ *à valeur dans* $\mathbb{C}$.

D'autes résultats plus généraux sont bien connus :

Théorème 3.20 *Pour tout compact (fermé borné)* K *de* $\mathbb{R}^d$ *(voir le Chapitre 5), l'espace vectoriel des polynômes est dense dans* $\mathcal{C}^0(K)$.

Théorème 3.21 *(Stone-Weierstrass) Soit un sous-ensemble* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{C}^0(K;\mathbb{R})$ *(*K *espace compact) tel que*
(i) $\mathcal{B}$ *est une algèbre (stabilité par addition, multiplication, multiplication par un scalaire),*
(ii) $\mathcal{B}$ *contient les constantes,*
(iii) $\mathcal{B}$ *sépare les points (*$\forall x, y \in K$, $x \neq y$ *alors* $f(x) \neq f(y)$ *pour un certain* $f \in \mathcal{B}$*).*
Alors $\mathcal{B}$ *est dense dans* $\mathcal{C}^0(K;\mathbb{R})$.

Il existe une variante où l'hypothèse (ii) est remplacée par

$$\forall x \in K, \quad \exists f \in \mathcal{B} \quad \text{t.q. } f(x) \neq 0.$$

Nous renvoyons à la section 3.6.3 pour la preuve. La méthode de démonstration est plus abstraite et générale que celle prèsentée ci-dessous dans la section 3.6.2, mais ne donne pas d'ordre d'approximation. Elle utilise de façon essentielle la compacité de K et la structure ordonnée des fonctions de K à valeurs réelles.

Le Théorème de Stone-Weierstrass permet d'obtenir systématiquement des résultats intéressants tel le

Corollaire 3.3 *Les fonctions à variables séparées, i.e.,* $\displaystyle\sum_{i\in I,\, fini} f_1^i(x_1)\, f_2^i(x_2)$*, sont denses dans l'ensemble des fonctions continues* $\mathcal{C}^0(K_1 \times K_2;\mathbb{R})$ *(avec* K_i *espaces compacts).*

Cet énoncé ne permet toutefois pas d'obtenir le Théorème de (voir [22]). Il s'agit de savoir si l'espace vectoriel engendré par les fonctions

$$1,\ t^{\lambda_1},\ t^{\lambda_2},\ t^{\lambda_3}, \dots \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1])$. On montre que ceci est le cas si et seulement si $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \infty$.

3.6.2 Ordre d'approximation et théorème de Jackson

Nous démontrons le résultat suivant qui s'inscrit dans un esprit plus orienté vers la "théorie de l'approximation".

Théorème 3.22 *(Jackson) Il existe une constante* C *telle que, pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$*, on ait*

$$E_n(f) := \inf_{p\in\mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\mathcal{C}^0} \leq C\,\omega(f;\frac{1}{n}), \tag{3.2}$$

où $\mathbb{P}_n$ *désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à* n *et* ω *le module de continuité de* f.

On rappelle, voir aussi le Chapitre 5, que toute fonction continue sur un compact (par exemple $[0,1]$) est uniformément continue.

On peut montrer que l'infimum dans (3.2) est atteint (c'est une conséquence simple de la notion de compacité) mais surtout qu'il est atteint de façon unique, on parle donc du "polynôme de meilleure approximation". La construction effective du polynôme de meilleure approximation peut se faire grâce à un algorithme (asymptotique) : l'algorithme de Rémès. Celle-ci suppose connue la fonction f en tout point et construit une suite de polynômes $P^k \in \mathbb{P}_k$ et de points d'interpolation $(x_i^k)_{0\le i\le k\; k\in\mathbb{N}}$ où $f(x_i^k) = P^k(x_i^k)$. Lorsque $k \to \infty$, cette suite P^k converge vers le polynôme de meilleure approximation de f. Voir [7].

Par ailleurs les polynômes de Bernstein permettent de réaliser un algorithme de construction effective de polynômes B_n, de degrés n, réalisant

$$\|f - B_n\|_{\mathcal{C}^0} \le C\,\omega(f; \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Ceux-ci n'utilisent que les valeurs $f(\frac{j}{n})$, $1 \le j \le n$. Voir la section 3.6.4 et [23] pour d'autres résultats.

Rappelons aussi que le polynôme d'interpolation de Lagrange (ici $x_j = \frac{j}{n}$),

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\; l_j^n(x),$$

est le seul polynôme de degré n réalisant $L_n(x_j) = f(x_j)$ pour $j \in \{0,1,2,\dots,n\}$. Ceci est possible pour

$$l_j^n(x) = \frac{\displaystyle\prod_{k\neq j,\,k=0}^{n} (x - x_k)}{\displaystyle\prod_{k\neq j,\,k=0}^{n} (x_j - x_k)}.$$

Cette approximation ne converge pas en général vers $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Voir aussi la Section 7.4.

Preuve du Théorème 3.22. La démonstration se fait en quatre étapes. Nous commençons par réduire le problème à l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Puis nous donnons les propriétés d'une suite de polynômes qui servent par convolution à réaliser l'approximation mais ne donne que la convergence en $\omega(f; \frac{1}{\sqrt{n}})$. Le résultat optimal demande des polynômes plus complexes.
(i) Pour $x \in [-1/2, 1/2]$, nous posons $g(x) = f(x+1/2) - f(0) - (f(1) - f(0))\,(x+1/2)$.

Ceci nous ramène à monter que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^0_0([-1/2, 1/2])$, i.e., telle que $g(-1/2) = g(1/2) = 0$ on a

$$E_n(g) := \inf_{p \in P_n} \|g - p\|_{\mathcal{C}^0} \leq C\ \omega(g; \frac{1}{n}). \tag{3.3}$$

Par la suite g est étendu à tout $\mathbb{R}$ par 0 en dehors de $[-1/2, +1/2]$, et les polynômes P_n sont étendus à tout $\mathbb{R}$ par 0 en dehors de $[-1, +1]$.
(ii) Nous considérons la suite

$$P_n(x) = \alpha_n\ (1 - x^2)^n, \qquad \frac{1}{\alpha_n} = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n\ dx.$$

Celle-ci vérifie

$$P_n \geq 0, \qquad \int_{-1}^{+1} P_n = 1, \qquad \int_{-1}^{+1} |x|\ P_n(x)\ dx \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

En effet, intégrant par partie nous trouvons, puisque $P_n(\pm 1) = 0$,

$$\begin{aligned} 1 = \textstyle\int_{-1}^{+1} P_n(x)\ dx &= -\textstyle\int_{-1}^{+1} P_n'(x)\ x\ dx \\ &= 2n\alpha_n \textstyle\int_{-1}^{+1} x^2\ (1 - x^2)^{n-1}\ dx, \end{aligned}$$

dont on déduit

$$\alpha_n \int_{-1}^{+1} x^2\ (1 - x^2)^n\ dx \leq \alpha_n \int_{-1}^{+1} x^2 (1 - x^2)^{n-1}\ dx = \frac{1}{2n}.$$

Ensuite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\Big(\alpha_n \int_{-1}^{+1} |x|\ (1 - x^2)^n\Big)^2 \leq \alpha_n \int_{-1}^{+1} x^2\ (1 - x^2)^n \quad \alpha_n \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \leq \frac{1}{2n},$$

et le résultat est démontré. Notons en plus, afin de mieux comprendre la structure asymptotique des ces polynômes, que poussant le raisonnement ci-dessus plus loin, on obtient également

$$1 = 2n(-1 + \alpha_n \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^{n-1}\ dx),$$

d'où l'on déduit que $\alpha_n \approx \ln(n)$.

(iii) Rappelant la convention d'extension par 0, on définit le polynôme $g_n \in \mathbb{P}_{2n}$, sur $[-1/2, 1/2]$ comme

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} g(y) P_n(y - x)\ dy \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} g(x - y) P_n(y)\ dy. \end{aligned}$$

On peut donc estimer, puisque $g(x) = g(x) \int_{\mathbb{R}} P_n(y)\, dy$,

$$\begin{aligned}
|g(x) - g_n(x)| &= |\textstyle\int_{\mathbb{R}}[g(x) - g(x-y)]P_n(y)\, dy| \\
&\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}} |g(x) - g(x-y)|P_n(y)\, dy \\
&\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}} \omega(g; |y|)P_n(y)\, dy \\
&= \textstyle\int_{\mathbb{R}} \omega(g; \frac{|y|\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}})P_n(y)\, dy \\
&\leq \omega(g; \tfrac{1}{\sqrt{2n}}) \textstyle\int_{\mathbb{R}}(|y|\sqrt{2n} + 1)\, P_n(y)\, dy,
\end{aligned}$$

en effet d'après la propriété (iii) du Théorème 3.1, on a $\omega(g; 2h) \leq 2\omega(g; h)$, donc $\omega(g; qh) \leq q\omega(g; h)$, $q \in \mathbb{N}$, d'où la majoration ci-dessus en utilisant la monotonie (propriété (ii) du Théorème 3.1) et en insérant la partie entière.

Utilisant (ii) on a donc démontré que

$$E_{2n}(g) := \inf_{p\in\mathbb{P}_{2n}} \|g - p\|_{\mathcal{C}^0} \leq C\, \omega(g; \frac{1}{\sqrt{2n}}). \tag{3.4}$$

Le cas impair d'ensuit immédiatement car $E_{2n+1}(g) \leq E_{2n}(g) \leq C\omega(g; \frac{1}{\sqrt{2n+1}})$ grâce à la monotonie de E en n et à l'argument ci-dessus pour le module de continuité.

(iv) Pour conclure le résultat optimal il suffit de trouver une suite de polynômes P_n pairs et positifs sur $[0, 1)$, de degré n, tels que

$$P_n(1) = 0, \quad \int_{-1}^{+1} P_n = 1, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{|x|}{n}\, |P_n(x)|dx \leq C.$$

Cette construction n'est pas évidente et peut se faire comme suit. On commence par définir $Q_n(\cos(t)) = \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$, $\deg(Q_n) = n$. Ceci se fait par récurrence en montrant également que $\cos(nt) = R_n(\cos(t))$, $\deg(R_n) = n$.

Ensuite, pour $0 \leq x \leq 1$, on pose $P_n(x) = \Big(Q_n(x)\Big)^4$. On montre que ce polynôme donne le résultat attendu. On peut prendre comme modèle simple du calcul associé, celui de la fonction $u_n(x) = \min(n, \frac{1}{t})^4$ pour la mesure $t\, dt$ sur $[0, 1]$. □

Remarque 3.2 *La convolution continue utilise la connaissance de toute la fonction. En terme de théorie de l'approximation, il est par contre plus naturel de supposer ne connaître la fonction f qu'en un certain nombre de point. On peut obtenir le même résultat que ci-dessus en utilisant la construction*

$$g_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\frac{i}{n})\, p_n(x - x_i).$$

Il suffit en effet de vérifier que l'erreur entre l'intégrale et ses sommes de Riemman est aussi en $\omega(g; 1/n)$. Voir pour cela la section 3.6.4.

Remarque 3.3 *Derrière la méthode prèsentée ici, on peut voir un phénomène général. Les polynômes construits convergent (faiblement) vers une masse de Dirac en* 0 *et sont donc des noyaux régularisants pour la convolution.*

Remarque 3.4 *La construction s'étend à des sous-ensembles compacts de* $\mathbb{R}^d$*. Pour cela on commence par utiliser le Théorème de Tietze-Urysohn pour prolonger une fonction de* $\mathcal{C}^0(K)$ *en une fonction continue sur un rectangle, nulle sur sa frontière. Puis on utilise des produits de polynômes* $P_n^{(1)}(x_1)\dots P_n^{(d)}(x_d)$ *pour la construction par convolution.*

3.6.3 Démonstration du théorème de Stone-Weierstrass

La démonstration du Théorème 3.21 se fait en trois étapes. On commence par montrer (en utilisant la structure d'algèbre) que les valeurs absolues de fonctions de $\mathcal{B}$ sont dans son adhérence, puis les max et min. Par compacité, on montre enfin qu'un nombre fini de max et min, en utilisant l'hypothèse de séparation, permet d'approcher toute fonction continue.

(i) Montrons d'abord que

$$\forall f \in \mathcal{B}, \quad |f| \in \overline{\mathcal{B}}.$$

Soit $f \in \mathcal{B}$, f est continue sur K compact donc $\|f\|_{L^\infty} < +\infty$. Quitte à considérer $\frac{f}{\|f\|_{L^\infty}}$, on peut supposer que $\|f\|_{L^\infty} \le 1$. La série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{1/2}{n} t^n = \sqrt{1-t},$$

où $a_n := \binom{1/2}{n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\dots(n-3/2)}{2n!}$ désigne le coefficient binomial, a un rayon de convergence égal à 1 donc converge uniformément sur tout intervalle $[-\lambda, \lambda]$ avec $0 \le \lambda < 1$ vers la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t}$. De plus

$$a_{n+1}/a_n = 1 - \frac{3}{2n} + \varepsilon_n,$$

où ε_n est le terme général d'une série absolument convergente donc

$$\exists \mu > 0 \quad \text{t.q.} \quad a_n \sim \frac{\mu}{n^{3/2}}.$$

Cela nous donne la convergence uniforme sur [-1,1]. On en déduit que

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} (1-f^2)^n}_{\in \mathcal{B}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{f^2} = |f| \quad \text{uniformément sur } K.$$

Grâce aux hypothèses (i) et (ii) du théorème, on conclut que $|f| \in \overline{\mathcal{B}}$.

(ii) On obtient alors que pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{B}$, les fonctions

$$\min(f,g) = \frac{1}{2}(|f+g| - |f-g|) \text{ et } \max(f,g) = \frac{1}{2}(|f+g| + |f-g|)$$

appartiennent aussi à $\overline{\mathcal{B}}$.

(iii) On s'intéresse à $\overline{\overline{\mathcal{B}}} = \overline{\mathcal{B}}$ qui est aussi une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(K;\mathbb{R})$ compte tenu de la continuité de la somme et du produit. Soient $f \in \mathcal{C}^0(K;\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Alors

$$\forall\, a, b \in K, \quad \exists g_{a,b} \in \mathcal{B} \text{ vérifiant } \left\{ \begin{array}{lcl} g_{a,b}(a) & = & f(a), \\ g_{a,b}(b) & = & f(b). \end{array} \right.$$

En effet, utilisant les hypothèses (ii) et (iii) du Théoréme 3.21 :
- si $a = b$, on pose $g_{a,b} =$ fonction constante valant $f(a)$
- si $a \neq b$, il existe $\phi \in \mathcal{B}$ t.q. $\phi(a) \neq \phi(b)$ et on pose

$$g_{a,b}(x) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{\phi(b) - \phi(a)}\right)\phi(x) + \frac{f(a)\phi(b) - f(b)\phi(a)}{\phi(b) - \phi(a)}.$$

Puisque $g_{a,b}(b) = f(b)$ et la fonction $g_{a,b} - f$ est continue, il existe $V_{a,b}$ voisinage de b tel que

$$\forall x \in V_{a,b}, \quad g_{a,b}(x) \geq f(x) - \varepsilon.$$

On fixe le point a et on a :

$$K = \bigcup_{b \in K} V_{a,b},$$

ce qui permet d'extraire un recouvrement fini de K, $V_{a,b_1}, \ldots, V_{a,b_n}$. La fonction $g_a = \min_{1 \leq i \leq n} g_{a,b_i}$ est bien un élément de $\overline{\mathcal{B}}$ et elle vérifie

$$g_a(a) = a \text{ et } \quad \forall x \in K, \quad g_a \geq f - \varepsilon.$$

De même, il existe W_a voisinage de a tel que

$$\forall x \in W_a,\ g_a(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

On a alors un recouvrement fini de K par $W_{a_1}, \ldots, W_{a_n}$. En posant $g = \max_{1 \leq i \leq n} g_{a_i}$, il vient

$$g \in \overline{\mathcal{B}} \quad \text{ et } \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Donc $\overline{\mathcal{B}}$ est bien dense dans $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$, ce qui entraîne que $\mathcal{B}$ est aussi dense dans $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$.
□

Remarque 3.5 *On peut facilement adapter la démonstration dans le cas complexe en remarquant que $|f|^2 = f\overline{f}$ et en supposant, en plus, que $\mathcal{B}$ est stable par conjuguaison.*

3.6.4 Polynômes de Bernstein

Nous donnons ici la démonstration du Théorème de Weierstrass (théorème 3.19) à l'aide des polynômes de Bernstein. Tout comme la démonstration donnée dans la section 3.6.2, elle a l'avantage de donner un algorithme constructif.

(i) Réduction : il existe $a < b \in \mathbb{R}$ tels que $K \subset [a, b]$. On peut supposer $a = 0$ et $b = 1$ (quitte à prendre une translation puis une homothétie qui sont des isométries de $\mathbb{R}$).
(ii) Soient $f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) X^k (1-X)^{n-k}.$$

Soit $\Omega : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $\Omega(P) = XP'$. Alors, avec $P_Y(X) = (X+Y)^n$ on a :

$$\begin{aligned} \Omega^2(P_Y)(X) &= n(n-1)X^2(X+Y)^{n-2} + nX(X+Y)^{n-1} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 X^k (1-X)^{n-k}. \end{aligned}$$

On en déduit les formules :

$$\begin{aligned} B_n(1)(X) &= (X + (1-X))^n = 1, \\ B_n(id)(X) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} = X, \\ B_n(\square^2)(X) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 X^k (1-X)^{n-k} = \frac{1}{n^2}\,\Omega^2(P_{1-X})(X) = X^2 - \frac{X^2}{n} + \frac{X}{n}. \end{aligned}$$

(iii) Soit $\varepsilon > 0$, la fonction f est uniformément continue sur $[0, 1]$ donc il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad |x - \frac{k}{n}| \leq \delta \Longrightarrow |f(\frac{k}{n}) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{|x-\frac{k}{n}|\leq\delta} \binom{n}{k} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| x^k(1-x)^{n-k} \\
&\qquad + \sum_{|x-\frac{k}{n}|>\delta} \binom{n}{k} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_\infty \sum_{|x-\frac{k}{n}|>\delta} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sum_{|x-\frac{k}{n}|>\delta} \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sum_{k=0} \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \, \tfrac{x}{n} \, (1-x).
\end{aligned}$$

Donc il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait :

$$\sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Les polynômes de Bernstein associés à f convergent donc uniformément vers f sur l'intervalle $[0, 1]$. $\square$

On peut aussi donner, pour l'approximation par les polynômes de Bernstein, un taux de convergence en fonction du module de continuité de la fonction f. Celui-ci n'est pas optimal contrairement au cas des polynômes de Jackson.

Chapitre 4

Espaces métriques complets, espaces de Banach

On considère, dans tout ce chapitre, un espace métrique (E, d).

4.1 Suite de Cauchy

Définition 4.1 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que c'est une suite de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad m,\ n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

En particulier toute suite convergente est de Cauchy grâce à l'inégalité triangulaire. Toute suite de Cauchy est bornée.

Pour une suite de Cauchy (x_n) et f continue $\big(f(x_n)\big)$ n'est pas forcément de Cauchy. Choisissons par exemple sur $]0, \infty[$, $x_n = 1/n$ et $f(x) = 1/x$. Par contre on a

Théorème 4.1 *Soit une fonction $f : (E, d) \to (F, \tilde{d})$ uniformément continue. Pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy de F (la réciproque est fausse).*

Remarque 4.1 *La notion de suite de Cauchy peut s'étendre aux espaces vectoriels topologiques en disant que pour tout ouvert $\omega \ni 0$, il existe un $N(\omega)$ tel que pour $n,\ m \geq N(\omega)$ alors $x_n - x_m \in \omega$.*

Exercice Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence a, elle converge vers a.

4.2 Espace métrique complet, espace de Banach

Définition 4.2 *Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente. Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

Définition 4.3 *Un espace Polonais est un espace métrique, séparable et complet.*

Un résultat célèbre de Urysohn en 1928 permet de construire un espace polonais 'universel', tel que tout espace polonais en est un sous-espace fermé à isomorphisme prés.

Remarque 4.2 *L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ des nombres réels est complet, pas l'ensemble $\mathbb{Q}$. Rappelons aussi que les suites de Cauchy permettent de construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. Ce type de construction est général et pour tout espace métrique (E, d) on peut construire un espace métrique "complété" unique avec les propriétés suivante : (i) E est dense dans son complété, (ii) la distance sur E est préservée. Cela se réalise grâce à une structure quotient sur l'ensemble des suites de Cauchy, voir [24] par exemple. Si E est un espace vectoriel normé, son complété est aussi normé pour une certaine norme (qui prèserve celle de E).*

Exercice Un sous-ensemble d'un espace complet est complet si et seulement si il est fermé.

Exercice Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces complets, alors $E_1 \times E_2$ est complet.

Théorème 4.2 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. L'espace vectoriel des fonctions bornées continues $\mathcal{C}_b^0(E; \mathbb{R})$ muni de la norme du sup $\|f\|_{\mathcal{C}_b^0} = \sup_{x \in E} |f(x)|$ est un Banach.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy. Montrons qu'elle converge en trois étapes
(i) (Limite simple) Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $N(\varepsilon)$ tel que pour n, $m \geq \varepsilon$ et tout $x \in E$, on a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon.$$

La suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy sur $\mathbb{R}$ et elle converge vers une limite notée $f(x)$ (pour tout $x \in E$).
(ii) (Limite uniforme) Passant à la limite $m \to \infty$ ci-dessus, on a également pour $n \geq N(\varepsilon)$,

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Rappelant que ce $N(\varepsilon)$ ne dépend pas de x, on en déduit

$$\sup_{x\in E} |f(x) - f_n(x)| = \|f - f_n\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la norme $\mathcal{C}_b^0(E)$.
(iii) (Continuité de la limite) Soit $x_0 \in E$, on a pour tout $x \in E$, et toujours pour $n \geq N(\varepsilon)$,

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x)-f(x)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| \leq |f_n(x)-f_n(x_0)|+2\varepsilon.$$

Ceci prouve la continuité de f au point x_0 puisque pour tout $\varepsilon > 0$ on commence par choisir un $n \geq N(\varepsilon)$ comme ci-dessus. Puis f_n étant continue, il existe un ouvert $\omega \in \mathcal{T}$ tel que $x_0 \in \omega$ et $|f_n(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in \omega$. On en déduit que $|f(x) - f(x_0)| \leq 3\varepsilon$. $\square$

Exercice Soit E un ensemble. L'espace vectoriel des fonctions bornées de E dans $\mathbb{R}$, muni de la norme du sup $\|f\| = \sup_{x\in E} |f(x)|$ est un Banach.

Exercice On se donne un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ et un espace complet (F, d_F). On considère l'espace métrique $\mathcal{C}_b^0(E; F)$ des fonctions continues bornées de E dans F muni de la distance

$$d_{\mathcal{C}_b^0}(f, g) = \sup_{x\in E} d_F(f(x), g(x)).$$

Montrer que cet espace métrique est complet.

Exemple Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. L'espace $\mathcal{C}^0(\bar{\omega})$ muni de la norme $\|f\|_{\mathcal{C}^0} = \|f\|_\infty = \max_{x\in\bar{\omega}} |f(x)|$ est un Banach (voir Chapitre 5). De même pour l'espace $\mathcal{C}_0^0(\bar{\omega})$ des fonctions nulles sur $Fr(\Omega)$.
Exemple L'espace $\mathcal{C}^0([0, 1])$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$ n'est pas complet.

Preuve. En effet, considérons la suite de fonctions continues, pour $n \geq 2$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pour} \quad x \in [0, .5], \\ \\ n(x - .5) & \textit{pour} \quad x \in [.5, .5 + \frac{1}{n}], \\ \\ 1 & \textit{pour} \quad x \in [.5 + \frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Il est facile de voir que cette suite est de Cauchy, converge vers une fonction $f(x)$ discontinue en .5 et qui n'appartient donc pas à $\mathcal{C}^0$. $\square$

Exemple Tous les espaces $L^p(\Omega)$ ou l^p, $1 \leq p \leq \infty$ sont des espaces de Banach. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel métrique complet (voir Section 1.5). L'espace vectoriel topologique $\mathcal{D}(\Omega)$ est complet (voir Remarque 4.1 et Section 2.6).

4.3 Prolongement des applications uniformément continues

Le théorème suivant sert souvent pour construire des objets généraux (par exemple la transformée de Fourier dans L^2) partant d'espaces fonctionnels plus agréables, par exemple l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 4.3 *(Prolongement des applications uniformément continues) Soit (E, d_E) un espace métrique et E_1 un sous-espace dense de E. Soit (F, d_F) un espace métrique complet et enfin $f : E_1 \to F$ une application uniformément continue. Alors f se prolonge de façon unique en une application uniformément continue de E dans F et le module de continuité est inchangé (voir la Section 3.1.4).*

Exemple La continuité n'est pas suffisante. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est continue sur $]0,1]$ mais ne se prolonge pas à $[0,1]$ par continuité.

Preuve. (Unicité) On montre un résultat plus fort, pour f continue il existe un unique prolongement continu possible. En effet, soit f un tel prolongement et soit $x \in E \backslash E_1$, par densité on peut trouver une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de E_1 telle que $x_n \to x$. Alors (voir le Théorème 3.9), par continuité, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ qui ne peut donc prendre qu'une seule valeur.

(Existence) Soit $x \in E \backslash E_1$ et une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de E_1 telle que $x_n \to x$. C'est une suite de Cauchy et par uniforme continuité la suite $\big(f(x_n)\big)$ est de Cauchy (voir le Théorème 3.9). Puisque F est complet, $\big(f(x_n)\big)$ converge vers une limite notée $f(x)$.
Montrons d'abord que cette valeur ne dépend pas du choix de la suite. En effet soit une autre suite $y_n \to x$, alors pour tout ε, pour $n \geq N(\varepsilon)$, on a $d_E(x_n, x) \leq \varepsilon$, $d_E(y_n, x) \leq \varepsilon$ et donc $d_E(x_n, y_n) \leq 2\varepsilon$. Ainsi, par uniforme continuité, pour tout ε' on a $d_F(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon'$ pour n assez grand. Donc les deux suites $f(x_n)$ et $f(y_n)$ ont même limite.
Montrons maintenant la continuité uniforme de f sur E et en fait calculons son module de continuité $\omega_E(f;h)$ sur E. On le suppose d'abord fini. On a

$$\omega(f;h) := \sup_{x,\, y\in E_1,\, d_E(x,y)<h} d_F\big(f(x), f(y)\big) \leq \omega_E(f;h) := \sup_{x,\, y\in E,\, d_E(x,y)<h} d_F\big(f(x), f(y)\big)$$

et par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $x_\varepsilon,\ y_\varepsilon \in E$, tels que

$$\begin{aligned} \omega_E(f;h) &\leq d_F\big(f(x_\varepsilon), f(y_\varepsilon)\big) + \varepsilon \quad \text{avec} \quad d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) < h, \\ &\leq d_F\big(f(x_\varepsilon^n), f(y_\varepsilon^n)\big) + d_F\big(f(x_\varepsilon^n), f(x_\varepsilon)\big) + d_F\big(f(y_\varepsilon^n), f(y_\varepsilon)\big) + \varepsilon, \end{aligned}$$

où $x_\varepsilon^n,\ y_\varepsilon^n \in E_1$ et $x_\varepsilon^n \to x_\varepsilon$, $y_\varepsilon^n \to y_\varepsilon$. On a donc, $d(x_\varepsilon^n, y_\varepsilon^n) \to d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) < h$ et par conséquent $d(x_\varepsilon^n, y_\varepsilon^n) < h$ pour n assez grand. Ainsi on obtient

$$\omega(f;h) \leq \omega_E(f;h) \leq \omega(f;h) + d_F\big(f(x_\varepsilon^n), f(x_\varepsilon)\big) + d_F\big(f(y_\varepsilon^n), f(y_\varepsilon)\big) + \varepsilon,$$

et, par construction de f, pour n tendant vers l'infini on obtient

$$\omega(f;h) \leq \omega_E(f;h) \leq \omega(f;h) + \varepsilon,$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Passant à la limite on obtient bien l'égalité $\omega(f;h) = \omega_E(f;h)$.

□

4.4 Théorème de point fixe de Banach, méthode itérative de Picard

Théorème 4.4 *(Point fixe de Banach) Soit un espace métrique complet (E,d) et une application $f : E \to E$. On suppose cette application strictement contractante, i.e.,*

$$\exists k \in [0,1[\quad t.q. \quad d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y), \qquad \forall x,\ y \in E.$$

Alors f admet un point fixe unique ($f(\bar{x}) = \bar{x}$).

Corollaire 4.1 *(Point fixe de Banach) Soit F un sous-ensemble fermé d'un espace métrique complet (E, d) et une application $f : F \to F$ strictement contractante, alors f admet un point fixe unique ($f(\bar{x}) = \bar{x}$) dans F.*

En effet (F, d) est un espace métrique complet donc le Théorème 4.4 s'applique.

Preuve du Théorème 4.4. (Méthode itérative de Picard) Soit $x_0 \in F$, on considère la suite $x_{n+1} = f(x_n)$. Nous allons montrer que cette suite converge vers le point fixe $\bar{x}$ quel que soit x_0.

Pour cela, on calcule

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k\ d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq k^n\ d(x_1, x_0),$$

et on en déduit que

$$d(x_p, x_0) \leq d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \ldots + d(x_1, x_0) \leq d(x_1, x_0)(k^{p-1} + \ldots + k + 1) \leq \frac{d(x_1, x_0)}{1-k}.$$

Finalement, on obtient que $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy puisque, suivant le même raisonnement

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq k^n\ d(x_p, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0),$$

qui peut être rendu aussi petit que voulu pour n assez grand.

Puisque l'espace E est complet, cette suite est convergente, $x_n \to \bar{x} \in E$. Enfin, passant à la limite par continuité dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, on trouve $\bar{x} = f(\bar{x})$ et l'existence est démontrée.

Pour l'unicité, on considère deux points fixes $\bar{x}$ et x', alors

$$d(\bar{x}, x') = d(f(\bar{x}), f(x')) \leq k\ d(\bar{x}, x'),$$

comme, $0 \leq k < 1$, ceci n'est possible que pour $d(\bar{x}, x') = 0$. $\square$

Remarque 4.3 *La démonstration montre en fait qu'il suffit que l'une des itérées $f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (p fois) soit une contraction.*

Corollaire 4.2 *Soit $(E, \| \ldots \|)$ un espace de Banach et $f : (E, \| \ldots \|) \to (E, \| \ldots \|)$ k-lipschitzienne, i.e.,*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\ \|x - y\|, \qquad \forall x,\ y \in E,$$

et $|\lambda| > k$. Alors pour tout $a \in E$ il existe une unique solution $J(a) \in E$ au problème

$$f(x) + \lambda x = a,$$

et $a \mapsto J(a)$ est $(|\lambda| - k)$-lipschitzienne.

Preuve. Le problème s'écrit aussi $x = \frac{a-f(x)}{\lambda} := g(x)$. Or l'application g est contractante au sens strict pour $0 < \frac{K}{\lambda} < 1$ car

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \|\frac{f(x) - f(y)}{\lambda}\| \leq \frac{K}{|\lambda|} \|x - y\|.$$

Et il y a donc un unique point fixe.

Montrons que J est lipschitzienne. On a, par soustraction

$$\lambda \,[J(a) - J(b)] = a - b - f(J(a)) + f(J(b)),$$

donc

$$\begin{aligned} |\lambda| \, \|J(a) - J(b)\| &= \|a - b - f(J(a)) + f(J(b))\| \\ &\leq \|a - b\| + \|f(J(a)) - f(J(b))\| \\ &\leq \|a - b\| + K \, \|J(a) - J(b)\|. \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\|J(a) - J(b)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - K} \|a - b\|,$$

ce qui prouve que J est lipschitzienne. $\square$

Exercice (Opérateurs intégraux dans L^1). Considérons l'espace de Banach $L^1(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $k \in L^1(\Omega \times \Omega; \mathbb{R})$, tel que

$$\|k\|_{L^\infty(L^1)} := \sup_{y \in \Omega} \int_\Omega |k(y, x)| \, dx \quad \textit{est finie},$$

(i) Montrer que ceci définit bien une norme sur un sous-espace de Banach de $L^1(\Omega \times \Omega; \mathbb{R})$ noté $L^\infty(L^1)$.

Pour $u \in L^1(\Omega)$, on définit l'opérateur (application linéaire sur un espace fonctionnel) $A(u) \in L^1(\Omega)$ par

$$A(u)(x) = \int_\Omega k(y, x) \, u(y) \, dy.$$

(ii) Montrer que A est continu et lipschitzien de L^1 dans lui-même.

(iii) Pour λ assez grand montrer que l'on peut résoudre l'équation $A(u) + \lambda u = f \in L^1$.

Ce type de méthode s'applique en particulier aux opérateurs de convolution

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} k(x - y) u(y) dy$$

qui jouent un rôle important en analyse et dans ses applications.

4.5 Équations d'évolution

Le théorème de point fixe de Banach est aussi un moyen de résoudre de nombreux problèmes d'évolution, le Théorème de Cauchy-Lipschitz (voir le Chapitre 9) en est un exemple. Nous décrivons ici le principe abstrait.

Considérons un Banach E et une application $A : E \to E$. On désire résoudre le problème de Cauchy (c'est-à-dire avec une donnée initiale $u^0 \in E$),

$$\frac{du(t)}{dt} = A(u), \qquad u(t=0) = u^0. \tag{4.1}$$

Théorème 4.5 *On suppose A lipschitzienne alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; E)$ à l'équation (4.1).*

La définition de la régularite $\mathcal{C}^1$ dans un espace de Banach sera donnée dans un Chapitre ultérieur. Indiquons toutefois le principe de la démonstration.
Preuve. Plutôt que (4.1), on résoud

$$u(t) = u^0 + \int_0^t A\big(u(s)\big)ds.$$

Pour cela on appelle K_A la constante de Lipschitz de A et on fixe $T^* = \frac{1}{2K_A}$. On considère l'espace de Banach $X = \mathcal{C}^0\big(-T^*, T^*; E\big)$. Soit $\Phi : X \to X$, l'application définie par

$$\Phi(v)(t) = u^0 + \int_0^t A\big(v(s)\big)ds.$$

Cette application est bienune contraction car (disons pour $t \geq 0$ afin d'éviter toute ambiguité sur la notion d'intégral)

$$\begin{aligned}\|\Phi(v)(t) - \Phi(w)(t)\|_E &= \| \textstyle\int_0^t [A\big(v(s)\big) - [A\big(w(s)\big)]ds\|_E \leq \int_0^t \|A\big(v(s)\big) - [A\big(w(s)\big)\|_E ds \\ &\leq K_A \textstyle\int_0^t \|v(s) - w(s)\|_E ds \leq K_A T^* \|v - w\|_X.\end{aligned}$$

Elle admet donc un point fixe. Le théorème de point fixe de Banach fournit un point fixe, donc une solution au problème sous sa forme intégrale sur $[-T^*, T^*]$.

Il ne reste qu'à itérer l'argument à partir de $u(T^*)$ sur l'intervalle $[T^*, 2T^*]$, et de $u(-T^*)$ sur l'intervalle $[-2T^*, -T^*]$, et ainsi de suite pour conclure. $\square$

Exemple On peut donc résoudre l'équation intégrale associée à l'exemple du paragraphe 4.4 (scattering, fragmentation)

$$\frac{d}{dt}u(t,x) + k_T(x)u(t,x) = \int k(y,x)u(t,y)dy.$$

Pour cela on choisit par exemple $E = L^1(\Omega)$ et

$$A(u) = \int k(y,x)u(t,y)dy - k_T(x)u(t,x).$$

En fait on peut aller plus loin et résoudre, grâce au théorème de point fixe de Banach, des équations d'évolution telles que l'équation de *division cellulaire* intervenant en biologie

$$\tfrac{\partial}{\partial t}n(t,x) + \tfrac{\partial}{\partial x}n(t,x) + B(x)n(t,x) = \textstyle\int b(y,x)n(t,y)dy.$$

Le terme $\frac{\partial}{\partial x}n(t,x)$ décrit la croissance des cellules et le terme en B et b la division de cellules de taille y en deux cellules de taille x et $y-x$ ($b(y,x)$ est nul pour $y \leq x$). Il s'agit alors d'un exemple d'équation de transport, traitées dans la Section 9.7, voir [20] pour une introduction à quelques problèmes issus de la biologie.

4.6 Convergence normale des séries et topologie quotient dans un Banach

On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace de Banach $(E, \|\ldots\|)$. On s'intéresse à la convergence de la série dont les sommes partielles sont définies par

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \in E.$$

On dit que la série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge vers sa somme S si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S.

Définition-Théorème 4.1 *Supposons que, dans un espace de Banach, la série* $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|$ *converge. Alors la série* $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *converge et* $\displaystyle\|\sum_{i=1}^{\infty} x_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$.

Une telle série est dite normalement (ou absolument) convergente. Pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *la série* $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge également et* $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(i)}$.

Réciproquement, dans un espace vectoriel normé $(E, \|\ldots\|)$, *si*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty \Longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i \quad \textit{converge},$$

alors E *est un Banach.*

Preuve. On a

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}\| \leq \|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + \ldots + \|x_{n+p}\|. \qquad (4.2)$$

Comme la série des normes converge, la suite $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ converge, elle est donc de Cauchy.

Posant $\bar{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$, on a donc

$$\forall \varepsilon,\ \exists N(\varepsilon) \quad t.q.\ n \geq N,\ p > 0 \Rightarrow \bar{S}_{n+p} - \bar{S}_n \leq \varepsilon.$$

En d'autres termes on a $\|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + \ldots + \|x_{n+p}\| \leq \varepsilon$. On déduit alors de (4.2) que S_n est aussi une suite Cauchy et converge donc.
La partie concernant les permutations est laissée en exercice, ainsi que la réciproque dont la démonstration suit toutefois celle qui est donnée ci-dessous pour les espaces quotients.

□

Ce théorème permet de démontrer divers résultats : voir le Théorème 7.10 par exemple et le

Théorème 4.6 *Soit $(E, \| \ldots \|)$ un espace de Banach et G un sous-espace vectoriel fermé de E. L'espace vectoriel quotient $F = E/G$ (voir Section 3.5.8) est un Banach pour la norme quotient*

$$\|\hat{x}\|_F = \inf_{y \in G} \|x + y\|.$$

Preuve. Considérons une suite de Cauchy de E/G, $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ceci signifie que pour n, p assez grands on a

$$\|\hat{x}_n - \hat{x}_p\|_F \leq \varepsilon, \qquad \forall y \in G.$$

Choisissant $\varepsilon = 2^{-(k+1)}$, on peut trouver pour tout $k \in \mathbb{N}$, un $N(k)$ tel que

$$\inf_{y \in G} \|x_n - x_p + y\| \leq 2^{-(k+1)}, \qquad \forall n,\ p \geq N(k).$$

On définit alors $y_{N(1)} = 0$ et par récurrence, $y_{N(k+1)}$ tel que (car on peut atteindre l'infimum à $2^{-(k+1)}$ près)

$$\|x_{N(k+1)} - y_{N(k+1)} - (x_{N(k)} - y_{N(k)})\| \leq 2^{-k}.$$

Alors la série de terme général $z_k = x_{N(k+1)} - y_{N(k+1)} - (x_{N(k)} - y_{N(k)})$ converge donc normalement et on en déduit que la suite $\left(x_{N(k)} - y_{N(k)}\right)$ converge donc vers un élément $a \in E$, i.e.,

$$\|\widehat{x_{N(k)}} - \widehat{a}\|_F \leq \|x_{N(k)} - y_{N(k)} - a\| \to 0 \qquad \text{lorsque } k \to \infty.$$

Ceci signifie bien que la suite $\hat{x}_k$ admet la valeur d'adhérence $\widehat{a}$, et elle converge donc dans F vers $\widehat{a}$. □

4.7 Théorie de Baire

On rappelle qu'une intersection infinie d'ouverts n'est pas toujours ouverte.

Théorème 4.7 *(Baire) Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses, alors*

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \omega_n \quad \textit{est un sous-ensemble dense de } E.$$

(Une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense). On parle de $G - \delta$ dense.

Corollaire 4.3 *Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieurs vides, alors*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \quad \textit{est d'intérieur vide.}$$

(Une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide).

Corollaire 4.4 *Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés, si $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur non vide alors il existe un F_{n_0} tel que $Int(F_{n_0}) \neq \emptyset$.*

Définition 4.4 *Soit A un sous-ensemble de E*
(i) A est dit "nulle-part dense" si $Int(\bar{A}) = \emptyset$.
(ii) A est dit "maigre" au sens de Baire, ou "B-négligeable", ou de "première catégorie" ("first category" en anglais) si A est contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides, c'est-à-dire si A^C contient un $G - \delta$ dense. Ce sont aussi les réunions dénombrables d'ensembles nulle-part denses. Ils sont d'intérieurs vides. Mais cette notion a beaucoup moins d'intérêt que le presque partout de la théorie de la mesure.
(iii) Les ensembles de "seconde catégorie" sont les autres (terminologie de Baire).
(iv) Une propriété est dite vraie "B-presque partout" si elle est vraie sur un $G - \delta$ dense, i.e. en dehors d'un ensemble B-négligeable.

De nombreux résultats spectaculaires tournent autour de la théorie de Baire, voir [18], mais le théorème de l'application ouverte (voir Section 7.5) et le théorème de Banach-Steinhaus (voir la Section 7.4) sont de loin les plus utiles.

Preuve. On ne démontre que le théorème, le corollaire étant une transposition du résultat. On doit donc montrer que, pour toute boule ouverte $B(x_0, r_0)$, on a $B(x_0, r_0) \cap G \neq \emptyset$.
Puisque ω_1 est dense, il coupe $B(x_0, r_0)$, et puisque ω_1 est ouvert, il existe une boule telle que

$$\begin{array}{l} \overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap \omega_1, \\ 0 < r_1 < r_0/2. \end{array}$$

On peut recommencer cette opération et construire par récurrence une suite $(x_n \in E, r_n > 0)$ telle que

$$\begin{aligned}&\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap \omega_{n+1},\\&0 < r_{n+1} < r_n/2.\end{aligned}$$

On en déduit que $r_n \to 0$ et la suite x_n est donc de Cauchy, elle converge donc vers une limite $x \in E$. Ce point x appartient à toutes les boules fermées $\overline{B}(x_n, r_n)$ (car $x_{n+p} \in \overline{B}(x_n, r_n)$ et la limite aussi), en particulier $x \in \omega_n$ pour tout n. Donc $x \in B(x_0, r_0) \cap G$ et le résultat est démontré. $\square$

Voici une application surprenante de la théorie de Baire

Théorème 4.8 *Soit (E, d) un espace métrique complet et des fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$, continues de $E \to (F, d_F)$. On suppose que $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in E$, alors f est continue B-presque-partout (en tout point d'un $G-\delta$ dense).*

Corollaire 4.5 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dérivable en tout point, alors f' est continue B-presque-partout.*

Preuve du Corollaire. Par définition de la dérivée, on a

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n},$$

et on peut donc apliquer le théorème à la suite $\frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$. $\square$

Preuve du théorème. La preuve se fait en trois étapes qui permettent de construire l'ensemble B-négligeable explicitement.
On considère les fermés

$$\begin{aligned}F_{n,p,q} &= \{x \quad t.q. \quad d_F(f_p(x), f_q(x)) \le 1/n\},\\F_{n,p} &= \bigcap_{q\ge p} F_{n,p,q}.\end{aligned}$$

(i) On montre d'abord que

$$F_n := \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_{n,p} = E.$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par convergence simple de f_p,

$$\forall x \in E, \quad \exists p(x,n) \quad d_F(f_q(x), f(x)) \le 1/(2n), \quad \forall q \ge p(x,n),$$

et on en déduit que

$$\forall x \in E, \quad \exists p(x,n) \quad d_F(f_p(x), f_q(x)) \le 1/n, \quad \forall q \ge p(x,n),$$

donc x appartient bien à l'un des $F_{n,p}$ pour un certain p.
(ii) Définissons alors les ouverts

$$G_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} Int\Big(F_{n,p}\Big),$$

et montrons que G_n est dense. En effet, pour toute boule $\overline{B}$, il existe p tel que $F_{n,p} \cap \overline{B}$ est d'intérieur non vide, d'après le Corollaire 4.4 en utilisant que

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_{n,p} \cap \overline{B} = \overline{B}.$$

Donc l'un des $Int(F_{n,p})$ coupe $\overline{B}$.

Par conséquence, le théorème de Baire montre que

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \quad \text{est un } G-\delta \text{ dense.}$$

(iii) Montrons maintenant que f est continue sur G. Soit $a \in G$, donc $a \in G_n$ pour tout $n \geq 1$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists p \quad t.q. \quad a \in Int(F_{n,p}).$$

Par ailleurs, pour tout $x \in Int(F_{n,p})$ on sait que

$$d_F(f_p(x), f(x)) = \lim_{q\to\infty} d_F(f_p(x), f_q(x)) \leq 1/n,$$

donc

$$\begin{aligned} d_F(f(x), f(a)) &\leq d_F(f_p(a), f(a)) + d_F(f_p(a), f_p(x)) + d_F(f_p(x), f(x)) \\ &\leq \tfrac{2}{n} + d_F(f_p(a), f_p(x)) \\ &\leq \tfrac{3}{n}, \end{aligned}$$

en choisisssant x assez proche de a, car f_p est continue, disons $d(a,x) \leq \eta(n)$. Mais comme $a \in Int(F_{n,p})$ qui est ouvert, on peut aussi supposer cette boule incluse dans $Int(F_{n,p})$. Comme ceci est vrai pour tout n on a bien montré la continuité de f au point a. □

4.8 Problème

Soit (E,d) un espace métrique complet et $f : E \to \mathbb{R}$ une application semi-continue inférieurement et bornée inférieurement. Pour $\varepsilon > 0$, soit $x \in E$ tel que

$$f(x) \leq \inf_E f + \varepsilon. \tag{4.3}$$

PARTIE A (Théorème d'Ekeland)

Dans cette partie on montre qu'il existe un point $y \in E$ tel que

$$f(y) \leq f(x), \quad d(x,y) \leq 1, \quad \forall z \neq y,\ f(z) > f(y) - \varepsilon d(y,z). \tag{4.4}$$

Les parties B et C peuvent être traitées en admettant ce résultat.

1. Partant de $x_0 = x$, on va construire une suite par récurrence.
-) si $\forall z \neq x_n,\ f(z) > f(x_n) - \varepsilon d(x_n, z)$ alors $x_{n+1} = x_n$,
-) sinon, on pose $S_n = \{z \in E\ t.q.\ f(z) \leq f(x_n) - \varepsilon d(x_n, z)\}$. Montrer que l'on peut choisir $x_{n+1} \in S_n$ tel que

$$f(x_{n+1}) - \inf_{S_n} f \leq \frac{1}{2}[f(x_n) - \inf_{S_n} f].$$

2. Montrer que la suite $f(x_n)$ est décroissante et converge vers un réel noté r.

3. À partir de l'inégalité

$$\varepsilon d(x_n, x_{n+1}) \leq f(x_n) - f(x_{n+1}),$$

montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

4. Soit y la limite de la suite x_n, montrer qu'elle satisfait $f(y) \leq f(x)$.

5. De l'inégalité de la question 3. déduire que $d(x,y) \leq 1$.

6. Soit $z \neq y$, tel que $f(z) \leq f(y) - \varepsilon d(y,z)$.
a) Montrer que pour tout n

$$f(z) \leq f(x_n) - \varepsilon d(x_n, z),$$

b) en déduire que $2f(x_{n+1}) - f(x_n) \leq f(z)$,
c) conclure la démonstration de (4.4).

PARTIE B (Théorème du point fixe de Caristi)

7. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée inférieurement. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in E$ tel que

$$f(y) \leq \inf_E f + \varepsilon, \quad et \quad \forall z \in E,\ f(z) \geq f(y) - \varepsilon d(y,z).$$

8. Soit une application $\phi : E \to E$ (pas forcément continue) vérifiant

$$\forall x \in E, \quad d(x, \phi(x)) \leq f(x) - f(\phi(x))$$

avec $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement et bornée inférieurement donnée. Démontrer que ϕ admet un point fixe.

PARTIE C (différentiabilité)

9. Soit E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R}$ une application différentiable et bornée inférieurement. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un point y où $\|Df(y)\| \leq \varepsilon$.

Hint : S_n est une famille décroissante, dans 5. remarquer que $\varepsilon d(x_n, x_p) \leq f(x_n) - f(x_p)$ pour $p > n$ et passer à la limite, $A_n = f(x_n) - \varepsilon d(x_n, z)$ dans 6. est décroissante.

Chapitre 5

Espaces compacts

On se donne un espace topologique $(E, \mathcal{T})$

5.1 Définition et premières propriétés

Définition 5.1 *(Heine, Borel, Lebesgue) Soit $K \subset E$, on dit que K est compact s'il est séparé et pour tout recouvrement de K par des ouverts $(\omega_i)_{i \in I}$, $K \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$, on peut extraire un recouvrement fini : $K \subset \bigcup_{i \in J,\, fini} \omega_i$.*

Les auteurs anglosaxons n'utilisent pas toujours la 'séparation' dans cette définition... attention. En français on parle alors d'espaces quasi-compacts.

Par exemple, un sous-ensemble fini est toujours compact; si une suite (x_n) converge vers x, alors l'ensemble $K = \{x\} \cup \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est compact.

Notons aussi que la compacité est une propriété intrinsèque de K. On peut remplacer la topologie de E par la topologie induite sur K. Ceci n'est pas vrai pour la propriété d'être fermé par exemple.

Exercice Montrer que pour la topologie de Zariski tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est quasi-compact.

Nous donnons dans cette section deux propriétés qui n'utilisent pas la séparation.

Propriété 5.1 *Soit K un compact et $F \subset K$ un fermé. Alors F est compact.*

Preuve. Soit un recouvrement ouvert de F : $F \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$. Alors $K \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i \cup F^C$ et F^C étant un ouvert, on peut en extraire un recouvrement fini. Donc $K \subset \bigcup_{i \in J,\, fini} \omega_i \cup F^C$.

Donc $F \subset \bigcup_{i \in J,\, fini} \omega_i$. $\square$

Proposition 5.1 *Soit une application continue $f : (E, \mathcal{T}_E) \to (F, \mathcal{T}_F)$ et K un compact de E, alors $f(K)$ est compact.*

En d'autres termes l'image continue d'un compact est compacte.

Preuve. Considérons un recouvrement ouvert de $f(K)$ par des ouverts : $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$, avec ω_i ouvert de F. Alors $K \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\omega_i)$, et $f^{-1}(\omega_i)$ est ouvert par continuité de f. Il existe donc un recouvrement ouvert de K, $K \subset \bigcup_{i \in J,\, fini} f^{-1}(\omega_i)$. On en déduit que $f(K) \subset \bigcup_{i \in J,\, fini} \omega_i$. $\square$

On peut aussi donner la version suivante de la définition, utilisant les ensembles complémentaires

Proposition 5.2 *Soit $K \subset E$, espace topologique. Cette partie K est compacte si et seulement si pour tout ensemble de partie fermées dont l'intersection ne coupe pas K, alors il existe déjà une intersection finie qui ne coupe pas K.*

Corollaire 5.1 *Soit une famille de fermés inclus dans un compact, si leur intersection est vide, alors il existe déjà un nombre fini de ces fermés dont l'intersection est vide. Soit une famille décroissante de fermés inclus dans un compact, si leur intersection est vide, ils sont déjà vides à partir d'un certain rang (seul un nombre fini n"est pas vide).*

5.2 Compacité dans les espaces séparés

On suppose maintenant que l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est séparé.

Théorème 5.1 *(Séparation des compacts)*

(i) Soit K un compact de E et un point $y \notin K$. Alors il existe deux ouverts U et V tels que

$$y \in V, \qquad K \subset U, \qquad U \cap V = \emptyset.$$

(ii) Soit K_1 et K_2 deux compacts disjoints de E. Alors il esxiste deux ouverts U et V tels que

$$K_1 \subset V, \qquad K_2 \subset U, \qquad U \cap V = \emptyset.$$

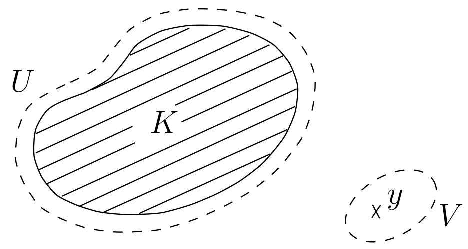

Figure 5.1: Séparation d'un point y et d'un compact K.

Preuve. Nous ne démontrons que le point (i). Soit $a \in K$, alors $a \neq y$ et par l'hypothèse de séparation on peut trouver deux ouverts U_a et V_a tels que $y \in V_a$, $a \in U_a$ et $U_a \cap V_a = \emptyset$. Puisque $K \subset \bigcup_{a \in K} U_a$, on peut en extraire un recouvrement fini : $K \subset \bigcup_{a \in J\ fini} U_a := U$. Par ailleurs $y \in \bigcap_{a \in J\ fini} V_a := V$. Finalement, $U_a \cap V \subset U_a \cap V_a = \emptyset$ pour tout $a \in J$, on a donc aussi $U \cap V = \emptyset$ et U et V sont des ouverts par les axiomes de base d'une topologie. □

Corollaire 5.2 *Dans un espace topologique séparé, tout compact est fermé. Dans un espace topologique compact, les fermés sont les compacts.*

Ceci n'est pas vrai pour $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{zar})$. Toute partie de $\mathbb{N}$ est compacte mais pas forcément fermée.

Preuve. Soit $\omega = K^C$ et $y \in \omega$. Le théorème ci-dessus montre qu'il existe un ouvert V_y contenant y et ne coupant pas K c-à-d que $V_y \subset K^C = \omega$. Donc ω est ouvert (c'est la réunion de ces ouverts V_y pour tout y). □

Corollaire 5.3 *Soit une application continue $f : (K, \mathcal{T}_K) \to (F, \mathcal{T}_F)$ où K est compact et F séparé. Si f est bijective alors f^{-1} est continue, i.e., f est donc un homéomorphisme.*

On pourra comparer ce résultat à celui du Théorème de continuité de l'inverse de Banach, Théorème 7.11.

Preuve. Le second énoncé a déjà été démontré. Montrons le premier. Il faut montrer que f^{-1} est continue. Soit ω un ouvert de K, alors ω^C est fermé donc compact (propriété 5.1). Donc $f(\omega^C)$ est compact (propriété 5.1) donc fermé (corollaire 5.2). Donc $f(\omega) = f(\omega^C)^C$ est ouvert.

On montre aussi le résultat suivant, lié à la structure d'ordre sur les topologies :

Théorème 5.2 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et compact. Alors toute topologie $\mathcal{T}'$ moins fine telle que E reste séparée est égale à $\mathcal{T}$.*

Preuve. Soit ω un ouvert de $\mathcal{T}$, on doit montrer que $\omega \in \mathcal{T}'$. Soit $K = \omega^C$, c'est un fermé donc compact pour $\mathcal{T}$ et donc aussi compact pour $\mathcal{T}'$ (tout recouvrement par des ouverts de $\mathcal{T}'$ est aussi un recouvrement par des ouverts de $\mathcal{T}$ et on peut donc en extraire un recouvrement fini). Grâce au Corollaire 5.2 on déduit que K est un fermé de $\mathcal{T}'$, et $\omega = K^C$ est donc un ouvert de $\mathcal{T}'$. On a bien montré que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. $\square$

5.3 Compacité dans les espaces métriques, Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 5.3 *Dans un espace métrique les compacts sont bornés. Les compacts de $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ sont les fermés bornés.*

Preuve. (i) Soit K un compact d'un espace métrique. On écrit $K \subset \bigcup_{a \in K} B(a,1)$, boules ouvertes de centre a est de rayon 1. On peut donc extraire un recouvrement fini qui est donc borné.

(ii) Pour le cas de $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ voir [24] par exemple. Il est intéressant de noter que la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$ est utilisée ici.

Théorème 5.4 *(Théorème de Bolzano-Weierstrass) Soit un compact Kalors de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in K$, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Réciproquement, dans un espace métrique (E,d), $K \subset E$ de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in K$, on peut extraire une sous-suite convergente. Un espace métrique est donc compact si et seulement si toute suite d'éléments de K admet un point adhérent.

On parle ainsi d'espace équentiellement Compact.

Preuve. ($\Longrightarrow$) Supposons K compact et considérons une suite (x_n) d'éléments de K. Posons $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Les $\bar{A}_n$ forment une suite décroissante de fermés non vides. D'après le Corollaire 5.1, leur intersection n'est donc pas vide. Soit $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{A}_n$. Tout ouvert contenant a coupe $\bar{A}_n$, et contient donc un point de A_n. Comme ceci est vrai pour tout n, tout ouvert contenant a contient donc une infinité de points de la suite. $\square$

($\Longleftarrow$) La réciproque est plus longue et se fait en trois étapes.
(i) On commence par le

Lemme 5.1 *Si toute suite admet un point adhérent et $K \subset \bigcup_{i\in I} \omega_i$, alors*

$$\exists \varepsilon, \quad \forall a \in K, \ \exists i, \quad B(a,\varepsilon) \subset \omega_i.$$

Preuve. Par contradiction, supposons que $\forall n,\ \exists a_n \in K$ tel que la boule $B(a_n, \frac{1}{n})$ n'est incluse dans aucun des ω_i. Alors, à extraction près, $a_{k(n)} \to a \in \omega_{i_0}$, et pour n assez grand, ω_{i_0} contient $B(a_n, \frac{1}{n}) \subset B(a, \frac{1}{n} + d(a, a_n))$ ce qui est une contradiction. □

(ii) La deuxième étape consiste à montrer le

Lemme 5.2 *Si toute suite admet un point adhérent alors*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists (a_i)_{i\in I},\ I fini \quad t.q. \quad K \subset \bigcup_{i\in I,\, fini} B(a_i, \varepsilon).$$

Preuve. Soit $a_1 \in K$ et $B(a_1, \varepsilon)$. Si cette boule ne recouvre pas K alors on peut trouver $a_2 \notin B(a_1, \varepsilon)$. Si $B(a_1, \varepsilon) \cup B(a_2, \varepsilon)$ ne recouvre pas K on peut trouver $a_3 \in K$, $a_3 \notin B(a_1, \varepsilon) \cup B(a_2, \varepsilon)$... et ainsi de suite. Si un nombre fini ne suffit pas, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente et ceci est impossible car $d(a_i, a_j) \geq \varepsilon$. □

(iii) On peut maintenant conclure. Si toute suite admet un point adhérent et $K \subset \bigcup_{i\in I} \omega_i$, ω_i ouvert, alors on choisit le $\varepsilon > 0$ du Lemme 5.1 et le recouvrement fini correspondant du Lemme 5.2. Chaque $B(a_i, \varepsilon)_{i\in I}$($I$ fini) est donc inclus dans un $\omega_{j(i)}$ et la famille finie $(\omega_{j(i)})_{i\in I}$ recouvre donc K, ce qui prouve l'axiome définissant les ensembles compacts. □

Corollaire 5.4 *Tout espace métrique compact est complet et séparable.*

Preuve. (Séparabilité) Du recouvrement de cet espace E par les boules $B(a, 1/n)$ où a parcourt E, on peut extraire un recouvrement fini. Notons C_n les centres de ces boules. Alors $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est dénombrable et dense. En effet pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un point de C_n et donc de D tel que $d(x, x_n) \leq 1/n$.

(Complétude) Ceci se déduit du fait qu'une suite de Cauchy a une valeur d'adhérence et converge donc. □

5.4 Quelques résultats et notations supplémentaires

Nous donnons ici une série de résultats complémentaires sans démonstration. On renvoie à [24] pour plus de détails.

Définition 5.2 *(Relativement compact) On dit qu'une partie A d'un espace topologique séparé est relativement compacte si $\bar{A}$ est compacte (ou encore si elle est incluse dans un compact de K d'après le Corollaire 5.2).*

Notons que dans un espace métrique cette propriété est équivalente à : de toute suite de A on peut extraire une sous-suite convergente dans $\bar{A}$.

Définition 5.3 *(Précompact) Un espace métrique est dit précompacte si son complété est compact (voir la Remarque 4.2).*

Définition 5.4 *(Localement compact) Un espace topologique est dit localement compact s'il est séparé et si tout point possède un voisinage compact au moins.*

Un tel espace est dit dénombrable à l'infini si il est réunion d'une famille dénombrable de compacts.

En d'autres termes, un espace est dit localement compact si pour tout point x, il existe un ouvert ω et un compact K tels que $x \in \omega \subset K$

Par exemple, $\mathbb{R}^d$ est dénombrable à l'infini mais pas compact.

Exercice En dimension infinie, un e. v. n. n'est jamais localement compact.

Théorème 5.5 *(Théorème de séparation d'Urysohn) Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace localement compact et $K \subset \omega$ avec K compact, ω ouvert. Alors il existe une fonction continue de E dans $[0,1]$ telle que*

$$f(x) = 1 \text{ pour } x \in K, \qquad f(x) = 0 \text{ pour } x \notin \omega.$$

Il existe de nombreuses variantes et conséquences (en termes topologiques) de ce résultat en dehors du Théorème (métrique) démontré dans la section 3.3.

Théorème 5.6 *(Compactification d'Alexandroff) Soit un espace localement compact $(E, \mathcal{T})$. Alors il existe un espace topologique $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{T}})$ compact tel que $\mathcal{T}$ est la topologie induite par $\tilde{\mathcal{T}}$ sur E et $\tilde{E} \backslash E$ est réduit à un point.*

La démonstration est fondée sur l'idée suivante. On pose $\tilde{E} = E \cup \{\alpha\}$ et la topologie $\tilde{E}$ est consituée des éléments de $\mathcal{T}$ et des complémentaires (dans $\tilde{E}$) de compacts de E.

Il existe un théorème plus général de compactification, celui de Stone-Čhech ([24]). Tout espace topologique général (non nécessairement séparé) peut se plonger continument dans un espace compact (il existe même un choix minimal unique à homéomorphisme près).

5.5 Théorème de Tychonoff

Théorème 5.7 *(Théorème de Tychonoff) Tout produit, fini ou non, d'espaces compacts est compact.*

Réciproquement, si un produit d'espaces non vides est compact séparé, alors chacun d'eux est compact séparé.

Une conséquence en est le Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki. On renvoie à la section 7.2 pour la définition de la norme naturelle du dual topologique E' d'un Banach E ainsi qu'aux sections 3.5.3 et 3.5.4 pour les définitions des topologies faible étoile et produit.

Théorème 5.8 *(Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki) Soit* $(E, \|...\|)$ *un espace de Banach, E' sont dual topologique. La boule unité fermée de E' est compacte pour la topologie faible étoile.*

En effet la topologie faible étoile n'est autre que la topologie produit de E'.

La suite de cette section on montre le Théorème de Tychonoff. La démonstration de ce résultat est simple dans le cas d'un produit fini mais plus élaborée en général. Elle utilise des notions de structure d'ordre.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre partielle $\leq$. Un élément x de E est dit maximal si

$$\forall y \in E, \quad x \leq y \Rightarrow y = x.$$

Une partie F de E est totalement ordonnée si

$$\forall x,\ y \in E, \quad x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x.$$

L'ensemble E munit de l'ordre $\leq$ est dit inductif si toute partie ordonnée admet un majorant.

Lemme 5.3 *(Lemme de Zorn) Tout ensemble ordonné inductif non vide possède un élément maximal.*

Rappelons que ce lemme est équivalent à l'axiome du choix.

Définition 5.5 *Un mauvais recouvrement d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est un recouvrement dont on ne peut extraire de recouvrement fini.*

Lemme 5.4 *Soit $\mathcal{B}$ une prébase d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$. Si E admet un mauvais recouvrement par des ouverts, alors il admet aussi un mauvais recouvrement par des éléments de $\mathcal{B}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble (non vide) des mauvais recouvrements de E par des ouverts. Cet ensemble est muni d'un ordre partiel: l'inclusion.

(i) Montrons d'abord qu'il est inductif. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{M}$, posons $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Il s'agit bien d'un majorant des $\mathcal{A}_i$. Pour montrer que c'est aussi un mauvais recouvrement de E par des ouverts, nous raisonnons par l'absurde. Sinon il contiendrait un recouvrement fini $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Pour tout j, il existe $i(j)$ tel que $\omega_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$. Comme la famille est totalement ordonnée, il existe $k \in I$ tel que

$\mathcal{A}_{i(j)} \subset \mathcal{A}_k$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. Alors de $\mathcal{A}_k$ on peut extraire un recouvrement fini ce qui est une contradiction.

(ii) Par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal $\mathcal{A}^*$ de $\mathcal{M}$. En particulier pour tout ouvert $\omega \notin \mathcal{A}^*$, le recouvrement $\mathcal{A}^* \cup \omega$ n'est pas mauvais; donc il existe un recouvrement fini de E de la forme $\{\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n\}$ avec $\omega_i \in \mathcal{A}^*$ pour $i = 1, \ldots n$.

(iii) On en déduit que pour deux ouverts ω, ω' de E, tels que $\omega \notin \mathcal{A}^*$ et $\omega' \notin \mathcal{A}^*$, on a aussi $\omega \cap \omega' \notin \mathcal{A}^*$. En effet, grâce au point (ii) on construit deux recouvrements de E, $\{\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et $\{\omega', \omega'_1, \ldots, \omega'_n\}$. Alors, $\{\omega \cap \omega', \omega_1, \ldots, \omega_n, \omega'_1, \ldots, \omega'_n\}$ est un recouvrement finit de E et on $\omega \cap \omega'$ n'appartient donc pas à $\mathcal{A}^*$.

(iv) Soient deux ouverts $\omega \subset \omega'$. Si $\omega \notin \mathcal{A}^*$ alors $\omega' \notin \mathcal{A}^*$. En effet, toujours par le point (ii), on construit un recouvrement de E, $\{\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Alors $\{\omega', \omega_1, \ldots, \omega_n\}$ est aussi un recouvrement fini de E et le résultat en découle.

(v) On montre enfin que $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}^*$ recouvre E. Pour tout $x \in E$ il existe $\Omega \in \mathcal{A}^*$ tel que $x \in \Omega$. Par la définition d'une prébase, il existe aussi $\omega_1, \ldots, \omega_n$ dans $\mathcal{B}$ tels que $x \in \omega_1 \cap \ldots \cap \omega_n \subset \Omega$. Par le point (iii), on en déduit qu'il existe i tel que $\omega_i \subset \mathcal{A}^*$. Ceci prouve que $x \in \omega_i \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{A}^*$. Donc $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}^*$ est un recouvrement de E.

La démonstration du lemme 5.4 est bien complète puisque $\mathcal{A}^*$ étant un mauvais recouvrement, $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}^*$ l'est aussi. □

Preuve du théorème 5.7. Le produit d'espace séparés est bien séparé (théorème 3.15).

Soit maintenant $(E, \mathcal{T}) = \prod_{i \in I}(E_i, \mathcal{T}_i)$ un produit d'espaces compacts. Par les propriétés de la topologie produit, $\mathcal{B} = \{\pi_i^{-1}(\omega),\ i \in I,\ \omega \in \mathcal{T}_i\}$ est une prébase d'ouverts de E. Supposons que E ne soit pas compact, alors, d'aprés le lemme 5.4, il existe un mauvais recouvrement $\mathcal{A}$ de E par des éléments de $\mathcal{B}$. Pour $i \in I$, soit $\mathcal{A}_i$ l'ensemble des ouverts ω de E_i tels que $\pi_i^{-1}(\omega) \in \mathcal{A}$.

Montrons d'abord que $\mathcal{A}_i$ ne recouvre pas E_i. Sinon il existerait un recouvrement fini de E_i, disons $\omega_1, \ldots, \omega_n$ par des éléments de $\mathcal{A}_i$. Mais alors $\pi_i^{-1}(\omega_1), \ldots, \pi_i^{-1}(\omega_n)$ serait un recouvrement fini de E, ce qui contredit le fait que $\mathcal{A}$ est mauvais.

Par conséquent, il existe $x_i \in E_i$ tel que $x_i \notin \cup \mathcal{A}_i$. On pose $x = (x_i)_{i \in I}$. Comme $\mathcal{A}$ est un recouvrement de E, il existe un $i \in I$ et un ouvert ω de E_i tel que $x \in \pi_i^{-1}(\omega) \in \mathcal{A}$. Ceci contredit le fait que $x_i \notin \cup \mathcal{A}_i$. □

5.6 Quelques exemples d'applications

5.6.1 Uniforme continuité des fonctions continues sur un compact

Théorème 5.9 *(Théorème de Heine) Soit f une application continue d'un espace compact $(K, \mathcal{T}_K)$ dans un espace métrique (F, d_F), alors elle est uniformément continue.*

Preuve. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n), (y_n) telles que $d_K(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ et $d_F(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Par compacité de K on a, à extraction près, $x_n,\ y_n \to x$ et donc $d_F(f(x_n), f(y_n)) \to d_K(f(x), f(x)) = 0$. D'où une contradiction. □

5.6.2 Extrema des fonctions continues sur un compact

Théorème 5.10 *Toute application continue d'un espace compact dans $\mathbb{R}$ atteint ses maximum et minimum.*

Preuve. L'image d'un compact est compact c'est-à-dire un fermé borné de $\mathbb{R}$. Donc les maximum et infimum de ce fermé sont bien dans l'image de l'application. □

Exercice Considérons un espace dont les fermés bornés sont compacts. Alors, pour F fermé, il existe $x_0 \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, x_0)$. (Voir la Section 3.1.2).

5.6.3 Théorème de Dini

Théorème 5.11 *(Théorème de Dini) Soit K un espace compact et $f, f_1, f_2, \dots \in \mathcal{C}^0(K; \mathbb{R})$. On suppose que*

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots, \qquad \forall x \in K, \quad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Alors (f_n) converge uniformément vers f.

Preuve. On pose $g_n = f - f_n \geq 0$ (une suite décroissante) et on se donne $\varepsilon > 0$. On pose $K_n = \{x \in K\ t.q.\ g_n(x) \geq \varepsilon\}$. On a $\ldots \subset K_3 \subset K_2 \subset K_1$ et les K_n sont fermés. On constate de $\bigcap K_n$ est vide, donc (voir le Corollaire 5.1), il existe $n_0(\varepsilon)$ tel que X_{n_0} est vide. Alors pour $n \geq n_0$, on a $0 \leq g_n(x) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in K$. Ce qui prouve le résultat. □

5.6.4 Équivalence des normes en dimension finie

Théorème 5.12 *Soit $(E, \|\ldots\|)$ en espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(i) l'espace E est de dimension finie,
(ii) la boule unité fermée de E est compacte
(iii) toutes les normes sur E sont équivalentes.

Si E est de dimension infinie, la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

Exemple Sur l'espace vectoriel P_n des polynômes de degré inférieur ou égal à n ($p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$), les normes sont équivalentes (pour tout $a < b$)

$$\sup_{x \in [a,b]} |p(x)| \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=0}^{n} |a_i|.$$

Mais les constantes dans l'équivalence des normes explosent avec n.

Preuve. Nous ne démontrons que le fait qu'en dimension infinie la boule unité n'est pas compacte. Considérons une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs indépendants $e_n \notin E_{n-1} = vect(e_1, ..., e_{n-1})$. Alors, par compacité des fermés bornés de E_{n-1}, il existe $x_{n-1} \in E_{n-1}$ tels que

$$d(e_n, E_{n-1}) = \|e_n - x_{n-1}\| \leq \|e_n - x\| \qquad \forall x \in E_{n-1}.$$

Posons alors $b_n = \frac{e_n - x_{n-1}}{\|e_n - x_{n-1}\|}$. On a pour tout $x \in E_{n-1}$,

$$\begin{aligned} \|b_n - x\| &= \|\tfrac{e_n - x_{n-1}}{\|e_n - x_{n-1}\|} - x\| \\ &= \tfrac{1}{\|e_n - x_{n-1}\|} \Big\| e_n - x_{n-1} - \|e_n - x_{n-1}\|\, x \Big\| \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Soit une sous-suite $(b_{n(k)})$ alors on déduit du calcul ci-dessus que $\|b_{n(k+1)} - b_{n(k)}\| \geq 1$. Ceci implique que la sous-suite $(b_{n(k)})$ ne peut converger et le théorème de Bolzano-Weierstrass montre donc que la boule unité n'est pas compacte. $\square$

Remarque 5.1 *On rappelle par ailleurs que*
(i) tout espace vectoriel E admet une base algébrique $(e_i)_{i \in I}$ c'est-à-dire que tout élément de E s'écrit de façon unique $x = \sum_{finie} \lambda_i e_i$ (il s'agit d'une conséquence du lemme de Zorn),
(ii) on dit qu'un espace de Banach admet une base de Schauder, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si tout élément de E s'écrit de façon unique $x = \sum_{\mathbb{N}} \lambda_n e_n$ au sens où la série converge normalement. Attention, un espace de Banach séparable n'admet pas toujours de base de Schauder ([17])!

Dans les deux cas, les ensembles I ne sont pas dénombrables en toute généralité. La construction abstraite rend peu utiles ces bases, contrairement au cas des espaces de Hilbert, voir la Section 8.5, même si la plupart des Banach usuels admettent des bases de Schauder.

5.6.5 Théorèmes de point fixe de Brouwer et de Schauder

Rappelons d'abord le Théorème de point fixe de Brouwer qui peut s'établir de plusieurs façon différentes et traite de la dimension finie

Théorème 5.13 *(Théorème du point fixe de Brouwer) Soit f une application continue d'un convexe compact de $\mathbb{R}^d$ dans lui-même, alors f admet un point fixe au moins.*

Une forme plus géométrique mais dont on peut démontrer qu'elle est équivalente au Théorème de Brouwer est le

Théorème 5.14 *(Non rétraction de la boule unité) Il n'existe pas d'application continue $f : \overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{S}^{d-1}$ telle que $f_{|_{\mathbb{S}^{d-1}}} = Id$ (identité).*

Donnons deux exemples d'applications du Théorème de Brouwer.

Exemple (Équilibres de Nash) En théorie des jeux on considère n joueurs. Les variables $x_i \in [0,1]$, $1 \leq i \leq n$, désignent leurs politiques respectives. Chaque joueur i choisit sa 'politique individuelle' x_i et une politique est donc représentée par le vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Le joueur i chiffre une politique par un gain $G_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$. Chaque joueur essaie donc de maximiser son gain en adoptant sa politique mais ne connaissant pas celle des autres joueurs. Les *équilibres (de Nash)* désignent les n-uples $(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \in [0,1]^n$ tels que

$$\forall i,\ \forall x_i \in [0,1], \quad G_i(\overline{x_1}, \ldots, x_i, \ldots, \overline{x_n}) \leq G_i(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots, \overline{x_n}).$$

C'est une situation où chaque joueur se trouve avoir joué au mieux selon son propre critère. De tels équilibres n'existent pas toujours mais on peut énoncer le

Théorème 5.15 *(Théorème de Nash) On suppose que*
(i) les G_i sont continus sur $[0,1]^n$,
(ii) pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$, la fonction $y_i \to G_i(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)$ atteint son maximum en un point unique.

Alors le jeu $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$ admet au moins un équilibre.

Preuve. À tout point $(x_1, \ldots, x_n)$ on associe le point unique $(y_1, \ldots, y_n)$ tel que y_i maximise la fonction $G_i(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)$. Cette application du convexe compact $[0,1]^n$ dans lui-même est continue (ce point est laissé en exercice et découle de l'hypothèse (i)). Elle admet donc un point fixe au moins d'aprés le Théorème de Brouwer. Ce point est bien un équilibre. $\square$

Un autre exemple d'application est le

Théorème 5.16 *(Théorème du minimax) Soient E, F deux convexes compacts de $\mathbb{R}^d$ et une fonction continue $f : E \times F \to \mathbb{R}$, concave par rapport à la première variable et convexe par rapport à la seconde. Alors*

$$\max_{x \in E} \min_{y \in F} f(x,y) = \min_{y \in F} \max_{x \in E} f(x,y)$$

La démonstration est laissée en exercice.

Une introduction à la théorie des jeux, d'autres versions plus générales du Théorème de Brouwer et du Théorème de Nash se trouvent dans [13].

Nous ne démontrons pas ici le Théorème de Brouwer (la démonstration utilise naturellement des notions de degré topologique) mais notons qu'il n'est vrai qu'en dimension finie. Il est néammoins possible, en utilisant la notion de compacité, de "réduire" la dimension infinie à la dimension finie. C'est le théorème suivant :

Théorème 5.17 *(Théorème du point fixe de Schauder) Soit $(E, \|\ldots\|)$ un espace de Banach, C un convexe fermé de E et $f : C \to C$ une application continue. On suppose $f(C) \subset K$, avec K compact, alors f admet un point fixe au moins.*

Nous renvoyons à Gilbarg et Trudinger [15] pour de nombreuses applications de ce Théorème ainsi que des variantes (Théorème de Leray-Schauder par exemple).

Preuve. Montrons comment dériver le Théorème du point fixe de Schauder à partir de celui de Brouwer. Tout d'abord on remarque que $f : K \cap C \to K \cap C$.
Soit alors un recouvrement fini

$$K \subset \bigcup_{i=1,\ldots I(n)} B(x_i, 1/n), \qquad et \quad B_i := B(x_i, 1/n).$$

Soit enfin $\Phi_n : K \to \mathrm{Conv}(x_1, \ldots, x_{I(n)}) \subset C$ définie par :

$$\Phi_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1,\ldots I(n)} d(x, K \backslash B_i)\ x_i}{\displaystyle\sum_{i=1,\ldots I(n)} d(x, K \backslash B_i)}.$$

On a,

$$\|\Phi_n(x) - x\| \leq \frac{\displaystyle\sum_{i=1,\ldots I(n)} d(x, K \backslash B_i)\ \|x - x_i\|}{\displaystyle\sum_{i=1,\ldots I(n)} d(x, K \backslash B_i)} \leq \frac{1}{n}.$$

Comme $\Phi_n \circ f : \mathrm{Conv}(x_1, \ldots, x_{I(n)}) \to \mathrm{Conv}(x_1, \ldots, x_{I(n)})$, on peut appliquer le Théorème du point fixe de Brouwer et il existe x_n tel que $\Phi_n \circ f(x_n) = x_n$. Le Théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'extraire une sous-suite telle que $f\big(x_{n(k)}\big)$ converge et comme (Φ_n) converge uniformément vers l'identité, on obtient que $\Phi_{n(k)} \circ f(x_{n(k)})$ converge et $x_{n(k)}$ converge donc. À la limite on obtient bien $f(\bar{x}) = \bar{x}$. $\square$

5.6.6 Théorèmes de Perron-Frobenius et de Krein-Rutman

On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure d'ordre naturelle. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on dit que $x \geq 0$ (resp. > 0) si toutes ses coordonnées vérifient $x_i \geq 0$ (resp. > 0), $i = 1, \ldots, d$.

Théorème 5.18 *(Théorème de Perron-Frobenius) Soit $A \in M_{d\times d}(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients > 0. On pose*

$$\rho(A) = \sup\{r \geq 0 \quad t.q. \quad \exists x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\},\ x \geq 0,\ A.x \geq r\, x\}.$$

Alors
(i) $\rho(A) > 0$ est valeur propre simple de A associée à un vecteur propre $x^0 > 0$,
(ii) tout autre vecteur propre positif de A est proportionnel à x^0,
(iii) le rayon spectral de A est égal à $\rho(A)$,
(iv) si les coefficients de A sont seulement ≥ 0, alors A admet une valeur propre ≥ 0 associée à un vecteur propre ≥ 0.

Cette expression pour $\rho(A)$ est appelée formule du max-min ($A.x \geq rx$ s'écrit aussi $min(A.x)_i/x_i \geq r$) de Collatz-Wielandt, elle est équivalente (pour les matrices irréductibles comme c'est le cas ici) à

$$\rho(A) = \inf\{r \geq 0 \quad t.q. \quad \exists x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\},\ x \geq 0,\ A.x \leq r\, x\}.$$

Posons $T(x) = \log\big(A\exp(x)\big)$, où *exp* et *log* sont pris coordonnée par coordonnée. Alors, avec $y = \log(x)$ on a

$$\log\rho(A) = \inf\{s \in \mathbb{R} \quad t.q. \quad \exists y \in \mathbb{R}^d,\ T(y) \leq s + y\} = \sup_{i,y}(T_i(y) - y_i).$$

On est alors ramené à un problème de 'minimisation' classique car

Exercice Montrer que pour tout $i = 1, \dots, d$, l'application $y \mapsto T_i(y)$ est convexe.

Exercice (Seconde formule de Collatz-Wielandt) On considère les itérations

$$x^{k+1} = A.x^k, \qquad x^0 > 0.$$

Montrer que $\max_i(x_i^{k+1}/x_i^k)$ décroit vers λ, $\min_i(x_i^{k+1}/x_i^k)$ croit vers λ.

Exercice Soit A matrice à coefficients positifs, les vecteurs propres directs et adjoints (donc positifs), $A.N = \rho(A)N$ et $\phi.A = \rho(A)\phi$. Soit enfin le système différentiel

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = \sum_{j=1}^{d}[a_{ij} - \rho(A)\delta_{ij}]n_j(t).$$

(i) Soit $H(\cdot)$ convexe, montrer l'inégalité d'entropie généralisée

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{d}\phi_i N_i H\big(\frac{n_i(t)}{N_i}\big) = \sum_{i,j=1}^{d}\phi_i a_{ij} N_j\left[H'\big(\frac{n_i(t)}{N_i}\big)[\frac{n_j(t)}{N_j} - \frac{n_i(t)}{N_i}] - H\big(\frac{n_j(t)}{N_j}\big) + H\big(\frac{n_i(t)}{N_i}\big)\right] \leq 0.$$

(ii) en déduire que, pour $t \to \infty$, avec un taux exponentiel,

$$n(t) \to qN, \qquad q = \sum_{i=1}^{d} \phi_i n_i(0) / \sum_{i=1}^{d} \phi_i N_I.$$

Preuve. *Preuve de (i).* Commençons par montrer que $\rho(A)$ est valeur propre. On pose

$$(A.x)_i = \sum_{1 \le j \le d} a_{ij} x_j,$$

$$m = \min_{1 \le i \le d} \sum_{1 \le j \le d} a_{ij}, \qquad M = \max_{1 \le i \le d} \sum_{1 \le j \le d} a_{ij}.$$

Pour $x \ge 0$, on a

$$(A.x)_i \le M \max_{1 \le j \le d} x_j.$$

Ceci entraîne que $\rho(A) \le M$. Par ailleurs pour le vecteur $x = (1, 1, \dots, 1)$ on a

$$(A.x)_i = \sum_{1 \le j \le d} a_{ij} \ge m = m\, x_i,$$

donc $\rho(A) \ge m$.

Soit alors une suite de réels $r_n < \rho(A)$ telle que $r_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \rho(A)$ et une suite de vecteurs $x^n \ge 0$ tels que

$$A.x^n \ge r_n\, x^n, \qquad \|x^n\| = 1.$$

Par compacité de la boule unité en dimension finie, on en déduit qu'il existe une sous-suite convergente: $x^{n(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} x \ge 0$. On obtient à la limite

$$A.x \ge \rho(A)\, x, \qquad \|x\| = 1. \tag{5.1}$$

Montrons que x est en fait le vecteur propre recherché. Ceci découle du lemme suivant

Lemme 5.5 *Si*

$$A.x \ge \rho(A)\, x, \qquad x \ge 0, \qquad \textit{et} \ \|x\| = 1,$$

alors $x > 0$ *et* $A.x = \rho(A)\, x$.

Preuve. En effet, posons

$$A.x - \rho(A)\, x = z \ge 0,$$

et supposons $z \ne 0$ nous allons obtenir une contradiction. Posons $y = A.x > 0$, alors, puisque les coefficients de A sont > 0, on a

$$A.y - \rho(A)\, y = A.z > 0.$$

Comme toutes les coordonnées de $A.z$ sont > 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A.z \geq \varepsilon y$. On arrive bien à une contradiction avec la définition de $\rho(A)$ car $A.y \geq (\rho(A) + \varepsilon)\ y$. Ceci prouve que $\rho(A)$ est valeur propre pour le vecteur propre $x = A.x/\rho(A) > 0$. $\square$

Montrons maintenant la simplicité de ce vecteur propre $x^0 > 0$. Soit un autre vecteur propre associé à la valeur propre $\rho(A)$. Par addition avec μx^0 on peut supposer que ce vecteur propre, notons le y, est strictement positif aussi. On peut aussi les normer pour la norme l^1:

$$\sum_{i=1}^{d} x_i^0 = \sum_{i=1}^{d} y_i = 1. \tag{5.2}$$

On a

$$\rho(A)(x_i^0 - y_i) = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}\ (x_j^0 - y_j),$$

$$\rho(A)|x_i^0 - y_i| = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}\ (x_j^0 - y_j)\ \operatorname{sgn}(x_i^0 - y_i) \leq \sum_{j=1}^{d} a_{ij}\ |x_j^0 - y_j|.$$

Mais le lemme 5.5 ci-dessus appliqué à (5.1) montre que ceci implique

$$\rho(A)|x_i^0 - y_i| = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}\ |x_j^0 - y_j|,$$

ce qui signifie que $\operatorname{sgn}(x_i^0 - y_i) = \operatorname{sgn}(x_j^0 - y_j)$ pour tout $j = 1, \ldots, d$. Donc $x^0 \geq y$ (ou le contraire), ce qui implique $x^0 = y$ compte tenu de (5.2).

Preuve de (ii). Soit $y \geq 0$ un vecteur propre, alors l'égalité $A.y = \lambda y$ et la définition de $\rho(A)$ montrent que $0 < \lambda \leq \rho(A)$. Ensuite, par multiplication de y par un scalaire, on suppose à nouveau que $x^0 - y > 0$. On a alors

$$A.(x^0 - y) = \rho(A)x^0 - \lambda y \geq \rho(A)(x^0 - y),$$

et, suivant à nouveau le lemme 5.5, ceci montre que $x^0 - y$ est proportionnel à x^0, donc y aussi.

Preuve de (iii). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda I$ n'est pas inversible. Soit $y \in \mathbb{C}^d$ un vecteur non nul du noyau. Alors

$$A.y = \lambda y \Longrightarrow |\lambda|\ |y_i| = \sum_{1 \leq j \leq d} a_{ij} y_j \frac{\bar{\lambda}\bar{y}_i}{|\lambda y_i|} \leq \sum_{1 \leq j \leq d} a_{ij} |y_j|.$$

Par définition de $\rho(A)$, et la propriété (ii), ceci prouve que soit $\lambda < \rho(A)$, soit $\lambda = \rho(A)$ mais le lemme 5.5 montre alors que $|y|$ est vecteur propre pour $\rho(A)$ et l'in égalit é étant une égalit é, y est également vecteur propre.

Preuve de (iv). On considère une matrice A_ε à coefficients > 0 convergents vers ceux de A. Soit x_ε, de norme unité, vérifant $A(x_\varepsilon) = \rho(A_\varepsilon)x_\varepsilon$. Par compacité de la boule unité en dimension finie, on peut extraire de x_ε une sous-suite convergente vers x, $\|x\| = 1$ et de $\rho(A_\varepsilon)$ une sous-suite (extraite à nouveau) convergent vers $R \geq 0$. À la limite on trouve $A(x) = R\,x$, $x \geq 0$, $x \neq 0$, ce qui prouve (ii). □

L'hypothèse de stricte positivité de l'énoncé (i) peut être affaiblie en supposant que A est ≥ 0 et irréductible (voir [26]). Ces énoncés sont vrais seulement en dimension finie. La compacité de la boule unité intervient en effet dans leur démonstration. Elle intervient aussi en dimension infinie pour la "réduire" à la dimension finie. C'est le théorème suivant :

Théorème 5.19 *(Théorème de Krein-Rutman) Soit $(E, \|...\|)$ un espace de Banach et A une application linéaire continue, compacte et fortement positive sur un cône K fermé (d'intérieur non vide forcément) c'est-à-dire*

$$x \in K\backslash\{0\} \Longrightarrow A(x) > 0.$$

Le rayon spectral de A, $\rho(A)$ est valeur propre simple de A associée à un vecteur propre $x^0 \in Int(K)$ et c'est le seul vecteur propre positif.

Rappelons comment on obtient une structure d'ordre dans un espace vectoriel. Soit un cône K on dit que

$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \in K, \quad \text{et} \quad x > y \Leftrightarrow x - y \in Int(K).$$

Un cône fermé K est un sous-ensemble de E, tel que
(i) $0 \in K$,
(ii) $x,\ y \in K \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in K \quad \forall \lambda \geq 0,\ \mu \geq 0$,
(iii) $x \in K$ et $-x \in K \Longrightarrow x = 0$.
De plus
(iv) Il est dit reproduisant si $\forall x \in E$ alors $\exists y, z \in K$ tels que $x = y - z$,
(v) il est dit normal si $0 \leq x \leq y \Longrightarrow \|x\| \leq \|y\|$.

Nous renvoyons à [8] pour la démonstration, d'autres versions de ce théorème ainsi que des énoncés plus précis.

Exemple Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $K(\cdot,\cdot) \in \mathcal{C}^0(\bar\Omega \times \bar\Omega)$. Supposons $K > 0$ et posons

$$A(u)(x) = \int_\Omega K(y,x)u(y)dy, \qquad A : \mathcal{C}^0(\bar\Omega) \to \mathcal{C}^0(\bar\Omega).$$

Cet opérateur est linéaire continu, fortement positif et compact (voir le Théorème d'Ascoli ci-dessous). Le Théorème de Krein-Rutman s'applique donc et montre qu'il existe $\lambda > 0$ et $u \in \mathcal{C}^0(\bar\Omega)$ tels que

$$A(u) = \lambda u, \qquad u > 0.$$

Exemple Considérons $E = \mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $A(x) = y$ avec

$$y(t) = e^{-t}\int_0^t x(s)e^s ds \iff \begin{cases} \dot{y}(t) + y(t) & = x(t), \\ y(0) & = 0. \end{cases}$$

Il s'agit bien d'une application linéaire, compacte (voir le Théorème d'Ascoli dans la Section 5.7), positive mais pas strictement. Il n'existe pas de vecteur propre (complexe) pour ce problème car la seule solution de $\dot{y}(t) + y(t) = ry(t)$, avec $y(0) = 0$ est nulle ainsi que celles (réelles) de $0 \leq \dot{y}(t) \leq ry(t)$. L'hypothèse de positivité (au sens large) n'est donc pas suffisante contrairement à la dimension finie.

5.6.7 Décomposition $M = Q.S$ des matrices

Exemple Toute matrice $M \in M_{d,d}(\mathbb{R})$ peut se décomposer sous la forme

$$M = Q.S, \quad \text{avec} \quad Q.Q^t = Id \ (Q \text{ matrice orthogonale}), \quad S \text{ symétrique positive.}$$

En effet pour M inversible, on trouve que la seule décomposition possible s'obtient par $M^t.M = S.Q^t.Q.S = S^2$ c'est-à-dire que S est la racine carrée de la matrice symétrique positive $M^t.M$. Puis on choisit $Q = M.S^{-1}$ qui est bien orthogonale car $Q^t.Q = S^{-1}.M^t.M.S^{-1} = S^{-1}.S^2.S^{-1} = Id$.

Pour étendre ce résultat aux matrices de déterminant nul, il suffit de raisonner par densité. On choisit une suite M_n de matrices inversibles qui converge vers M (voir Section 2.3.4), la suite S_n correspondante converge vers S construite comme ci-dessus. D'autre part, par compacité, on peut extraire une sous-suite convergente de la suite Q_n : $Q_{n(k)} \to Q$ quand $k \to \infty$. En passant à la limite on obtient que $M_n = Q_n.S_n$ donne $M = Q.S$.

5.7 Quelques Théorèmes d'Ascoli-Arzela

Les Théorèmes d'Ascoli-Arzela donnent des conditions ou des critères de compacité pour des familles de fonctions continues.

5.7.1 Compacité des fonctions continues à valeurs réelles

Le plus simple d'entre eux est le suivant. On appelle $\mathcal{C}_b^0(K;\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur $(K, \mathcal{T})$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f - g\|_{\mathcal{C}^0} = \sup_{x\in K} |f(x) - g(x)|,$$

(voir la Section 4.2).

Théorème 5.20 *Soit un espace métrique (K, d_K) et une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}^0(K;\mathbb{R})$ (continues de K dans $\mathbb{R}$). On suppose que*
(i) l'espace K est compact,
(ii) cette suite est uniformément bornée,
(iii) cette suite est "équi-uniformément continue", i.e., il existe un module de continuité $\omega(h)$ (croissant et tendant vers 0 pour $h \to 0$), commun aux f_n, tel que

$$\sup_{d_K(x,y)\leq h} |f_n(x) - f_n(y)| \leq \omega(h).$$

Alors il existe une sous-suite extraite $f_{n(k)}$ qui converge dans $\mathcal{C}^0(K;\mathbb{R})$ (la famille f_n est donc relativement compacte).

Typiquement, ce théorème s'applique aux familles uniformément lipschitziennes ou höldériennes.

Remarque 5.2 *Les suites de fonctions suivantes ne sont pas relativement compactes*
(i) sur $\mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x-n)$ (avec $f \in C_b$) est bien "équi-uniformément continue", bornée, mais sur un ensemble K non-compact.
(ii) sur $[0,1]$, $f_n(x) = n$ est bien "équi-uniformément continue", mais pas bornée.

Preuve.
(i) Construisons une sous-suite convergeant en beaucoup de points. Les compacts métriques étant séparables, il existe une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dense dans K. Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée, $\big(f_n(x_1)\big)$ est bornée et on peut donc extraire une sous-suite $n_1(k)$ telle que

$$f_{n_1(k)}(x_1) \to f(x_1) \qquad k \to \infty.$$

Posons $g_1 = f_{n_1(1)}$. Puis on peut extraire de $n_1(k)$ une sous-suite $n_2(k)$ telle que

$$f_{n_2(k)}(x_2) \to f(x_2) \qquad k \to \infty.$$

Posons $g_2 = f_{n_2(2)}$. Ainsi de suite, on construit par extractions successives $n_p(k)$, à partir de $n_p(1) = n_{p-1}(p-1)$, telle que

$$f_{n_p(k)}(x_p) \to f(x_p) \qquad k \to \infty.$$

et on pose $g_p = f_{n_p(p)}$. On a donc

$$g_k(x_p) \to f(x_p) \qquad k \to \infty, \qquad \forall p \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

(ii) Montrons que f est continue. Comme

$$|f_n(x_p) - f_n(x_q)| \leq \omega(d_K(x_p, x_q)), \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

ceci est aussi vrai pour les g_k et passant à la limite on obtient que

$$|f(x_p) - f(x_q)| \leq \omega(d_K(x_p, x_q)).$$

En d'autres termes f est uniformément continue sur un sous-ensemble dense de K, comme $\mathbb{R}$ est complet, f se prolonge de façon unique à K en une fonction continue que l'on notera encore f (Théorème 4.3).
(iii) Montrons enfin la convergence uniforme de g_n vers f. Soit $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tel que $\omega(r) \leq \varepsilon$ et considérons un recouvrement $K = \bigcup_{i=1}^{I} B(x_i, r)$ (en renumérotant les x_p). On calcule alors, en choisissant pour chaque x un point x_i tel que $x \in B(x_i, r)$,

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - f(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(x_i)| + |g_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\
&\leq 2\omega(d(x, x_i)) + |g_n(x_i) - f(x_i)| \\
&\leq 2\omega(d(x, x_i)) + \max_{1\leq j\leq I} |g_n(x_j) - f(x_j)| \\
&\leq 2\omega(r) + \max_{1\leq j\leq I} |g_n(x_j) - f(x_j)| \\
&\leq 2\varepsilon + \max_{1\leq j\leq I} |g_n(x_j) - f(x_j)|.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $g_n(x_j) \to f(x_j)$ pour tout $j = 1, .., I$, on peut choisir n assez grand tel que $\max_{1\leq j\leq I} |g_n(x_j) - f(x_j)| \leq \varepsilon$. On obtient alors $|g_n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$ et ce pour tout $x \in K$. On a donc bien démontré la convergence uniforme. □

5.7.2 Compacité des fonctions continues à valeurs dans un espace métrique

En fait il existe de nombreuses versions plus générales du Théorème d'Ascoli, nous en donnons une ici à titre d'exemple. On se donne un espace topologique $(K, \mathcal{T}_K)$ et un espace métrique (F, d_F). On considère l'ensemble $\mathcal{C}_b^0(K; F)$ des fonctions continues bornées de K dans F. Il s'agit d'un espace métrique muni de la distance de la convergence uniforme

$$d_{\mathcal{C}_b^0}(f, g) = \sup_{x\in K} d(f(x), g(x)).$$

Théorème 5.21 *(Ascoli) Soit une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^0(K; F)$, on suppose que*
(i) l'espace K est compact,
(ii) pour tout $x \in K$, l'ensemble $\{f(x);\ f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans F,
(iii) pour tout point $a \in K$, cette famille est équicontinue au point a, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \omega_a \in \mathcal{T}_K, \quad d(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall x \in \omega_a,\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

Alors la famille $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(K;F)$.

Si K est compact et F complet, la réciproque est aussi vraie. Toute partie relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(K;F)$ vérifie (ii) et (iii).

Preuve. Les étapes de la preuve suivent celles du Theorème 5.20.
(i) Comme K n'est pas un espace métrique, il faut construire la famille $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Pour cela nous utilisons l'hypothèse (iii). Nous savons que

$$\forall k,\ \forall a\in K,\quad \exists\omega_a\in\mathcal{T}_K \text{ t.q. } a\in\omega_a \quad \text{et} \quad d(f(y),f(a))<\frac{1}{k}\quad \forall y\in\omega_a.$$

Du recouvrement de K par les ouverts ω_a on peut extraire un recouvrement fini

$$K=\bigcup_{1\le i\le I(k)}\omega_i^k,\qquad \omega_i^k=\omega_{a_i^k}.$$

On pose alors $\{(x_p)_{p\in\mathbb{N}}\}=\{(a_i^k)_{1\le i\le i(k),\,k\in\mathbb{N}}\}$ et comme ci-dessus on construit par extractions successives une sous-suite g_n telle que

$$g_n(x_p)\longrightarrow f(x_p),\quad n\to\infty,\quad \forall p\in\mathbb{N}.$$

Notons toutefois que la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément dense dans K.
(ii) Montrons que pour tout $y\in K$, $g_n(y)$ converge vers une limite unique $f(y)$. Comme $Adh\{g_n(y)\}$ est compact, si cette limite n'était pas unique, alors il existerait deux sous-suites convergent vers $f(y)$ et $g(y)$ respectivement. Mais pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\exists i$, tel que $y\in\omega_i^k$ tel que

$$d(g_n(y),g_n(x_i^k))\le\frac{1}{k},$$

donc

$$d(g(y),g(x_i^k))\le\frac{1}{k}\qquad \text{et}\qquad d(f(y),g(x_i^k))\le\frac{1}{k}.$$

Ainsi on obtient $\forall k$, $d(f(y),g(y))\le\frac{2}{k}$, donc $f(y)=g(y)$. Ceci conclut bien que toute la suite $(g_n(y))$ converge.
(iii) Cette limite f est bien continue car pour tout point y et $k>0$, soit un point a_i^k tel que $y\in\omega_i^k$. Alors pour tout $z\in\omega_i^k$ on a

$$d(g_n(z),g_n(y))\le d(g_n(z),g_n(a_i^k))+d(g_n(z),g_n(a_i^k))\le\frac{2}{k},$$

donc, passant à la limite,

$$d(g(z),g(y))\le\frac{2}{k}\qquad \forall z\in\omega_i^k.$$

La continuité au point y est donc démontrée.
(iv) La convergence uniforme se démontre comme ci-dessus.

(Réciproque)
(i) Si la famille $\mathcal{F}$ est relativement compacte, alors pour tout $x \in E$, $\{f(x)\}$ est relativement compacte dans F (toute suite admet une sous-suite convergente car une sous-suite (g_{n_k}) qui converge uniformément converge au point x).
(ii) Il existe $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{F}$ tels que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1,\cdot,m} B_{c^o}(f_i, \varepsilon),$$

i.e.

$$\forall f \quad \exists f_i \quad \text{ t.q. } \quad d(f_i(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in K.$$

Alors pour $a \in K$, il existe un ouvert ω contenant a tel que $\forall x \in \omega$

$$d(f_i(x), f_i(a)) \leq \varepsilon$$

par continuité des $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$. On obtient alors pour $x \in \omega$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(a)) + d(f_i(a), f(a)) \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}$ est équicontinue au point a. $\square$

Chapitre 6

Espaces connexes

6.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 6.1 *Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit non-connexe si l'une des propriétés équivalentes suivantes est réalisée*
(i) il existe un sous-ensemble de E, ni vide ni E lui-même, à la fois ouvert et fermé,
(ii) il existe des partie complémentaires de E toutes deux ouvertes non-vides (ou fermées).

L'espace E est dit connexe si on ne peut trouver de tels sous-ensembles. Un sous-ensemble de E est dit connexe, si pour la topologie induite il est connexe.

Cette équivalence est bien claire!

Théorème 6.1 *L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est connexe, les sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Preuve. Soit E un sous-ensemble connexe (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$ et $x < y$ deux points de E. Par l'absurde, si l'intervalle $[x, y]$ n'est pas inclus dans E alors il existe $x < z < y$ avec $z \notin E$. Clairement $E \cap]-\infty, z[$ et $E \cap]z, \infty[$ sont alors des ouverts complémentaires dans E donc E n'est pas connexe. $\square$

Exemple De nombreux espaces ne sont pas connexes: les réunions de deux ouverts disjoints dans un espace topologique, $\mathbb{Q}$.

Cette notion est à l'origine de nombreuses notions topologiques mais aussi d'analyse. Par exemple, considérons une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$. Si sa différentielle est nulle, la fonction est constante (c'est faux si l'ouvert n'est pas connexe).

Théorème 6.2 (Théorème des valeurs intermédiaires) *L'image continue d'un espace connexe est connexe: soit $f : (E, \mathcal{T}_E) \to (F, \mathcal{T}_F)$, continue, alors $f(E)$ est connexe.*

Preuve. Écrivons $f(E) = \omega_1 \cup \omega_2$ avec ω_i des ouverts non-vides disjoints. Alors $E = f^{-1}(\omega_1) \cup f^{-1}(\omega_2)$ avec $f^{-1}(\omega_i)$ des ouverts non-vides disjoints, ce qui est impossible. Donc $f(E)$ est connexe. Par contre F lui-même peut être non-connexe. $\square$

Corollaire 6.1 *En particulier pour des applications à valeurs réelles, l'image d'un connexe est un intervalle.*

Corollaire 6.2 *Tout espace quotient (muni de sa topologie quotient) d'un espace connexe est connexe. Tout produit d'espace connexes est connexe.*

La réciproque suivante du Théorème 6.2 a lieu

Théorème 6.3 *Si l'image de toute fonction continue d'un espace topologique E dans $\mathbb{R}$ est un intervalle, alors E est connexe.*

Preuve. Par l'absurde, sinon on aurait $E = \omega_1 \cup \omega_2$ avec ω_i ouverts non-vides disjoints. L'application qui prend la valeur 0 sur ω_1 et 1 sur ω_2 est bien continue mais $\{0, 1\}$ n'est pas connnexe. $\square$

Voici enfin un résultat topologique général

Théorème 6.4 *Soit A un sous-ensemble connexe de $(E, \mathcal{T})$, alors son adhérence $\bar{A}$ est également connexe.*

Mais l'intérieur d'un sous-ensemble connexe n'est pas toujours connexe (prendre deux boules fermées de $\mathbb{R}^d$ se touchant en un seul point).

Preuve. Écrivons $\bar{A} = F \cup G$ avec F et G fermés disjoints de $\bar{A}$. Alors $A = (A \cap F) \cup (A \cap G)$ avec $A \cap F$ et $A \cap G$ fermés disjoints de A. Donc l'un deux est vide, disons $A \cap G$. Donc $A = A \cap F$ ou encore $A \subset F$, donc $\bar{A} \subset \bar{F} = F$, donc G est vide. $\square$

6.2 Espaces connexes par arcs

Définition 6.2 *Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit connexe par arcs si pour tout x, $y \in E$, il existe une application continue $z(\cdot) \in \mathcal{C}^0([0, 1]; E)$ telle que $z(0) = x$, $z(1) = y$. Une telle application est appelée chemin (ou arc). On dit qu'il est fermé si $z(0) = z(1)$, on définit alors une application $z \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^1; E)$.*

Exemple Tout sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique est connexe par arcs.

Exercice Montrer que, dans un espace topologique, on définit une relation d'équivalence par $x\mathcal{R}y$ s'il existe un chemin joignant x et y.

Théorème 6.5 *Tout espace connexe par arcs est connexe.*

La réciproque est fausse, même sur $\mathbb{R}^2$. Considérer l'ensemble C formé de l'union
-) des droites $\{x = 1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$,
-) des segments $x = n,\ \frac{1}{n+1} \leq y \leq \frac{1}{n}$.
Il est connexe par arcs, donc connexe. D'aprés le Théorème 6.4, son adhérence $\bar{C} = C \cup \{x = 0\}$ est donc connexe, mais on vérifie facilement qu'elle n'est pas connexe par arcs.

Preuve. Par l'absurde, supposons que E n'est pas connexe mais connexe par arcs. Alors $E = \omega_1 \cup \omega_2$ avec ω_i ouverts non-vides disjoints. Soient $x \in \omega_1$ et $y \in \omega_2$ et $z(\cdot)$ un chemin les joignant. Alors $Im(z) \cap \omega_1$ et $Im(z) \cap \omega_2$ sont un recouvrement de $Im(z)$ par deux ouverts disjoints de $Im(z)$. Ceci est une contradiction avec le Théorème 6.2 qui montre que $Im(z)$ est connexe car $[0, 1]$ est connexe. Donc E est connexe. $\square$

Théorème 6.6 *(Théorème du passage en douane) Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset E$. Tout chemin joignant $Int(A)$ à $Int(A^C) = (\bar{A})^C$ rencontre sa frontière $Fr(A) = \bar{A} \backslash Int(A)$.*

On rapelle (Section 2.3.5) que $E = Int(A) \cup Fr(A) \cup Ext(A)$ avec l'extérieur de A définit par $Ext(A) = (\bar{A})^C$.
Preuve. Soit $F = Im(z)$ l'image d'un tel chemin, on sait que F est connexe comme image continue d'un ensemble connexe. Elle rencontre $Int(A)$ et $Ext(A)$ qui sont des ouverts disjoints (non-vides dans le cas présent). Si elle ne rencontrait pas $Fr(A)$, on aurait $F = \big(F \cap Int(A)\big) \cup \big(F \cap Ext(A)\big)$, une réunion disjointe de deux ouverts non-vides. Ce n'est pas possible pour F connexe. $\square$

Théorème 6.7 *Soit A_i des sous-ensembles connexes de $(E, \mathcal{T})$ deux à deux d'intersection non vide, alors $A = \cup_i A_i$ est connexe.*

Ceci est encore vrai en remplaçant 'connexe' par 'connexe par arcs'.

Preuve. Écrivons $A = F \cup G$ avec F et G ouverts disjoints; il faut montrer que l'un deux est vide.

Chaque A_i peut s'écrire $A_i = (A_i \cap F) \cup (A_i \cap G)$, réunion d'ouverts disjoints (pour la topologie induite). L'un d'eux est donc vide car A_i est connexe, disons $A_i \cap G = \emptyset$, ou encore $A_i = A_i \cap F$. Mais alors pour tout $j \in I$, on a également $A_j \cap G = \emptyset$ et $A_j = A_j \cap F$ (par intersection non-vide). Donc on a bien, par réunion, $G = A \cap G = \emptyset$. $\square$

6.3 Composantes connexes

En s'appuyant sur le Théorème 6.7, on peut énoncer la

Définition 6.3 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in E$. La réunion des sous-ensembles connexes contenant x est connexe. On l'appelle composante connexe de x.*

Notons que l'on pourrait définir également la notion de 'composante connexe par arcs'.

Théorème 6.8 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique alors*
(i) les composantes connexes de E sont fermées,
(ii) les composantes connexes sont disjointes,

E est donc la réunion disjointe de ses composantes connexes.

Preuve. La propriété (i) découle du Théorème 6.4, la propriété (ii) découle du Théorème 6.7. □

Définition 6.4 *Un espace topologique est dit complètement discontinu si ses composantes connexes sont réduites à des points.*

Dans $E = \{1/n\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$, chaque point constitue sa propre composante connexe, celle réduite à $\{0\}$ n'est pas ouverte. Dans $\mathbb{Q}$, tous les points forment leur propre composantes connexes qui ne sont pas ouvertes. Ce sont des exemples d'ensembles complètement discontinus mais pas discrets (pas munis de la topologie discrète).

Sur $\mathbb{R}$ on a une caractérisation complète des ouverts grâce à leurs composantes connexes

Théorème 6.9 *Tout ouvert non-vide de $\mathbb{R}$ est la réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts.*

Théorème 6.10 *Soient $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'espaces topologiques non vides. Leur produit (muni de la topologie produit) est connexe si et seulement si chacun des E_i est connexe.*

On peut relier ce résultat au problème de l'écriture décimale des réels. On sait que celle-ci n'est pas unique puisque $1 = 0,9999...$ En fait il ne peut y avoir de système d'écriture unique en effet

Corollaire 6.3 *L'écriture décimale définit une surjection continue de $\{0, 1, ..., 9\}^{\mathbb{N}}$ dans $[0, 1]$, mais il ne peut y avoir de bijection continue.*

Preuve. Si on écrit un réel $x \in [0, 1]$ comme $x = (x^0, x^1, x^2, ...)$, la continuité signifie simplement qu'une suite x_n converge vers x est équivalent à x_n^k converge vers x^k pour chaque $k \in \mathbb{N}$ ce qui est bien le cas pour l'écriture décimale.

Grâce au théorème de Tychonoff 5.7, $\{0, 1, ..., 9\}^{\mathbb{N}}$ est compact. Par compacité, l'inverse d'une telle bijection serait continue. Ceci est impossible car $\{0, 1, ..., 9\}^{\mathbb{N}}$ est un ensemble discret donc complètement discontinu mais $[0, 1]$ est connexe. □

Théorème 6.11 *Soit (E,d) un espace métrique. Supposons que pour chaque point $x \in E$, les boules $B(x,r)$, pour r assez petit, sont connexes. Alors les composantes connexes de E sont à la fois ouvertes et fermées,*

C'est le cas pour un ouvert E d'un espace vectoriel normé.
Plus généralement ce résultat est vrai dans les espaces vérifiant la

Définition 6.5 *Un espace topologique $(E,\mathcal{T})$ est dit localement connexe (resp. par arcs), si tout point possède une base de voisinages connexes (resp. par arcs).*

Preuve. (i) Soit C une composante connexe et $y \in C$. Alors, toute boule connexe (ou tout voisinage connexe) B de y vérifie que $B \subset C$ (par le Théorème 6.7 car $y \in C$ et $y \in B$ et C est le plus grand connexe contenant y). Donc C est ouverte. $\square$

Notons enfin qu'un espace topologique connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

6.4 Homéomorphismes et connexité

Rappelons qu'il existe une application continue surjective de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$ (le chemin de Péano, voir la construction dans [24] par exemple). Mais une telle application ne peut être bijective (plusieurs points de $[0,1]$ doivent avoir la même image) sinon ce serait un homéomorphisme d'aprés le Corollaire 5.3, ce qui n'est pas possible. En effet, on a le résultat suivant proche:

Théorème 6.12 *(i) $[0,1]$ et $[0,1]^2$ ne sont pas homéomorphes,*
(ii) les sphères $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^2$ ne sont pas homéomorphes,
(iii) le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et la sphère $\mathbb{S}^2$ ne sont pas homéomorphes,
(iv) $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes pour $n \neq m$,
(v) La sphère et la boule de $\mathbb{R}^d$ ne sont pas homéomorphes.

Preuve. (i) Si on retire un point intérieur à l'intervalle $[0,1]$, il n'est plus connexe, par contre $[0,1]^2$ privé de l'image de ce point reste connexe (il est facile de connecter deux points par un chemin sans passer par cette image).
(ii) De même, $\mathbb{S}^2$ privé de deux points reste connexe mais pas $\mathbb{S}^1$ privé de deux points.
(iii) On peut montrer que $\mathbb{S}^2$ privé d'une courbe fermée (non-réduite à un point) n'est plus connexe (Théorème de Jordan) mais $\mathbb{T}^2$ privé de la courbe $z = \{1\} \times \mathbb{S}^1$ n'est plus connexe. $\square$

Nous ne complétons pas cette démonstration car on voit que des notions supplémentaires sont nécessaires pour aborder ces questions (homotopie, homologie... voir [19]). Notons par exemple la notion suivante:

Définition 6.6 *Un espace topologique $(E,\mathcal{T})$ est dit simplement connexe s'il est connexe par arcs et si tout chemin fermé (tel que $z(0) = z(1)$) peut se déformer continument en un point, ou encore toute application continue de $\mathbb{S}^1$ dans E se prolonge en une application continue de $B^2(0,1)$ dans E.*

Dans un espace vectoriel topologique, un ensemble convexe C est toujours simplement connexe. En effet, on peut toujours supposer que $0 \in C$, le chemin fermé $z(s)$ se prolonge alors en $\widetilde{z}(s,r) = rz(s) \in C$. En fait il suffit que C soit étoilé i.e. si $x \in C$, $rx \in C$ pour tout $r \in [0,1]$.

Dans $\mathbb{R}^2$, la couronne $B(0,2)\backslash\bar{B}(0,1)$, ou la sphère $\mathbb{S}^1$ ne sont pas simplement connexes.

Définition 6.7 *Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est appelé variété topologique de dimension d si tout point possède un voisinage homéomorphe à $\overline{B}_d$. En général on suppose aussi E métrique séparable.*

Un théorème de Brouwer montre qu'un tel entier d est unique.

Perelman a démontré la fameuse

Conjecture de Poincaré Toute variété topologique de dimension 3 compacte et simplement connexe est homéomorphe à $\mathbb{S}^3$.

Chapitre 7

Applications linéaires dans les espaces vectoriels normés

On consid ère toujours dans ce chapitre des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$.

7.1 Applications linéaires continues

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On définit

$$\mathcal{L}(E;F) = \Big\{L : E \to F, \ \text{linéaire et continue}\Big\}. \tag{7.1}$$

Théorème 7.1 *Soit L une application linéaire de $E \to F$, alors L est continue si et seulement si il existe une constante C telle que*

$$\|L(x)\|_F \leq C\|x\|_E \,. \tag{7.2}$$

La meilleure constante C est notée

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E;F)} := \sup_{x\in E,\, x\neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|L(x)\|_F \,.$$

Preuve. D'après le Théorème 3.2, lorsque L est continue, $L^{-1}\Big(B_F(0,1)\Big)$ est un ouvert contenant l'origine, donc une boule $B_E(0,r)$ avec $r > 0$ (on note toujours $B_E(0,r)$ la boule ouverte de E de centre l'origine et de rayon r). Il s'ensuit que $\forall x \in E$, tel que $\|x\|_E < r$, alors $\|L(x)\|_F < 1$. On en déduit que la constante $C = 1/r$ convient.

La réciproque est claire car une fonction lipschitzienne est continue. $\square$

Théorème 7.2 *Cette quantité $\|L\|_{\mathcal{L}(E;F)}$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E;F)$. Si F est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(E;F)$ est un Banach.*

Preuve. On laisse en exercice le fait que $\|L\|_{\mathcal{L}(E;F)}$ définit une norme et montrons que pour F Banach, $\mathcal{L}(E;F)$ est un Banach. Soit une suite de Cauchy $\|L_n - L_m\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \varepsilon$ pour $n,\ m \geq N(\varepsilon)$. Alors pour tout $x \in E$,

$$\|L_n(x) - L_m(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E, \quad \forall n,\ m \geq N(\varepsilon),$$

ce qui prouve que $L_n(x)$ est de Cauchy et converge donc vers un vecteur $L(x) \in F$. On vérifie sans peine que L est une application linéaire et, de l'inégalité précédente on déduit , passant à la limite quand $m \to \infty$, que

$$\|L_n(x) - L(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E \qquad \forall x \in E.$$

En d'autres termes $\|L_n - L\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \varepsilon$ et L est donc continu et $\|L_n - L\|_{\mathcal{L}(E;F)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Théorème 7.3 *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés et $L_1 \in \mathcal{L}(E;F)$, $L_2 \in \mathcal{L}(F;G)$ alors*

$$\|L_2 \circ L_1\|_{\mathcal{L}(E;G)} \leq \|L_2\|_{\mathcal{L}(F;G)}\ \|L_1\|_{\mathcal{L}(E;F)}.$$

7.2 Dual topologique, théorème de Hahn-Banach

Définition 7.1 *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique, et on note E' l'espace de Banach des formes linéaires continues sur E, c'est-à-dire $E' = \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$. Il est muni de la norme*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E, \|x\|_E \leq 1} f(x) = \sup_{x\in E, \|x\|_E = 1} f(x) = \sup_{x \in E, x\neq 0} \frac{f(x)}{\|x\|_E}.$$

On note en général $f(x) = \langle f, x\rangle_{E',E}$.

Théorème 7.4 *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un vectoriel normé. Pour tout $x \in E$ on a*

$$\|x\|_E = \sup_{f\in E', \|f\|_{E'} \leq 1} \langle f, x\rangle_{E',E} = \max_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} \langle f, x\rangle_{E',E}.$$

Ce Théorème est une conséquence du

Théorème 7.5 *(Théorème de Hahn-Banach) Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un vectoriel normé et $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant*

$$\begin{aligned} &p(\lambda x) = \lambda p(x), \qquad \forall x \in E,\ \forall \lambda > 0,\\ &p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad \forall x,\ y \in E. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Soit aussi G un sous-espace vectoriel de E et $g : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant

$$g(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in G.$$

Alors g se prolonge en une forme linéaire f sur E telle que

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E, \qquad f(x) = g(x) \quad \forall x \in G.$$

Nous renvoyons à [4, 24] pour une démonstration de ce résultat qui s'appuie sur le Lemme de Zorn 5.3. Le Théorème de Hahn-Banach a également de nombreuses applications à l'étude des fonctions convexes, on renvoie à [4] pour ce point.

Démonstration du Théorème 7.4. Soit $x_0 \in E$, il suffit de démontrer qu'il existe $f_0 \in E'$ telle que $\|f_0\|_{E'} \leq \|x_0\|_E$ et $\langle f_0, x_0\rangle_{E',E} = \|x_0\|_E^2$.

Pour cela on choisit $p(x) = \|x_0\|_E \ \|x\|_E$, $G = \mathbb{R}.x_0$ et $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$. Cette forme linéaire g se prolonge donc à E en une forme linéaire vérifiant les deux propriétés

$$f_0(x) \leq p(x) = \|x_0\| \ \|x\| \quad \Longrightarrow \quad \|f_0\|_{E'} \leq \|x_0\|_E,$$

$$f_0 = g \quad sur \quad \mathbb{R}.x_0 \quad \Longrightarrow \quad \langle f_0, x_0\rangle_{E',E} = \|x_0\|_E^2,$$

et le résultat est démontré. □

Exemple L'espace de Banach des mesures de Radon bornées sur $\mathbb{R}^d$ est le dual du Banach des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini $M^1(\mathbb{R}^d) = \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)'$. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} d|\mu(x)| = \sup_{\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d);\ \|\varphi\|_\infty \leq 1} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\ d\mu(x).$$

Puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$, on a aussi (exercice)

$$\int_{\mathbb{R}^d} d|\mu(x)| = \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d);\ \|\varphi\|_\infty \leq 1} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\ d\mu(x).$$

Exemple On peut utiliser le résultat précédent pour des fonctions $L^1(\mathbb{R}^d)$. On obtient

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d);\ \|\varphi\|_\infty \leq 1} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\ f(x)dx.$$

On rappelle toutefois que $L^1(\mathbb{R}^d)$ n'est pas un dual.

Exemple Par contre pour tout $1 < p \leq \infty$, on a $L^p(\mathbb{R}^d) = \left(L^{p'}(\mathbb{R}^d)\right)'$ avec p' l'exposant conjugué de p c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Donc, toujours par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, on obtient (voir [4])

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \sup_{\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^d);\ \|\varphi\|_{p'} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\ f(x)dx \\ &= \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d);\ \|\varphi\|_{p'} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\ f(x)dx. \end{aligned}$$

7.3 Espaces vectoriels séparables

Voici une application utile du Théorème de Hahn-Banach.

Corollaire 7.1 *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel tel que $\bar{F} \neq E$, alors il existe une forme linéaire $f \in E' \backslash \{0\}$ telle que $\langle f, x \rangle = 0$ pour tout $x \in \bar{F}$.*

Preuve. On choisit $p(x) = d(x, \bar{F})$ (on laisse en exercice le soin de vérifier les hypothèses sur p dans le théorème de Hahn-Banach 7.5). On choisit un point $x_0 \notin \bar{F}$ et sur $G = \mathbb{R}.x_0$ la forme linéaire $g(tx_0) = td(x_0, \bar{F})$. On a bien $g(tx_0) \leq p(tx_0)$ et il existe donc une forme linéaire $f \in E'$ telle que

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E, \qquad f(tx_0) = g(tx_0) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Cette forme linéaire convient bien. $\square$

Théorème 7.6 *Soit E un espace vectoriel normé tel que E' soit séparable alors E est séparable.*

Notons que la réciproque n'est pas vraie puisque pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ on a $L^\infty(\Omega) = L^1(\Omega)'$ qui n'est pas séparable mais $L^1(\Omega)$ est séparable.

Preuve. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense de E'. Par définition, on a

$$\|f_n\|_{E'} = \sup_{x \in E,\ \|x\|=1} \langle f_n, x \rangle_{E',E},$$

et il existe donc $x_n \in E$ tel que

$$\|x_n\|_E = 1, \qquad \langle f_n, x_n \rangle_{E',E} \geq \frac{1}{2} \|f_n\|_{E'}.$$

On appelle $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ et il suffit de montrer que l'ensemble F des combinaisons linéaires finies de D à coefficients rationnels est dense dans E car cet ensemble est dénombrable. Comme cet ensemble est lui-même dense dans l'ensemble des combinaisons linéaires finies de D à coefficients réels, il suffit de montrer que cet espace vectoriel F est dense.

En appliquant le Corollaire 7.1, soit $f \in E'$ telle que $\langle f, x_n \rangle_{E',E} = 0\ \forall x_n \in D$ (en fait on pourrait choisir $x \in F$ à la place de $x_n \in D$), il suffit de montrer que ceci implique $f = 0$. Pour cela on choisit, par densité, f_n telle que $\|f - f_n\|_{E'} \leq \varepsilon$ et on a

$$\frac{1}{2} \|f_n\|_{E'} \leq \langle f_n, x_n \rangle_{E',E} = \langle f_n - f, x_n \rangle_{E',E} \leq \varepsilon.$$

On en déduit que $\|f\|_{E'} \leq \|f - f_n\|_{E'} + \|f_n\|_{E'} \leq \varepsilon + 2\varepsilon$ pour tout ε, donc que $f = 0$. $\square$

7.4 Théorème de Banach-Steinhaus

Le Théorème de Banach-Steinhaus est une très belle application du Théorème de Baire (voir la Section 4.7). On traite donc maintenant d'espaces de Banach et non de simples e.v.n.

Théorème 7.7 *(Banach-Steinhaus) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. Soit $(L_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues $L_i \in \mathcal{L}(E;F)$, $\forall i \in I$. On suppose que*

$$\sup_{i\in I} \|L_i(x)\|_F < \infty \qquad \forall x \in E,$$

alors il existe $C > 0$ telle que

$$\sup_{i\in I} \|L_i\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq C, \quad \textit{ou encore} \quad \|L_i(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

En anglais on parle de "uniform boundedness principle".

Preuve. Considérons les ensembles

$$A_n = \bigcap_{i\in I} \{x \in E; \|L_i(x)\|_F \leq n\} = \{x \in E;\ \forall i \in I,\ \|L_i(x)\|_F \leq n\}.$$

Ce sont des fermés de E et on a, grâce à l'hypothèse du théorème, que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E.$$

Il résulte du Théorème de Baire (sous la forme qui suit le corollaire 4.4) que $Int(A_{n_0}) \neq \emptyset$ pour un certain n_0. Il existe donc une boule ouverte $B(x_0, r)$ incluse dans A_{n_0} :

$$\|L_i(x_0 + rz)\|_F \leq n_0 \qquad \forall i \in I, \quad \forall z \in E,\ \|z\|_E \leq 1.$$

On en déduit que

$$\|L_i(z)\|_F \leq \frac{n_0 + \|L_i(x_0)\|_F}{r}, \qquad \forall z \in E,\ \|z\|_E \leq 1.$$

Ce signifie bien que

$$\|L_i\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \frac{n_0 + \|L_i(x_0)\|_F}{r}.$$

Et le résultat est bien démontré. $\square$

À titre d'exemple, donnons une application à la théorie de l'approximation. On rappelle que pour une fonction $f \in E = \mathcal{C}^0([0,1])$, son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_i \in [0,1]$ (distincts et rangés en ordre croissant) pour $i = 0, 1, 2 \ldots n$, est défini par

$$L_n[f](x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ l_j^n(x).$$

C'est le seul polynôme de degré n réalisant $L_n(x_j) = f(x_j)$ pour $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Ceci est possible pour

$$l_j^n(x) = \frac{\prod_{k\neq j,\, k=0}^{n} (x - x_k)}{\prod_{k\neq j,\, k=0}^{n} (x_j - x_k)}.$$

Cette approximation ne converge pas en général vers $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$:

Théorème 7.8 *Quel que soient les points $(x_i^n)_{i\in\{1,\dots,n\}} \in [0,1]$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $L_n[f](x)$ ne converge pas vers f dans $\mathcal{C}^0([0,1])$.*

Ce résultat est une conséquence, en utilisant l'énoncé contraposé du Théorème de Banach-Steinhaus, du :

Théorème 7.9 *L'application linéaire de $\mathcal{C}^0([0,1])$ dans lui-même définie par $f \mapsto L_n[f](x)$ vérifie*

$$\|L_n[f]\|_{\mathcal{L}(E;E)} = \Lambda_n, \qquad \|Id - L_n[f]\|_{\mathcal{L}(E;E)} = 1 + \Lambda_n,$$

et

$$\Lambda_n = \Big\| \sum_{i=0}^{n} |l_j^n(x)| \Big\|_{L^\infty(0,1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Les points de Tchebyshev $x_i = \frac{1}{2}[1 - \cos(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2})]$ donnent une constante équivalente à la meilleure valeur de Λ_n, $\Lambda_{n,Tchebyshev} \approx \frac{2}{\pi}\ln(n)$. Les points équidistribués sont bien plus mauvais $\Lambda_{n,equi} \approx \frac{2^{n+1}}{en\ln(n)}$.

7.5 Le théorème de continuité de l'inverse de Banach

On appelle isomorphismes de E dans F le sous-ensemble des applications linéaires continues bijectives d'inverse continue. En fait on verra par la suite que les applications linéaires continues bijectives ont toujours un inverse continu, Théorème de Banach 4.4 :

$$Isom(E;F) = \Big\{ L \in \mathcal{L}(E;F) \quad t.q. \quad L \text{ est bijective et } L^{-1} \in \mathcal{L}(F;E) \Big\}.$$

Théorème 7.10 *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. Alors le sous-ensemble $Isom(E;F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E;F)$.*

Preuve. Soit $L \in Isom(E;F)$. Nous devons montrer que pour $\|M\|_{\mathcal{L}(E;F)}$ assez petit alors $L + M$ est inversible. Ceci se fait en deux étapes.
(i) (Réduction à $\mathcal{L}(E;E)$.) On pose

$$L + M = L \circ (Id_{E\to E} + L^{-1} \circ M),$$

et, avec $N = -L^{-1} \circ M \in \mathcal{L}(E;E)$, il suffit donc de montrer que $Id - N$ est inversible pour $\|N\|_{\mathcal{L}(E;E)} < 1$.
(ii) Pour $N \in \mathcal{L}(E;E)$, $\|N\|_{\mathcal{L}(E;E)} < 1$, on pose

$$J_n = Id + N + N \circ N + \ldots + N^n.$$

Comme $\|N^n\|_{\mathcal{L}(E;E)} < \big(\|N\|_{\mathcal{L}(E;E)}\big)^n$, cette série converge normalement (voir la section 4.6) et on pose

$$J = Id + N + N \circ N + \ldots + N^n + \ldots \in \mathcal{L}(E;E).$$

On a pour tout $n > 0$

$$(Id-N)\circ(Id+N+N\circ N+\ldots+N^n) = (Id+N+N\circ N+\ldots+N^n)\circ(Id-N) = Id-N^{n+1}.$$

Comme $\|N^{n+1}\|_{\mathcal{L}(E;E)} \le \big(\|N\|_{\mathcal{L}(E;E)}\big)^{n+1} \to 0$, passant à la limite, on en déduit que

$$(I-N)^{-1} = J.$$

□

Théorème 7.11 *(de continuité de l'inverse de Banach) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $L \in \mathcal{L}(E;F)$. Si L est bijective alors $L \in Isom(E;F)$, i.e., L^{-1} est continue.*

Notons l'analogie avec le résultat du Corollaire 5.3 concernant la continuité de l'inverse sur des compacts.

Exemple Soit E une espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Supposons que E soit un espace de Banach pour ces deux normes et que $\|\cdot\|_1 \le C\|\cdot\|_2$, alors on a aussi $\|\cdot\|_2 \le C'\|\cdot\|_1$. En effet, la première inégalité signifie que $Id : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$ est continue. Étant bijective, l'identité est donc d'inverse continue, ce qui est exprimé dans la seconde identité.

Ce résultat est lui-même une conséquence du

Théorème 7.12 *(Théorème de l'application ouverte) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $L \in \mathcal{L}(E;F)$. Si L est surjective alors il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$B_F(0,c) \subset L\big(B_E(0,1)\big).$$

Exercice Montrer que cet énoncé est équivalent à: l'image par L de tout ouvert de E est un ouvert de F. (Ceci explique le nom de ce théorème).

Preuve du Théorème 7.11. Grâce au théorème 7.10, pour tout $x \in E$ tel que $\|L(x)\| < c$, alors $\|x\| \le 1$. Quitte à changer x en $x/\|x\|$, on en déduit que

$$\|x\| \le \frac{1}{c}\|L(x)\| \qquad \forall x \in E.$$

Ceci signifie bien que L^{-1} est continue. $\square$

Preuve du Théorème 7.10.
(i) On montre que sous l'hypothèse du théorème, il existe $c > 0$ telle que

$$B_F(0, 2c) \subset \overline{L\big(B_E(0,1)\big)}. \tag{7.4}$$

On pose $A_n = n\overline{L\big(B_E(0,1)\big)}$. Puisque L est surjectif, on a $\bigcup_{n=1}^{\infty} = F$. Le Théorème de Baire montre qu'il existe n_0 tel que $Int(A_{n_0}) \neq \emptyset$ et donc aussi

$$Int[\overline{L\big(B_E(0,1)\big)}] \neq \emptyset.$$

On considère alors $y_0 \in F$ et $c > 0$ tels que

$$B(y_0, 4c) \subset \overline{L\big(B_E(0,1)\big)}.$$

En particulier $y_0 \in \overline{L\big(B_E(0,1)\big)}$ et par conséquent $-y_0 \in \overline{L\big(B_E(0,1)\big)}$. Par addition

$$B(0, 4c) \subset \overline{L\big(B_E(0,1)\big)} + \overline{L\big(B_E(0,1)\big)} = 2\overline{L\big(B_E(0,1)\big)},$$

(par convexité de $\overline{L\big(B_E(0,1)\big)}$). D'où le résultat (7.4).
(ii) On déduit de (7.4) que $B_F(0,c) \subset L\big(B_E(0,1)\big)$. Pour cela, fixons $y \in F$ tel que $\|y\|_F \leq c$. On cherche $x \in E$ tel que

$$\|x\| < 1, \qquad L(x) = y.$$

D'aprés (7.4), on sait que

$$\forall \varepsilon \quad \exists z \in E \quad \text{avec} \quad lz\| < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \|y - L(z)\| < \varepsilon.$$

On choisit $\varepsilon = \frac{c}{2}$ et on obtient $z_1 \in E$ tel que

$$\|z_1\| < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \|y - L(z_1)\| < \frac{c}{2}.$$

Appliquant le même procédé a $y - L(z_1)$ et $\varepsilon = \frac{c}{4}$, on obtient $z_2 \in E$ tel que

$$\|z_2\| < \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \|y - L(z_1) - L(z_2)\| < \frac{c}{4}.$$

Ainsi de suite, on construit par récurrence une suite (z_n) telle que

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \|y - L(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)\| < \frac{c}{2^n}, \quad \forall n.$$

Donc la suite $x_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ est de Cauchy. Donc elle converge vers un élément $x \in E$. On a bien

$$\|x\| \leq 1, \qquad y = L(x),$$

puisque L est continu. $\square$

Chapitre 8

Espaces de Hilbert

8.1 Définitions

On se donne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, appelé H.

Définition 8.1 *On appelle produit scalaire sur H une forme bilinéaire symétrique définie positive $B : H \times H \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que*
(i) (linéarité à droite) $B(u, \lambda v) = \lambda B(u,v)$, $B(u, v+v') = B(u,v) + B(u,v')$,
(ii) (symétrie) $B(u,v) = B(v,u)$,
(iii) (définie positive) $B(u,u) \geq 0$ et $B(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Définition-Théorème 8.1 *L'application $u \to \|u\| = \sqrt{B(u,u)}$ est une norme appelée norme associée au produit scalaire B (on parle aussi de norme hilbertienne) et on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|B(u,v)| \leq \|u\| \; \|v\|,$$

et il n'y a égalité que si u et v sont parallèles ($u = \lambda\, v$ ou bien $v = 0$).

Rappelons aussi "l'inégalité du parallélogramme" :

$$\|\frac{u+v}{2}\|^2 + \|\frac{u-v}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Rappelons aussi que le produit scalaire permet de définir une forme linéaire continue $v \mapsto B(u,v)$ (pour $u \in H$ donné), d'après les Théorèmes 7.1 et 8.1 elle est donc continue.

Preuve.
(i) (Cauchy-Schwarz) On considère le polynôme en $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|u\|^2 + \lambda^2 \|v\|^2 - 2\lambda B(u,v) = B(u - \lambda v, u - \lambda v) \geq 0, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cette condition de signe implique que son discriminant est négatif :

$$B(u,v)^2 \leq \|u\|^2 \; \|v\|^2.$$

Ceci prouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le cas d'égalité correspond au cas où ce polynôme a une racine double ($u = \lambda\, v$) ou bien au cas où $v = 0$.
(ii) (Norme) Il est bien clair que $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ et $\|\lambda u\| = |\lambda|\ \|u\|$. De l'inégalité de Cauchy-Schwarz on déduit aussi que

$$\|u+v\|^2 = B(u+v, u+v) = \|u\|^2+\|v\|^2+2B(u,v) \leq \|u\|^2+\|v\|^2+2\|u\|\ \|v\| = (\|u\|+\|v\|)^2$$

et l'inégalité triangulaire) est démontrée. □

On vérifie aisément que l'application $(u,v) \mapsto B(u,v)$ est alors continue de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 8.2 *On dit que (H, B) est un espace de Hilbert si, muni de la norme associée à la forme bilinéaire B, H est complet.*

L'hypothèse de complétude est en fait très faible. Suivant la Remarque 4.2, on peut toujours compléter un espace H muni d'un produit scalaire (il est alors dit préhilbertien). La norme "complétée" est toujours associée à un produit scalaire.

Définition 8.3 *On dit que deux espaces de Hilbert H_1, H_2 sont isomorphes si il existe une application linéaire inversible $U : H_1 \to H_2$ telle que $B_2\big(U(u), U(v)\big) = B_1(u,v)$ pour tout u, $v \in H_1$. Un tel opérateur U est dit unitaire.*

On a alors $\|u\|_1 = \|U(u)\|_2$, $\forall u \in H_1$. L'application linéaire U est donc continue et $\|U\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} = 1$ et $\|U^{-1}\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)} = 1$. Lorsque $H_1 = H_2$, on dit que U est une isométrie.

Exemple Sur $\mathbb{R}^d$, le produit scalaire est noté (x,y) ou $x \cdot y$ et il est donné par

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{d} x_i\ y_i.$$

Les matrices unitaires vérifient $U^t = U^{-1}$.

Exemple L'exemple précédent s'étend en dimension infine aux suite de carré intégrable ;

$$l^2(\mathbb{R}) = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad t.q. \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} (x_i)^2 < \infty\}.$$

Muni du produit scalaire

$$(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i\ y_i,$$

$l^2(\mathbb{R})$ est un Hilbert. Il joue un rôle important car, comme on le verra dans la Section 8.5, il s'agit d'un espace isomorphe à tous les Hilbert séparables.

Preuve. Montrons que $l^2(\mathbb{R})$ est un Hilbert. On considère une suite de Cauchy $\big((x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $l^2(\mathbb{R})$. Alors

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(x_i^n - x_i^p)^2 \le \varepsilon \qquad \textit{pour}\, n,\ p \ge N(\varepsilon).$$

En particulier, pour chaque $i \in \mathbb{N}$ la suite $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et elle converge donc vers un réel x_i. Alors on a, pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{q}(x_i^n - x_i^p)^2 \le \varepsilon \qquad \textit{pour}\, n,\ p \ge N(\varepsilon),$$

donc, passant à la limite $p \to \infty$, on trouve

$$\sum_{i=0}^{q}(x_i^n - x_i)^2 \le \varepsilon \qquad \textit{pour}\, n \ge N(\varepsilon),$$

et enfin, passant à la limite $q \to \infty$, on obtient

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(x_i^n - x_i)^2 \le \varepsilon \qquad \textit{pour}\, n \ge N(\varepsilon).$$

□

Exemple Enfin la théorie de l'intégration fournit un Hilbert : $L^2(\Omega; d\mu)$ pour le produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\ v(x)\ d\mu(x),$$

pour toute mesure borélienne $d\mu(x)$ (par exemple la mesure de Lebesgue dx). Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, un opérateur unitaire est $U(u)(x) = \frac{1}{a^{d/2}}u(\frac{x}{a})$ pour tout $a > 0$. Un autre est $U(u)(x) = u(x - h)$ $(h \in\in \mathbb{R}^d)$.

L'extension de ces définitions aux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$ se fait en utilisant la variante suivante pour la définition du produit scalaire, on change l'axiome de symétrie en

$$B(u, v) = \overline{B(v, u)}.$$

Par la suite nous noterons (u, v) le produit scalaire sur H.

8.2 Projection sur un convexe fermé

Rappelons qu'un ensemble C est dit *convexe* si pour tout $u,\ v \in C$ et $\theta \in [0, 1]$, alors $\theta u + (1 - \theta)v \in C$. Par exemple, les boules ou les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel normé sont convexes. Les intersections d'ensembles convexes sont convexes.

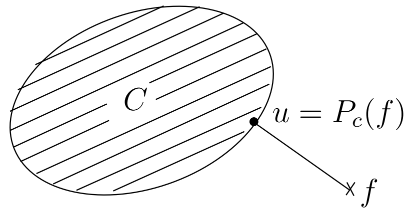

Figure 8.1: Projection sur un sous-ensemble fermé.

Théorème 8.1 *Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in H$, il existe un unique $u \in C$ tel que*

$$\|f - u\| = \min_{v \in C} \|f - v\|. \tag{8.1}$$

De plus u est caractérisé par la propriété :

$$\begin{cases} u \in C, \\ (f - u, v - u) \leq 0 \qquad \forall v \in C. \end{cases} \tag{8.2}$$

On note $u = P_C(f) =$ projection de f sur C.

La projection est continue et même 1-lipschitzienne comme on l'énonce ci-dessous:

Proposition 8.1 *Pour tout f, $g \in H$ on a*

$$\|P_C(f) - P_C(g)\| \leq \|f - g\|.$$

Preuve du Théorème 8.1. Par définition de l'infimum, on peut trouver une suite (v_n) de C telle que

$$d(f, C) := \inf_{v \in C} \|f - v\| = \lim_{n \to \infty} \|f - v_n\|.$$

Utilisant l'égalité $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4(x, y)$, on a

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &= \|v_n - f\|^2 + \|f - v_m\|^2 - 2(f - v_n, f - v_m) \\ &= \|v_n - f\|^2 + \|f - v_m\|^2 - \tfrac{1}{2}\|2f - v_n - v_m\|^2 + \tfrac{1}{2}\|v_n - v_m\|^2, \end{aligned}$$

ainsi, puisque l'on a $\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\| \geq d(f, C)$ grâce à l'hypothèse de convexité, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq \tfrac{1}{2}\|v_n - v_m\|^2 &= \|v_n - f\|^2 + \|f - v_m\|^2 - 2\|f - \tfrac{v_n + v_m}{2}\|^2 \\ &\leq \|v_n - f\|^2 + \|f - v_m\|^2 - 2d(f, C)^2 \to 0 \quad \textit{lorsque } n,\ m \to \infty. \end{aligned}$$

Ceci prouve que la suite (v_n) est une suite de Cauchy et elle converge donc vers $u \in C$ (qui est fermé).

L'unicité est une conséquence de l'unicité de la limite d'une suite de Cauchy en choisissant $v_{2n} = u$ et $v_{2n+1} = \tilde{u}$ pour deux points de minimum éventuels u et $\tilde{u}$.

Pour prouver la caractérisation par l'inégalité (8.2), considérons $u \in C$, par convexité on a

$$\|f - v\|^2 \geq \|f - u\|^2, \qquad \forall v \in C,$$

$$\Updownarrow$$

$$\|f - \Big((1-\theta)u + \theta v\Big)\|^2 \geq \|f - u\|^2, \qquad \forall \theta \in]0,1],\ \forall v \in C,$$

$$\Updownarrow$$

$$\|f - u + \theta(u - v)\|^2 \geq \|f - u\|^2, \qquad \forall \theta \in]0,1],\ \forall v \in C,$$

$$\Updownarrow$$

$$-2\theta(f - u, v - u) + \theta^2 \|u - v\|^2 \geq 0, \qquad \forall \theta \in]0,1],\ \forall v \in C,$$

$$\Updownarrow$$

$$-2(f - u, v - u) + \theta \|u - v\|^2 \geq 0, \qquad \forall \theta \in]0,1],\ \forall v \in C,$$

$$\Updownarrow$$

$$-2(f - u, v - u) \geq 0,\ \forall v \in C.$$

□

Preuve de la Proposition 8.1. Posons $u = P_C(f)$, $v = P_C(g)$. On utilise la caractérisation (8.2) pour obtenir

$$0 \leq (u - f, v - u), \qquad 0 \leq (v - g, u - v).$$

En additionant, on trouve donc

$$0 \leq (u - f - v + g, v - u) = -\|v - u\|^2 + (g - f, v - u),$$

d'où

$$\|u - v\|^2 \leq (g - f, v - u) \leq \|f - g\|\ \|u - v\|,$$

et le résultat s'en déduit. □

Corollaire 8.1 *Dans le cas où F est un sous-espace vectoriel fermé de H, P_F est un opérateur linéaire et la projection $u = P_F(f)$ est aussi caractérisée par*

$$\begin{cases} u \in F, \\ (f - u, v) = 0 \qquad \forall v \in F. \end{cases}$$

8.3 Dualité et théorème de Riesz-Fréchet

Rappelons la définition :

Définition 8.4 *On appelle H' le dual topologique de H, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur H (application linéaires $\varphi : H \to \mathbb{R}$).*

Théorème 8.2 *(Théorème de Riesz-Fréchet) Pour toute forme linéaire continue $\varphi \in H'$, il existe une unique $f \in H$ tel que*

$$\varphi(u) = (f, u) \qquad \forall u \in H.$$

Preuve. Considérons une application linéaire continue $\varphi \in H'$. Son noyau $F = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un sous espace vectoriel fermé de H. Si $F = H$ alors $\varphi \equiv 0$ et $f = 0$ convient. Sinon, soit $h \in H \backslash F$ et posons $g = h - P_F(h)$. Grâce au Corollaire 8.1, cet élément g vérifie

$$\varphi(g) \neq 0, \qquad (g, v) = 0 \quad \text{pour} \quad v \in F. \tag{8.3}$$

Considérons maintenant $u \in H$, et décomposons le sous la forme

$$u = \lambda\, g + v, \qquad \lambda = \frac{\varphi(u)}{\varphi(g)}, \quad \text{donc} \;\; v \in F,$$

(car par construction $\varphi(v) = 0$). Mais alors $(g, v) = 0$ d'après (8.3). On en déduit donc que

$$(g, u) = \lambda \|g\|^2 \iff \varphi(u) = \frac{\varphi(g)}{\|g\|^2}\,(g, u)\; \forall u \in H.$$

Le résultat s'en déduit avec $f = \frac{\varphi(g)}{\|g\|^2}\, g$. □

L'identitication de H et H' peut être dangeureuse lorsque l'on utilise naturellement le produit scalaire de $H = L^2$. Par exemple considérons $V = L^2\Big(\mathbb{R}; (1 + |x|)dx\Big) \subset L^2(\mathbb{R})$ (sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R})$), muni du produit scalaire

$$(u, v)_V = \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)\; u(x)\; v(x)\; dx.$$

Une forme linéaire $\varphi \in L^2(\mathbb{R})'$ est aussi un élément de V'. Identifiant φ à un élément $f \in L^2(\mathbb{R})$, cette fonction ne définit pas une forme linéaire sur V et la formule $\varphi(v) = (f, v)_V$ n'est pas vraie (et n'a pas de sens) sur H. En fait c'est une situation où l'on doit écrire

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

Exercice Montrer que dans cette situation, on a

$$V' = L^2\big(\mathbb{R}; \frac{dx}{1 + |x|}\big).$$

8.4 Théorèmes de Lax-Milgram et Stampacchia

Définition 8.5 *Soit $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Elle est dite*
(i) continue si il existe une constante C_a telle que

$$|a(u,v)| \leq C_a \|u\| \|v\| \qquad \forall u,\, v \in H,$$

(ii) coercive si il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 \qquad \forall u \in H.$$

Théorème 8.3 *(Lax-Milgram) Soit $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Pour toute forme linéaire $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que*

$$a(u,v) = \varphi(v) \qquad \forall v \in H.$$

De plus si $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique, alors u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in H, \\ \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \{\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\}. \end{cases}$$

Corollaire 8.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H;H)$ (application linéaire continue) telle que $(A(u),u) \geq \alpha \|u\|^2$ $\forall u \in H$ avec $\alpha > 0$, alors $A \in Isom(H;H)$.*

Ce Théorème, abstrait et de nature géométrique, a une application inattendue qui en fait son importance. Il permet de résoudre de façon totalement abstraite des équations aux dérivées partielles du type

$$\begin{cases} \Delta u := \sum_{i=1}^{d} \dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = f(x) \in L^2(\Omega), \\ \\ u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω désigne un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ et $\partial\Omega$ sa frontière. On ramène en effet ce problème à la résolution de

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, u(x)\, dx, \qquad \forall v \in H,$$

et toute la difficulté est reporté au choix de l'espace de Hilbert H et conduit aux espaces de Sobolev. Il réduit aussi la résolution effective (numérique) de ce type de problème à la recherche de sous-espaces de dimension finie d'un Hilbert qui le remplisse "le mieux possible".

Preuve.
(i) (Existence et unicité de u) Le Théorème de Riesz-Fréchet permet de définir une application linéaire $A : H \to H$ par

$$a(u, v) = (A(u), v), \qquad et \quad \|A(u)\| \leq C_a \|u\|,$$

(prendre $v = A(u)$). De même on associe à φ un élément $f \in H$ par $\varphi(v) = (f, v)$. On cherche alors à résoudre $A(u) = f$ ou encore

$$u - r\, A(u) + r\, f = u, \qquad dans\ H.$$

Il suffit donc de démontrer, utilisant le Théorème de point fixe de Banach (Section 4.4), que l'application $T : H \to H$

$$T(u) = u - r\, A(u) + r\, f,$$

est une contraction stricte pour $r > 0$ assez petit. On calcule donc

$$\begin{aligned}
\|T(u_1) - T(u_2)\|^2 &= \|u_1 - u_2 - r\, A(u_1 - u_2)\|^2 \\
&= \|u_1 - u_2\|^2 + r^2 \|A(u_1 - u_2)\|^2 - 2r(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) \\
&\leq (1 + C_a^2 r^2)\|u_1 - u_2\|^2 - 2ra(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \\
&= (1 + C_a^2 r^2)\|u_1 - u_2\|^2 - 2\alpha r\|u_1 - u_2\|^2 \\
&= (1 - 2\alpha r + C_a^2 r^2)\|u_1 - u_2\|^2,
\end{aligned}$$

et la constante $k = 1 - 2\alpha r + C_a^2 r^2 < 1$ pour $r > 0$ assez petit. D'où l'existence et l'unicité d'un point fixe de T et donc d'une solution u au problème.

(ii) (Principe variationnel) Dans le cas où la forme bilinéaire a est symétrique on écrit

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}a(u, u) - \tfrac{1}{2}a(w, w) - \varphi(u - w) &= \tfrac{1}{2}a(u, u) - \tfrac{1}{2}a(w, w) - a(u, u - w) \\
&= -\tfrac{1}{2}a(u, u) - \tfrac{1}{2}a(w, w) + a(u, w) \\
&= -\tfrac{1}{2}a(u - w, u - w) \leq 0.
\end{aligned}$$

□

Exercice (Opérateur de scattering). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit une fonction $k : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^+$, on suppose

$$\left\{ \begin{array}{l} k(\cdot, \cdot) \in L^2(\Omega \times \Omega), \qquad k(x, y) = k(y, x) \geq 0, \quad \forall x,\ y \in \Omega, \\ \qquad 0 \leq k_T(x) := \int_\Omega k(x, y)\, dy \in L^\infty(\Omega), \quad \forall x \in \Omega. \end{array} \right. \tag{8.4}$$

et on pose

$$\mathcal{K}(u)(x) = k_T(x)\ u(x) - \int_\Omega k(x,y)\ u(y)\ dy. \tag{8.5}$$

On se donne alors

$$\lambda > 0, \tag{8.6}$$

et on considère l'équation linéaire (voir aussi l'exemple de la Section 4.4), pour $x \in \Omega$,

$$\mathcal{K}(u)(x) + \lambda\ u(x) = f(x). \tag{8.7}$$

On va montrer que cette équation admet une unique solution dans $H = L^2(\Omega)$.

(i) On définit la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_\Omega (\lambda + k_T(x))\ u(x)\ v(x)\ dx - \int_{\Omega\times\Omega} k(x,y)\ u(y)\ v(x)\ dy\ dx,$$

Montrer qu'elle est continue.
(ii) Montrer qu'elle est coercive (on pourra remarquer que $u(x)u(y) \le \frac{1}{2}(u(x)^2 + u(y)^2)$).
(iii) Conclure.
(iv) Quel est le problème de minimisation associé?

Exercice (Généralisation de l'exemple précédent). On se donne maintenant $M(x) > 0$ tel que

$$\mathcal{K}(M)(x) := k_T(x)M(x) - \int_\Omega k(x,y)\ M(y)\ dy = 0.$$

et on suppose maintenant

$$\begin{cases} \int_{\Omega\times\Omega} k(x,y)^2 \frac{M(y)}{M(x)} < \infty, \qquad k(x,y) \ge 0, \quad \forall x,\ y \in \Omega \\ \\ 0 \le k_T(x) := \int_\Omega k(y,x)\ dy \in L^\infty(\Omega), \quad \forall x \in \Omega. \end{cases} \tag{8.8}$$

Soit l'espace de Hilbert défini par la norme $\|u\|_H = \left(\int_\Omega \frac{u(x)^2}{M(x)}\ dx\right)^{1/2}$. On va montrer que pour $\lambda > 0$, il existe une unique solution $u \in H$ au problème

$$\mathcal{K}(u)(x) + \lambda\ u(x) = f(x) \in H.$$

(i) Montrer que cette équation est équivalente à résoudre $a(u,v) = \int_\Omega \frac{f(x)v(x)}{M(x)}$ pour tout $v \in H$ avec

$$a(u,v) = \int_\Omega (\lambda + k_T(x)) \frac{u(x)\ v(x)}{M(x)}\ dx - \int_{\Omega\times\Omega} k(x,y) \frac{u(y)\ v(x)}{M(x)}\ dy\ dx.$$

(ii) Montrer quela forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue et coercive. Conclure.
(iii) Sous l'hypothèse d'équilibre en détail (microréversibilité)

$$k(x,y)M(y) = k(y,x)M(x),$$

donner un problème de minimisation associé.

Une extension du Théorème de Lax-Milgram est le Théorème de Stampacchia, très utilisé pour des problèmes de la mécanique (quelle est la forme d'une nappe élastique tendue au-dessus d'un obstacle) ou en finance (optimiser un stock en imposant de rester dans certaines limites, ou des stock-options sur le marché américain).

Théorème 8.4 *(Stampacchia) Avec les hypothèses du théorème 8.3, soit C un convexe fermé non vide. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe un unique $u \in C$ tel que*

$$a(u, v-u) \geq \varphi(v-u) \qquad \forall v \in C.$$

De plus, si $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique, alors u est caractérisé par

$$\begin{cases} u \in C, \\ \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in C}\{\frac{1}{2}a(u,v) - \varphi(v)\}. \end{cases}$$

Preuve. Suivant la démonstration du Théorème 8.3, on se ramène au problème

$$(f - A(u), v-u) \leq 0 \Leftrightarrow \big((rf - rA(u) + u) - u, v-u\big) \leq 0, \qquad \forall v \in C.$$

Il reste à montrer qu'il existe un point fixe unique

$$u = P_C(rf - rA(u) + u).$$

Le reste de la démonstration est laissé en exercice. □

8.5 Base hilbertienne

Définition 8.6 *Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sous-espaces fermés de H. On dit que H est somme hilbertienne des (E_n) et on note $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ si*
(i) les E_n sont deux à deux orthogonaux :

$$(u, v) = 0, \qquad \forall u \in E_n,\ v \in E_m, \quad n \neq m,$$

(ii) l'espace vectoriel engendré par les (E_n) est dense dans H.

Théorème 8.5 *On suppose que H est somme hilbertienne des (E_n). Pour tout $u \in H$, posons $u_n = P_{E_n}(u)$ (voir la Section 8.2), alors on a*

(i) $\quad u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad$ *(série convergente),*

(ii) de plus $\quad \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2, \qquad$ *(égalité de Parseval).*

Réciproquement, soit une suite $u_n \in E_n$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$ alors la série $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente et $u_n = P_{E_n}(u)$ pour tout $n \geq 1$.

Notons toutefois que les séries ci-dessus ne convergent pas normalement en général. En fait si il y a convergence normale alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|$ converge, donc $\|u_n\|$ est borné et $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2$ converge aussi. La convergence normale est donc une notion plus forte que celle utilisée ci-dessus.

Preuve. (1) Soit $u \in H$. Nous allons d'abord montrer que, posant $u_n = P_{E_n}(u)$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 \leq \|u\|^2 \qquad \text{(inégalité de Bessel).} \tag{8.9}$$

Pour cela introduisons les sommes partielles $S_k(u) = \sum_{n=1}^{k} u_n$. Il s'agit de la projection de u sur l'espace vectoriel fermé $F_k = \bigoplus_{n=1}^{k} E_n$. En effet, $S_k(u) \in F_k$ et, pour $v \in E_n$, $1 \leq n \leq k$, on a $(u - S_k(u), v) = (u, v) - (u_n, v) = (u - u_n, v) = 0$. On en déduit donc que pour $v \in \bigoplus_{n=1}^{k} E_n$ on a également $(u - S_k(u), v) = 0$, ce qui prouve bien que $S_k(u)$ est la projection de u sur F_k. On a donc

$$\|S_k(u)\|^2 = \sum_{n=1}^{k} \|u_n\|^2 \leq \|u\|^2. \tag{8.10}$$

La série de terme général $\|u_n\|^2$ converge donc et l'inégalité (8.9) est donc démontrée.

On a donc, pour $p > k$,

$$\|S_k(u) - S_p(u)\|^2 = \sum_{n=k}^{p} \|u_n\|^2 \to 0 \qquad lorsque\ k \to \infty.$$

Donc $S_k(u)$ est une suite de Cauchy qui converge donc vers un vecteur $S(u) \in H$.

Montrons maintenant que $S(u) = u$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $v \in E_n$, alors on a vu que $(u - S_k(u), v) = 0$ pour $k \geq n$. Passant à la limite $k \to \infty$ on en déduit que $(u - S(u), v) = 0$ pour tout $v \in E_n$ (quel que soit n), donc ceci est aussi vrai pour tout $v \in Vect\big((E_n)_{n \geq 1}\big)$ et donc (par densité dans H de cet espace vectoriel), pour tout $v \in H$. Donc $u = S(u)$.

Enfin, passant à la limite dans les inégalités (8.10), on obtient

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{k} \|u_n\|^2 \leq \|u\|^2,$$

d'où l'égalité de Parseval (ii).

(2) Passons finalement à la réciproque. La convergence de la série se démontre comme ci-dessus (on montre que la suite des sommes partielles est de Cauchy). Puis on remarque que $u_n = P_{E_n}(S_k(u))$ pour $k \geq n$. Passant à la limite on en déduit que $u_n = P_{E_n}(u)$. $\square$

Définition 8.7 *Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une famille dénombrable de vecteurs non nuls de H. On dit que H est somme hilbertienne des (e_n), ou que les (e_n) forment une base hilbertienne de H, et on note $H = \bigoplus_{n\geq 1} e_n$ si*
(i) $(e_n, e_p) = 0, \qquad \forall p \neq n$,
(ii) l'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H.

On parle de base hilbertienne orthonormée si de plus $\|e_n\| = 1$.

Théorème 8.6 *Un espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Preuve. Soit un ensemble dénombrable dense $(v_n)_{n\geq 1}$. Grâce au procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt on peut en déduire une base hilbertienne. On choisit $e_1 = v_1$ (supposé non nul), puis $e_2 = v_2 - e_1\ (v_2, e_1)/\|e_1\|^2$ (en supposant v_2 non colinéaire à e_1 sinon on ne le garde pas et on passe à v_3 pour définir e_2). Ainsi de suite on construit un ensemble de vecteurs orthogonaux $(e_n)_{n\geq 1}$ qui engendre bien les mêmes espaces vectoriels que les $(v_n)_{n\geq 1}$. $\square$

Corollaire 8.3 *Tout espace de Hilbert séparable est isomorphe à $l^2(\mathbb{R})$.*

Exercice Soit H un espace de Hilbert muni d'une base hibertienne. On note $\widehat{u}(n)$ les coordonnées d'un vecteur u sur cette base.
1. Montrer qu'une famille $(u_k)_{k\geq 1}$ est relativement compacte dans H si et seulement si $\left(\widehat{u_k}\right)_{k\geq 1}$ est une famille relativement compacte de $\ell^2(\mathbb{Z})$.
2. Montrer qu'une famille $\left(\widehat{u_k}\right)_{k\geq 1}$ est compacte dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ si et seulement si

$$\sup_k \sum_{l=n}^{\infty} |\widehat{u_k}(l)|^2 := \omega(n) \to 0 \qquad \text{pour } n \to \infty.$$

3. Voir la Section 8.6.4 pour une application.

Exemple (Polynômes orthogonaux) On se donne une fonction continue w, strictement positive sur un intervalle $]a, b[$ ($a < b$ pas nécessairement bornés) et on suppose que $x^n w(x) \in L^1(]a, b[)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On considère l'espace de Hilbert

$$H = L^2(w(x)\ dx) = \{u\ t.q. \int_a^b u(x)^2\ w(x)\ dx < \infty\},$$

muni du produit scalaire $(u, v) = \int_a^b u(x)\ v(x)\ w(x)\ dx$.

Théorème 8.7 *Il existe une famille orthogonale et une seule de polynômes* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de degré* n *et monique (vérifiant* $p_n = x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{n,0}$*). Le polynôme* p_n *a exactement* n *racines réelles distinctes et appartiennent à* $]a, b[$.

On préfère la normalisation 'monique' à unitaire car elle mène à des coefficients plus simples.

En général (mais pas toujours) il s'agit d'une base hilbertienne. En particulier dans le cas où $w \in C([a, b])$ la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne car, d'après le Théorème de Weierstrass, les polynômes sont denses dans $C([a, b])$ et donc dans $L^2(w(x)dx)$. En effet, $C([a, b])$ est dense dans $L^2(w(x)dx)$ et

$$\|f - p_n\|_H = \Big(\int_a^b |f - p_n|^2 w(x)dx\Big)^{1/2} \leq \|f - p_n\|_{C([a,b])} \, (\int_a^b w(x)dx)^{1/2}.$$

Ceci est aussi le cas du poids $e^{-|x|^2}$ sur $\mathbb{R}$ et on obtient alors les polynômes de Hermite, ou sur $\mathbb{R}^+$ avec le poids e^{-x} et on obtient les polynômes de Laguerre. Sur $[-1, 1]$ avec les poids $(1 - x^2)^\alpha$ on obtient les polynômes de Chebyschev pour $\alpha = 1/2$, de Chebyschev de seconde espèce pour $\alpha = -1/2$, de Legendre pour $\alpha = 0$, plus généralement on parle des polynômes de Jacobi.

On renvoit à [7, 9, 23] pour la preuve du Théorème 8.7 et pour des compléments.

8.6 Séries de Fourier, transformée de Fourier discrète, FFT

8.6.1 Séries de Fourier

Les séries de Fourier prèsentent une application intéressante et utile des bases hilbertiennes. On considère l'espace de Hilbert des fonctions à valeurs complexes

$$H = L^2(]0, 2\pi[; \frac{dx}{2\pi}), \quad (u, v) = \int_{[0,2\pi]} u(x)\, \overline{v(x)}\, \frac{dx}{2\pi}, \quad \|u\|^2 = \int_{[0,2\pi]} |u(x)|^2\, \frac{dx}{2\pi}.$$

On définit les *coefficients de Fourier* de u par

$$\widehat{u}(n) = \int_{[0,2\pi]} u(x)\, e^{-inx}\, \frac{dx}{2\pi} = (u, e^{inx}), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 8.8 *(Fourier-Riesz-Fischer)*

La famille $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base orthonormée de* $L^2(]0, 2\pi[; \frac{dx}{2\pi})$ *et pour tout* $u \in L^2(]0, 2\pi[; \frac{dx}{2\pi})$ *(ou encore pour toute famille* $\big(\widehat{u}(n)\big) \in \ell^2(\mathbb{Z})$*), on a*

$$u(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(n)\, e^{inx}, \qquad \|u\|_{L^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{u}(n)|^2,$$

$$(u,v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(n)\,\overline{\widehat{v}(n)} \qquad \textit{(égalité de Parseval).}$$

En d'autre termes $u \in L^2(]0,2\pi[;\frac{dx}{2\pi}) \mapsto \big(\widehat{u}(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie entre espaces de Hilbert.

Preuve. On a bien

$$(e^{inx}, e^{ipx}) = \int_{[0,2\pi]} e^{i(n-p)x}\,\frac{dx}{2\pi} = \delta_{np}.$$

La famille $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc bien orthonormée. Elle est dense dans $L^2(]0,2\pi[;\frac{dx}{2\pi})$ car, d'après le théorème de Weierstrass, les polynômes trigonométriques (qui sont les combinaisons linéaires finies des e^{inx}, $n\in\mathbb{Z}$) sont denses dans $C_{\rm per}([0,2\pi])$ (et la convergence uniforme implique la convergence L^2), et $C_{\rm per}([0,2\pi])$ est dense dans L^2. On peut donc appliquer les résultats de la Section 8.5. □

Cette théorie L^2 très simple pose très vite des questions très compliquées. Voir [16] pour de nombreux résultats autour des séries de Fourier. Notons en quelques uns

Théorème 8.9 *(Carleson, 1966) La série de Fourier d'une fonction $u \in L^2$ converge presque partout.*

Comme cette série de Fourier converge dans L^2, il est évident qu'elle converge presque partout à extraction prés. Il s'agissait d'une conjecture ancienne de Lusin de montrer la convergence presque partout de

$$S_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} \widehat{u}(n)e^{inx}$$

vers u.

Kolmogorov a démontré que l'on peut trouver une fonction dans L^1 dont la série de Fourier diverge p.p.

Une question plus simple est de savoir si la série de Fourier S_k d'une fonction $u \in C_{\rm per}([0,2\pi])$ peut converger uniformément. C'est faux mais un résultat de Fejér dit que les moyennes arithmétiques des S_k convergent uniformément vers u.

Pour conclure notons aussi le résultat simple

Proposition 8.2 *Si $\widehat{u}(\cdot) \in \ell^1$ alors $u \in C_{\rm per}([0,2\pi])$.*

Preuve. En effet $\widehat{u}(\cdot) \in \ell^1 \Rightarrow \widehat{u}(\cdot) \in \ell^2$, u est donc somme de sa série de Fourier. Par ailleurs, la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(n)e^{inx}$$

converge normalement dans $C_{\rm per}([0,2\pi])$ donc uniformément. □

8.6.2 Transformée de Fourier discrète

Une version discrète de la Transformée de Fourier consiste à considérer des nombres complexes $(u_j)_{1\leq j\leq N}$. On pose alors

$$v_n = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} u_j \; e^{-2i\pi\frac{n\,j}{N}}, \qquad 1 \leq n \leq N.$$

Lemme 8.1 *On a*

$$u_j = \sum_{n=1}^{N} v_n \; e^{2i\pi\frac{n\,j}{N}}, \qquad 1 \leq j \leq N,$$

$$\sum_{j=1}^{N} |u_j|^2 = \sum_{n=1}^{N} |v_n|^2, \qquad (u, \tilde{u}) = (v, \tilde{v}),$$

pour le produit scalaire de $\mathbb{C}^N$.

Preuve. (i) Une première méthode consiste à calculer

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} v_n \; e^{2i\pi\frac{n\,j}{N}} \quad &= \tfrac{1}{N}\sum_{k,n=1}^{N} u_k \; e^{2i\pi\frac{n\,(j-k)}{N}} \\ &= \sum_{k=1}^{N} u_k \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi\frac{n\,(j-k)}{N}}\right].\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi\frac{n\,(j-k)}{N}} = \delta_{jk}.$$

En effet, ceci est évident pour $j = k$ et pour $j \neq k$ on écrit, utilisant que l'on a ici une série géométrique

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi\frac{n\,(j-k)}{N}} = e^{2i\pi\frac{j-k}{N}} \, \frac{e^{2i\pi\frac{N(j-k)}{N}} - 1}{e^{2i\pi\frac{(j-k)}{N}-1}} = 0.$$

De même on obtient l'égalité des normes et produit scalaires.

(ii) Plus direct est de remarquer que la famille de vecteurs $\left(\frac{1}{N}\; e^{-2i\pi\frac{n\,j}{N}}\right)_{1\leq n\leq N}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^N$ (ce qui revient au calcul ci-dessus). $\square$

Bien entendu, la transformée de Fourier discrète peut-être vue comme une version numérique de la transformée de Fourier.

8.6.3 Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Le calcul de la Transformée de Fourier discrète revient au calcul du produit matrice-vecteur

$$v_n = \sum_{j=1}^{N} w^{-jn} u_j, \qquad w = e^{\frac{2i\pi}{N}}.$$

Ce calcul nécessite N opérations (disons multiplications) pour chaque coefficient c'est-à-dire $O(N^2)$ opérations. En fait pour $N = 2^d$ (et bien plus généralement aussi), il existe des algorithmes qui permettent de calculer le vecteur $(v_n)_{1\leq n\leq N}$ en $O(Nln(N))$ opérations, c'est ce que l'on appelle la Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform). Voir [8].

Le principe consiste, posant $N = 2M$ à calculer les termes pairs et impairs et observer que certains calculs se font en commun

$$v_n = \sum_{j=1}^{M} w^{-2jn} u_{2j} + \sum_{j=1}^{M} w^{-(2j-1)n} u_{2j-1} := t_n + w^n\, z_n,$$

avec, compte tenu de $w^{-2Mj} = w^{-Nj} = 1$,

$$t_n = \sum_{j=1}^{M} w^{-2jn} u_{2j}, \qquad t_{n+M} = t_n,$$

$$z_n = \sum_{j=1}^{M} w^{-2jn} u_{2j-1}, \qquad z_{n+M} = z_n.$$

Compte tenu de $w^M = -1$, on a donc

$$v_{n+M} = t_{n+M} + w^{n+M} z_{n+M} = t_n - w^n z_n.$$

On remarque que les formules définissant t_n et z_n sont identiques à celle définissant v_n. Appelant $C(M)$ le coût du calcul avec la taille M, on voit donc que $C(2M) = 2C(M)+M$ (calculer t et z avec la taille M et calculer w^n pour $n = 1, ..., M$). Ce coût est bien $O(Nln(N))$.

8.6.4 Espaces de Sobolev périodiques (problème)

Les séries de Fourier permettent de définir quelques espace de Sobolev particulièrement simples. Pour $s \in]0, +\infty[$, on considère le sous-espace vectoriel de L^2 défini par

$$H^s_{\text{per}} = \{u \in L^2(0, 2\pi)\ t.q. \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} |\widehat{u}(n)|^2 < \infty\}.$$

1. Muni du produit scalaire

$$(u, v)_s = \int_{[0,2\pi]} u(x)\, \overline{v(x)}\, \frac{dx}{2\pi} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} \widehat{u}(n)\, \overline{\widehat{v}(n)},$$

montrer qu'il s'agit d'un espace de Hilbert.
2. Soit $u \in C^1_{\text{per}}$, montrer que

$$\widehat{\frac{du}{dx}}(n) = in\widehat{u}(n),$$

et que $u \in H^1_{\text{per}}$. Donner alors une expression de $\|u\|_s$ en fonction de u et $\frac{du}{dx}$.
3. Montrer que pour $s > 1/2$, $H^s \subset C_{\text{per}}$.
4. Montrer qu'une famille bornée de H^s est relativement compacte dans L^2 (on pourra utiliser l'exercice de la section 8.5).
5. Montrer que, gardant le produit scalaire de base de L^2, le dual topologique de H^s s'identifie à

$$H^{-s}_{\text{per}} = \{u \; t.q. \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{-2s} |\widehat{u}(n)|^2 < \infty\},$$

(ce ne sont pas les coefficients de Fourier de fonctions!).
6. On peut montrer (mais cela est plus difficile) l'inégalité de Sobolev

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|u\|_s, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - s, \qquad 0 \leq s < 1/2.$$

7. On cherche une solution périodique sur $(0, 2\pi)^d$, dénommée u, à l'équation

$$-\Delta u + u = f \in L^2(0, 2\pi).$$

Donner une formule pour les coefficients de Fourier de u en fonction de ceux de f et montrer que, pour $s > 0$, si $f \in H^s$ alors $u \in H^{s+2}$. Montrer que pour $f \in H^{-1}$ alors $u \in L^2$. Faire le lien avec le Théorème de Lax-Milgram en utilisant la forme quadratique sur H^1

$$a(u, v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 + |n|^2) \widehat{u}(n) \; \overline{\widehat{v}(n)}.$$

8.7 Problème

Exemple (Opérateur de scattering (2)) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Soit une fonction $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^+$, on suppose

$$0 < \nu \leq k(\cdot, \cdot) \leq K_\infty < \infty, \qquad k(x; y) = k(y, x). \tag{8.11}$$

On considère l'équation linéaire (voir aussi l'exemple de la Section 4.4), pour $x \in \Omega$,

$$\mathcal{K}(u)(x) = k_T(x) \; u(x) - \int_\Omega k(y, x) \; u(y) \; dy = f(x), \quad k_T(x) = \int_\Omega k(x, y) \; dy. \tag{8.12}$$

On va montrer que, pour tout $f \in H$, cette équation admet une unique solution dans

$$H = \{u \in L^2(\Omega) \; t. \; q. \; \int_\Omega u(x) \; dx = 0\}.$$

(i) Remarquer d'abord que $\int_\Omega f(x)\,dx = 0$, découle de l'intégration de (8.12) sur Ω. Aussi, pour toute solution, $u + C$, $C \in \mathbb{R}$ est encore solution.
(ii) Montrer que H est un Hilbert pour la norme $L^2(\Omega)$.
(iii) On définit la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_\Omega k_T(x)u(x)\ v(x)\ dx - \int_{\Omega\times\Omega} k(y, x)\ u(y)\ v(x)\ dy\ dx,$$

Montrer qu'elle est continue.
(iii) Montrer qu'elle est coercive On pourra remarquer que

$$a(u, u) = \int_{\Omega\times\Omega} k(y, x)\ [u(y)^2 - u(y)\ u(x)]\ dy\ dx = \frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega} k(y, x)\ [u(y) - u(x)]^2\ dy\ dx$$

et

$$\int_{\Omega\times\Omega} [u(y) - u(x)]^2\ dy\ dx \geq mes(\Omega) \int_\Omega [u(x)]^2\ dx.$$

(iv) Conclure.
(v) Soit u_λ la solution pour $\lambda > 0$ de

$$\lambda u_\lambda + \mathcal{K}(u_\lambda)(x) = f.$$

Montrer que $u_\lambda \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} u$ dans H.
(vi) Étendre ce résultat au cas où K n'est pas symétrique mais où il existe $M(x) \in L^2(\Omega)$, $M(x) > 0$, telle que

$$\mathcal{K}^*(M)(y) := k_T(y)M(y) - \int_\Omega k(y, x)\ M(x)\ dx = M(y).$$

On travaille alors dans l'espace de Hilbert

$$H = \{u \in L^2(\Omega)\ telles\ que \int_\Omega u(x)\ M(x)\ dx = 0\},$$

muni de la norme $\|u\|_H = \big(\int_\Omega \frac{u(x)^2}{M(x)}\ dx\big)^{1/2}$.

Chapitre 9

Équations différentielles ordinaires

9.1 Exemples

Ce Chapitre fournit les premières propriétés des équations différentielles ordinaires. Pour $b(t,x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ donné (on appelle b le champ de vecteurs), on cherche une solution (trajectoire) de l'équation :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) = b(t, X(t)), \\ X(t=0) = y \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{9.1}$$

Ce type de problème intervient dans un nombre important de domaines car il constitue l'outil de modélisation le plus simple. Le fait de fixer la donné à l'instant $t = 0$ est appelé problème de Cauchy. Rappelons quelques exemples célébres.

Principe fondamental de la dynamique. Une particule de masse unitaire, de position $X(t)$ et de vitesse $V(t)$ se déplace dans un champ de force $F(v, x)$, on écrit alors la dynamique

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = V(t), & X(0) = y, \\ \dot{V}(t) = F(V(t), X(t)), & V(0) = w. \end{cases} \tag{9.2}$$

Systèmes hamiltoniens. Dans le cas où la force dérive d'un potentiel $U(\cdot)$, $F(x) = -\nabla U(x)$, ce système entre dans le cadre plus général des systèmes hamiltoniens qui sont définis, à partir d'une fonction donnée $\mathcal{H}(p, q)$ appelé hamiltonien, par

$$\begin{cases} \dot{P}(t) \;=\; \nabla_q \mathcal{H}(P(t), Q(t)), & P(0) = p, \\ \dot{Q}(t) \;=-\; \nabla_p \mathcal{H}(P(t), Q(t)), & Q(0) = q. \end{cases} \tag{9.3}$$

Pour (9.2), on trouve simplement le hamiltonien $\mathcal{H} = \frac{|v|^2}{2} + U(x)$ avec $P = X, Q = V$. On vérifie aisément la propriété d'énergie des solutions des systèmes hamiltoniens

$$\mathcal{H}(P(t), Q(t)) = \mathcal{H}(p, q) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Systèmes dérivant d'un potentiel, système gradient.

On dit qu'un système dérive d'un potentiel s'il s'écrit

$$\dot{X}(t) = -\nabla U\big(X(t)\big).$$

On a alors

$$\frac{d}{dt}U\big(X(t)\big) = -\big|\nabla U\big(X(t)\big)\big|^2.$$

Ceci montre que le système va converger vers un point singulier, en général un minimum local de potentiel.

Il existe de nombreux exemples de tels systèmes en dimension infinie qui sont très liés au calcul des variations, aux éq. aux dérivées partielles ou à la géométrie.

Système proie-prédateur de Lotka-Volterra.

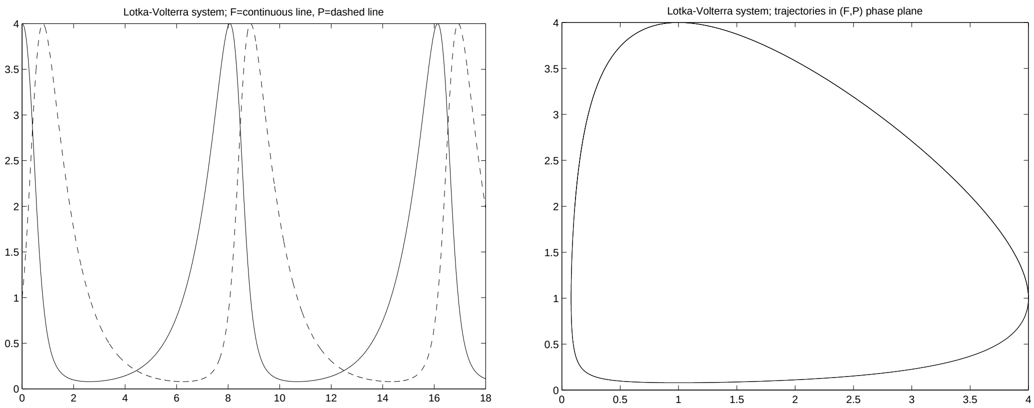

Figure 9.1: Solutions du système de Lotka-Volterra avec tous les paramètres égaux à 1; Gauche : $F(t)$ (ligne continue) et $P(t)$ (ligne discontinue) pour $0 \leq t \leq 18$, Droite : trajectoires dans le plan (F, P).

Le système de Lotka-Volterra est le modèle de référence de l'écologie. Ici, $F(t)$ représente le nombre de proies (F=food) qui utilisent une ressource naturelle (plancton) pour se nourrir et $P(t)$ représente le nombre de prédateurs qui mangent les proies (le terme quadratique prend en compte la probabilité de rencontre),

$$\begin{cases} \dot{F} &= \alpha F - \beta F P, \\ \\ \dot{P} &= \gamma P F - \mu P. \end{cases} \tag{9.4}$$

Ce système fût l'un des premiers modèle d'écologie proposé par Volterra. Il lui a permis d'expliquer (par ses points stationnaires) pourquoi la reprise de la pêche à la fin de la première guerre mondiale augmentait la proportion "sardines/requins" sur les marchés du bord de l'Adriatique. Reprendre la pêche revient à augmenter μ et diminuer α!

Exercice Le système de Lotka-Volterra n'est pas hamiltonien. Trouver un changement de variable le rendant hamiltonien et montrer que ses solutions sont périodiques. Montrer que la moyenne sur une période est égale au point stationnaire.

Le fait que toutes les trajectoires soient périodiques est peu vraisemblable comparé aux observations et de nombreuses corrections ont été proposées qui permettent d'obtenir un point attractif. Par exemple on peut considérer des limitations sur les divers termes des membres de droite dans (9.4). On peut aussi considérer des perturbations aléatoires s'ajoutant à cette dynamique et considérer alors l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}n(t,f,p) + \frac{\partial}{\partial f}[(\alpha f - \beta f p)n] + \frac{\partial}{\partial p}[(\gamma p f - \mu p)n] = \frac{\partial}{\partial f}[f\frac{\partial n}{\partial f}] + \frac{\partial}{\partial p}[p\frac{\partial n}{\partial p}] \tag{9.5}$$

La quantité $n(t,f,p)$ représente alors la densité de probabilité de rencontrer un système de f proies et p prédateurs à l'instant t. Le terme de 'diffusion ' (d'ordre 2) représente (de façon très irréaliste mais très générale) diverses fluctuations qui changent le nombre de proies et de prédateurs.

La relation entre trajectoire $X(t;y)$ et densité $n(t,y)$ est abordé dans les Sections 9.6 et 9.7.

La relation entre l'E.D.O. (9.4) et l'E.D.P. (9.5) est expliquée dans la Section 9.7 en l'absence de 'bruit'.

9.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

On rencontre deux types d'hypothèses de Cauchy-Lipschitz (C.L.) sur le champ de vecteurs $b(t,x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$: b est localement uniformément lipschitzienne en x, et b est sous-linéaire en x, i.e. telle que $\forall T>0$, $\forall R>0$,

$$\exists M_1(T,R) \quad \text{t.q.} \quad |b(t,x)-b(t,y)| \le M_1(T,R)|x-y| \quad \forall x,y\in B_R,\ \forall |t|\le T, \tag{9.6}$$

$$\exists M_2(T) \quad \text{t.q.} \quad |b(t,x)| \le M_2(T)(1+|x|) \quad \forall x\in\mathbb{R}^d,\ \forall |t|\le T. \tag{9.7}$$

La première hypothèse est appelée "C. L. locale", la seconde "C. L. globale" pour une raison simple exprimée dans le

Théorème 9.1 *Sous l'hypothèse (9.6), il existe un unique intervalle maximal d'existence* $]T_-(y),T_+(y)[$ *avec* $T_-(y)<0<T_+(y)$, *et une unique solution de (9.1),* $X\in C^1(]T_-,T_+[;\mathbb{R}^d)$. *De plus,*

$$\textit{soit} \quad T_+=+\infty, \qquad \textit{soit} \quad |X(t)|\to\infty \quad \textit{lorsque} \quad t\to T_+,\ t<T_+,$$

et soit $T_- = -\infty$, *soit* $|X(t)| \to \infty$ *lorsque* $t \to T_-,\ t > T_-$.

Sous les hypothèses (9.6)–(9.7), cette solution est globale ($T_\pm = \pm\infty$).

Preuve. On démontre le théorème de Cauchy-Lipschitz en deux étapes, d'abord l'existence locale, ensuite l'existence d'un intervalle maximal.
(i) Existence locale. Nous démontrons le lemme suivant :

Lemme 9.1 *(Cylindre de sécurité) Soit* $T,\ R \geq 0$. *Alors il existe* $\tau(T,R) > 0$ *(assez petit) tel que pour tout* $|t_0| \leq T$ *et tout* $|x_0| \leq R$, *alors l'équation*

$$\frac{d}{dt}X(t) = b(t, X(t)), \qquad X(t_0) = x_0, \tag{9.8}$$

admet une unique solution $\mathcal{C}^1$ *pour* $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

Preuve du Lemme 9.1. Pour cela nous choisissons le plus grand $\tau(T,R) > 0$ tel que :

$$\begin{cases} \tau\ M_1(T+1, R+1) \leq \frac{1}{2}, \\[2ex] \tau \leq 1, \\[2ex] \tau\ \|b(t,x)\|_{L^\infty([-T-1,T+1]\times B(R+1))} \leq 1. \end{cases}$$

Ensuite nous définissons d'une part le sous-ensemble fermé F de $\mathcal{C}^0([t_0-\tau, t_0+\tau]; \mathbb{R}^d)$ (espace de Banach muni de la norme du sup) formé des fonctions $Y(t)$ telles que $Y(t_0) = x_0$ et $|Y(t)| \leq R+1$ pour $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ et d'autre part l'application

$$\mathcal{A}(Y) = X, \quad \text{où } X \text{ est donné par} \quad X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(s, Y(s))ds.$$

Cette application a les propriétés suivantes.
(a) On a $\mathcal{A} : F \to F$. En effet X est continue, $X(t_0) = x_0$ et pour $|t - t_0| \leq \tau$,

$$\begin{aligned} |X(t)| &\leq |x_0| + \tau \sup_{|s-t_0|\leq\tau} |b(s, Y(s))| \\ &\leq |x_0| + \tau\ \|b(\cdot,\cdot)\|_{L^\infty([-T-1,T+1]\times B(R+1))} \\ &\leq R+1. \end{aligned}$$

(b) L'application $\mathcal{A}$ est une contraction stricte. En effet, pour $Y_1,\ Y_2 \in F$, on a

$$\begin{aligned} |X_1(t) - X_2(t)| &= |\textstyle\int_{t_0}^t [b(s, Y_1(s)) - b(s, Y_2(s))]ds| \\ &\leq \tau\ M_1(T+1, R+1)\ \sup_{|t_0-s]\leq\tau} |Y_1(s) - Y_2(s)| \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|Y_1(s) - Y_2(s)\|_{\mathcal{C}^0([t_0-\tau,t_0+\tau];\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

On en déduit, utilisant le théorème de point fixe de Banach, l'existence et l'unicité d'un point fixe de $\mathcal{A}$ dans F qui n'est rien d'autre que la solution de (9.8) (l'unicité de la solution C^1 est montrée plus loin). $\square$

(ii) L'intervalle maximal d'existence du Théorème 9.1 se prouve alors en recollant les solutions construites ci-dessus de proche en proche. À chaque étape on construit un temps $\tau_n = \tau(t_n, |X(t_n)|)$ pour lequel il existe une solution sur l'intervalle $[t_n, t_n + \tau_n = t_{n+1}]$ (disons en considérant les temps positifs seulement). Ceci conduit à une solution globale ($\forall t > 0$) hormis si $\tau_n \to 0$ et la série converge, i.e., $t_n \to T_+ < \infty$. Comme le temps d'existence $\tau(T, R)$ reste uniformément positif lorsque $t_n, X(t_n)$ reste borné (grâce au lemme), cela prouve que $|X(t)| \to \infty$ pour $t \to T_+$. Plus précisément, pour toute boule $B(R)$ la trajectoire n'est plus dans $B(R)$ pour $t > T_+ - \tau(T_+, R)$ sinon on pourrait obtenir une solution jusqu'à $t + \tau(T, R) > T_+$.

(iii) L'unicité est une conséquence des lemmes de Gronwall ci-dessous. En effet soient deux solutions X_1 et X_2 de (9.1) définies sur un même intervalle $t \in [0, T]$, on a (appelant R le rayon d'une boule qui contient les trajectoires $X_1(t)$ et $X_2(t)$, ce qui est possible car elles sont bornées pour $t \in [0, T]$, et traitant le cas $t > 0$ seulement) :

$$\begin{aligned} |X_1(t) - X_2(t)| &= |\textstyle\int_0^t [b(s, X_1(s)) - b(s, X_2(s))] ds| \\ &\leq M_1(T, R) \textstyle\int_0^t |X_1(s) - X_2(s)| ds, \end{aligned}$$

ce dont on déduit que $|X_1(t) - X_2(t)| = 0$ grâce au lemme de Gronwall.

(iv) Existence globale sous l'hypothèse (9.7). Fixons un temps $T > 0$ et montrons que la solution existe au-delà de T. Pour cela on écrit

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(s, X(s)) ds \implies |X(t)| \leq |x_0| + M_2(T)\big(T + \int_0^t |X(s)| ds\big),$$

donc on a, toujours grâce au lemme de Gronwall ci-dessous (Section 9.4), sur $[0, T_+[$,

$$|X(t)| \leq \big(|x_0| + T M_2(T)\big) e^{M_2(T)t}, \tag{9.9}$$

ce qui est incompatible avec l'explosion en T_+ et prouve donc que $T_+ > T$. $\square$

Remarque 9.1 *(Régularité de Carathéodory) L'hypothèse 'b continu' n'est pas optimale. On dit qu'une fonction localement bornée $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est de Carathéodory si*
(i) pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, $x \to b(t, x)$ est continue,
(ii) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $t \to b(t, x)$ est mesurable.

Il s'agit de la régularité 'naturelle' pour traiter les E. D. O. (et non pas $b(t, x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$) car on a

Proposition 9.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $X : I \to \mathbb{R}^d$ une fonction mesurable, alors $t \to b(t, X(t))$ est mesurable de I dans $\mathbb{R}^d$.*

9.3 Explosion en temps fini, non-unicité

Les hypothèses du théorème 9.1 sont nécessaires. Tout d'abord, notons que sous la seule hypothèse $b \in \mathcal{C}^1$, on peut ne pas avoir existence globale.

Exemple (Explosion en temps fini). Considérons le système sur $\mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}X(t) = X(t)^2, \qquad X(0) = y,$$

alors sa solution est $X(t) = y/(1 - yt)$ et on voit que $T_-(y) = -\infty$ et $T_+(y) = \frac{1}{y}$ pour $y > 0$, et pour $y < 0$ on a $T_-(y) = \frac{1}{y}$, $T_+(y) = \infty$. La fonction $b(x) = x^2$ n'est pas sous-linéaire à l'infini!

De même la régularité de Lipschitz locale n'est pas nécessaire pour l'existence (mais on perd alors l'unicité)

Théorème 9.2 *(Cauchy-Péano) On suppose que $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ alors l'équation différentielle (9.1) admet une solution $\mathcal{C}^1$ définie sur un intervalle $]-\tau, \tau[$ avec $\tau > 0$.*

Dans cet énoncé on constate que l'unicité est perdue:

Exemple (Phénomène de Péano) On choisit l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{x(t)}, \qquad x(0) = 0.$$

Pour tout $a > 0$, elle admet comme solutions $x(t) = 0$ pour $t \leq a$ et $x(t) = (t - a)^2$ pour $t \geq a$.

Preuve du Théorème 9.2. On peut toujours trouver une suite de fonctions $b_n \in \mathcal{C}^1$ telle que $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ dans $\mathcal{C}^0_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. On peut alors suivre la démonstration du Lemme 9.1 pour obtenir un cylindre $[-\tau, \tau] \times B(x_0, R)$ où la suite de solutions associées est bornée, $|x_n(t) - x_0| \leq R$ pour $|t| \leq \tau$.

On en déduit que $b\big(t, x_n(t)\big)$ est aussi borné pout $t \in [-\tau, \tau]$, et $\dot{x}(t)$ aussi. La suite $x_n(t)$ est donc uniformément lipschitzienne et le Théorème d'Ascoli 5.20 (coordonnée par coordonnée) montre que l'on peut extraire une sous-suite telle $x_{n(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x(t)$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau, \tau]; \mathbb{R}^d)$. Donc, on a aussi $b(t, x_{n(k)}(t)) \xrightarrow[k\to\infty]{} b(t, x(t))$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau, \tau]; \mathbb{R}^d)$ et aussi $\dot{x}_{n(k)}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} \dot{x}(t)$ dans $\mathcal{C}^0([-\tau, \tau]; \mathbb{R}^d)$. Ceci prouve bien que $x(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\tau, \tau[$ et résoud l'équation. □

9.4 Les lemmes de Gronwall

Lemme 9.2 *Soit $u(t) \in \mathcal{C}^1([0, T])$ vérifiant*

$$\frac{d}{dt}u(t) \leq Bu(t), \qquad B = Cste,$$

alors

$$u(t) \leq u(t=0)\, e^{Bt} \qquad \forall t \in [0,T].$$

Preuve. On a donc

$$\frac{d}{dt}[u(t)e^{-Bt}] = e^{-Bt}[\frac{d}{dt}u(t) - Bu(t)] \leq 0,$$

donc $u(t)e^{-Bt} \leq u(t=0)$. D'où le résultat. $\square$

Lemme 9.3 *Soit* $u(t) \in \mathcal{C}^0([0,T])$ *vérifiant*

$$u(t) \leq A + B\int_0^t u(s)\, ds, \qquad A \in \mathbb{R}, \quad B > 0,$$

alors

$$u(t) \leq Ae^{Bt}, \qquad t \in [0,T].$$

Preuve. On pose $v(t) = \int_0^t u(s)\, ds \in \mathcal{C}^1([0,T])$. Alors, comme ci-dessus,

$$\frac{d}{dt}v(t) = u(t) \leq A + Bv(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}[v(t)e^{-Bt}] \leq A\, e^{-Bt}.$$

Ceci implique $v(t)e^{-Bt} \leq A\frac{1-e^{-Bt}}{B}$ (car $v(t=0)=0$) et revenant à l'équation sur $u(t)$, on en déduit (car $B>0$)

$$u(t) \leq A + Bv(t) \leq Ae^{Bt}.$$

$\square$

Lemme 9.4 *Soit* $u(t) \in L^1([0,T])$ *vérifiant*

$$u(t) \leq A + B\int_0^t u(s)\, ds, \qquad A \in \mathbb{R}, \quad B > 0,$$

alors

$$u(t) \leq Ae^{Bt}, \qquad t \in [0,T].$$

Preuve. On a, réintroduisant l'inégalité sur $u(s)$ dans l'intégrale,

$$\begin{aligned} u(t) &\leq A + B\int_0^t u(s)\, ds \\ &\leq A + B\int_0^t [A + B\int_0^s u(\sigma)d\sigma]ds \\ &= A(1+Bt) + B^2\int_0^t (t-s)u(s)ds. \end{aligned}$$

On itère alors l'argument:

$$\begin{aligned} u(t) &\leq A(1+Bt)+B^2\int_0^t (t-s)u(s)ds \\ &\leq A(1+Bt)+B^2\int_0^t (t-s)[A+B\int_0^s u(\sigma)d\sigma]ds \\ &= A(1+Bt+B^2\tfrac{t^2}{2})+B^3\int_0^t \tfrac{(t-s)^2}{2}u(s)ds. \end{aligned}$$

Et par récurrence on trouve

$$u(t) \leq A(1+Bt+B^2\frac{t^2}{2}+\ldots+B^n\frac{t^n}{n!})+B^{n+1}\int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}u(s)ds.$$

Passant à la limite $n \to \infty$, on obtient

$$u(t) \leq Ae^{Bt}.$$

□

Exercice On suppose que $u(t) > 0$, $u(t) \in \mathcal{C}^1([0,T])$ vérifie

$$\frac{d}{dt}u(t) \leq Bu(t)\ [1+|\ln(u(t))|], \qquad B \geq 0.$$

Montrer une borne a priori sur $u(t)$.

Exercice (Condition d'unicité d'Osgood) On suppose qu'il existe une constante $B > 0$ telle que

$$\big(b(t,x)-b(t,y),x-y\big) \leq B|x-y|^2.$$

Montrer l'inégalité, pour deux trajectoires partant de deux points y_1, y_2,

$$|X_1(t)-X_2(t)| \leq |y_1-y_2|\ e^{Bt}.$$

On pourra considérer la quantité $\frac{d}{dt}|X_1(t)-X_2(t)|^2$.

L'une des applications les plus usuelles des lemmes Gronwall consiste à monter des bornes sur la solution ce qui implique l'existence globale de solutions grâce au Théorème 9.1 et sans utiliser l'hypothèse de C. L. globale.

Exemple On considère un système hamiltonien avec $\mathcal{H}(p,q) \to \infty$ pour $|p|+|q| \to \infty$. Alors, supposant que $\mathcal{H} \in \mathcal{C}^1$, le système (9.3) admet une unique solution et elle est globale ($T_\pm = \pm\infty$).
(En effet $\mathcal{H}(P(t),Q(t)) = \mathcal{H}(p^0,q^0)$ et ceci implique que $P(t)$ et $Q(t)$ restent bornés).

Exercice Même s'il n'est pas hamiltonien, le système de Lotka-Volterra admet des solutions globales pour la même raison.

Exercice On considère le système suivant modélisant une réaction chimique $O_2 \leftrightarrow 2O$ par exemple. Posant $n(t) = [O_2]$, $p(t) = [O]$ on obtient alors (pour $k = 2$) un système du type suivant avec $k \geq 1$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}n(t) + n(t) &= p(t)^k, \qquad n(t=0) = n^0 > 0, \\ \frac{d}{dt}p(t) + p(t)^k &= n(t), \qquad p(t=0) = p^0 > 0. \end{cases} \tag{9.10}$$

Ce système admet des solutions pour $t > 0$ malgré son caractère quadratique. En effet, les solutions locales existent grâce au Théorème de Cauchy-Lipschitz 9.1, et :
1. montrer que ces solutions vérifient $n(t) > 0$ et $p(t) > 0$,
2. trouver une loi de conservation montrant une borne globale,
3. Montrer que, pour $t \to +\infty$, $n(t) \to n_\infty$, $p(t) \to p_\infty$ avec $n_\infty + p_\infty = n^0 + p^0$ et $n_\infty = (p_\infty)^k$ avec un taux exponentiel.

Réponses :
1. En effet, on considère le système modifié (on note $x_+ = \max(0, x)$)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}n(t) + n(t) &= (p(t)_+)^k, \qquad n(t=0) = n^0 > 0, \\ \frac{d}{dt}p(t) + (p(t)_+)^k &= n(t), \qquad p(t=0) = p^0 > 0. \end{cases} \tag{9.11}$$

Ce système vérifie encore l'hypothèse locale du Théorème de Cauchy-Lipschitz et il admet donc des solutions locales. La première équation donne, comme dans la preuve du lemme de Gronwall 9.2,

$$\frac{d}{dt}n(t) + n(t) \geq 0 \;\Rightarrow\; n(t) \geq n^0 e^{-t} > 0.$$

On en déduit alors que $p(t) > 0$ par le même argument. Ce système modifié fournit donc une solution positive au système (9.10) (et il y a unicité des solutions!).
2. Puisque

$$\frac{d}{dt}[n(t) + p(t)] = 0,$$

on en déduit que $0 < n(t) < n^0 + p^0$, $0 < p(t) < n^0 + p^0$ et ceci prouve que $T_+ = \infty$.
3. Les relations définissent des valeurs positives uniques n_∞, p_∞. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(n(t) - n_\infty\big) + n(t) - n_\infty &= p(t)^k - (p_\infty)^k, \\ &= (p(t) - p_\infty)R(t) \qquad R(t) > 0 \\ &= -(n(t) - n_\infty)R(t). \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(n(t) - n_\infty\big)^2 + \big(n(t) - n_\infty\big)^2 \leq 0$$

Grâce au lemme de Gronwall, on a donc $\big(n(t)-n_\infty\big)^2 \leq \big(n^0-n_\infty\big)^2 e^{-2t}$.

9.5 Dépendance régulière en fonction des paramètres

On considère maintenant un paramètre $\lambda \in \bar{\Omega}$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^p$ et l'E.D.O. paramétrée par λ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t;\lambda) = b(t, X(t;\lambda);\lambda), \\ X(t=0;\lambda) = y(\lambda) \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{9.12}$$

Théorème 9.3 *On suppose qu'à λ fixé les hypothèses (9.6) et (9.7) sont satisfaites avec des constantes indépendantes de $\lambda \in \bar{\Omega}$.*
(i) On suppose $y(\cdot)$ localement bornée, pour des temps $|t| \leq T$, les trajectoires $X(t;\lambda)$ sont alors localement uniformément bornées en λ et T.
(ii) Si b et y sont continus en (t,x,λ) alors $X(t;\lambda)$ est continu.
(iii) Si b et y sont lipschitziens en λ (localement uniformément en t et x pour b) alors $X(t;\lambda)$ est lipschitzien en λ (localement uniformément en t).
(iv) Si $D_\lambda b(t,x;\lambda) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\Omega)$, $D_x b(t,x;\lambda) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\Omega)$ et $y(\lambda) \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ alors $X(t;\lambda) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\Omega)$, $D_\lambda X(t;\lambda) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}D_\lambda X(t;\lambda) = D_\lambda b(t, X(t;\lambda);\lambda) + D_x b(t, X(t;\lambda);\lambda) \circ D_\lambda X(t;\lambda), \\ \\ D_\lambda X(t=0;\lambda) = D_\lambda y(\lambda). \end{cases}$$

Preuve.
(i) se déduit de la borne (9.9) donnée ci-dessus.

(ii) Soit $\lambda \in \Omega$ et μ dans un voisinage de λ. Montrons la continuité au point λ. Puisque les solutions sont uniformément bornées, pour R assez grand et $0 \leq t \leq T$ (on laisse le cas $t<0$ en exercice), on a

$$\begin{aligned} |X(t;\lambda)-X(t;\mu)| &\leq |y(\lambda)-y(\mu)| + \textstyle\int_0^t |b(s,X(s;\lambda);\lambda) - b(s,X(s;\mu);\mu)|\,ds \\ &\leq |y(\lambda)-y(\mu)| + \textstyle\int_0^t |b(s,X(s;\lambda);\lambda) - b(s,X(s;\lambda);\mu)|\,ds \\ &\qquad + \textstyle\int_0^t |b(s,X(s;\lambda);\mu) - b(s,X(s;\mu);\mu)|\,ds \\ &\leq \omega_y(|\lambda-\mu|) + T\omega_b(|\lambda-\mu|) + M_1(T,R)\textstyle\int_0^t |X(s;\lambda)-X(s;\mu)|\,ds, \end{aligned}$$

en notant ω_y et ω_b des modules de continuité de y (sur un voisinage compact de y) et de b restreinte à F où F désigne un ensemble compact en t,x,λ contenant les trajectoires et un voisinage de λ (on rappelle le Théorème 5.9).

On peut donc appliquer le deuxième lemme de Gronwall et on obtient la continuité uniforme de X en λ,

$$|X(t;\lambda)-X(t;\mu)| \leq [\omega_y(|\lambda-\mu|) + T\omega_b(|\lambda-\mu|)]\, e^{M_1(T,R)\,t}.$$

D'autre part, b étant aussi uniformément borné le long les trajectoires, on a :

$$\begin{aligned} |X(t;\lambda)-X(s;\lambda)| &\le \int_{[s,t]} b(\sigma, X(\sigma;\lambda);\lambda)\, d\sigma \\ &\le \|b\|_{L^\infty(F)}|t-s|. \end{aligned}$$

De ces deux inégalités, on déduit bien la continuité de X en (t,λ).

(iii) On considère deux solutions pour deux paramètres λ et μ, uniquement les temps positifs pour simplifier et $t \in [0,T]$. Puisque les solutions sont uniformément bornées, pour R assez grand on a

$$\begin{aligned} |X(t;\lambda)-X(t;\mu)| &\le |y(\lambda)-y(\mu)| + \int_0^t |b(s,X(s;\lambda);\lambda) - b(s,X(s;\mu);\mu)|\, ds \\ &\le K_1|\lambda-\mu| + K_2T|\lambda-\mu| + M_1(T,R)\int_0^t |X(s;\lambda)-X(s;\mu)|\, ds. \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le deuxième lemme de Gronwall et on obtient

$$|X(t;\lambda)-X(t;\mu)| \le (K_1+K_2T)|\lambda-\mu| e^{M_1(T,R)\, t}.$$

L'aspect lipschitzien en t a déjà été démontré dans (ii).

(iv) Soit la matrice $M(t) \in M_{d\times p}$ solution de

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}M(t) = D_\lambda b(t,X(t;\lambda);\lambda) + D_x b(t,X(t;\lambda);\lambda)\circ M(t), \\ &M(t=0) = D_\lambda y(\lambda). \end{aligned}$$

Cette E.D.O. a bien une solution car elle est linéaire en $M(t)$ et satisfait donc les hypothèses du Théorème de Cauchy-Lipschitz 9.1 (dans sa version globale). On calcule, pour $h \in \mathbb{R}^p$ assez petit,

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\ &\big[X(t;\lambda+h) - X(t;\lambda) - M(t).h\big] \\ &= b(t,X(t;\lambda+h);\lambda+h) - b(t,X(t;\lambda);\lambda) - D_x b(t,X(t;\lambda);\lambda)\circ M(t).h - D_\lambda b(t,X(t;\lambda);\lambda).h \\ &= b(t,X(t;\lambda+h);\lambda+h) - b(t,X(t;\lambda);\lambda+h) - D_x b(t,X(t;\lambda);\lambda)\circ M(t).h + |h|\,\varepsilon(h) \end{aligned}$$

et ceci en utilisant, par exemple, l'inégalité des accroissements finis. On peut encore réécrire l'expression ci-dessus, et toujours grâce à l'inégalité des accroissements finis, comme

$$\begin{aligned} &= D_x b(t,X(t;\lambda);\lambda+h).(X(t;\lambda+h)-X(t;\lambda)) - D_x b(t,X(t;\lambda);\lambda)\circ M(t).h + |h|\,\varepsilon(h) \\ &= D_x b(t,X(t;\lambda);\lambda)[X(t;\lambda+h)-X(t;\lambda)-M(t).h] + |h|\,\varepsilon(h). \end{aligned}$$

(la notation $\varepsilon(h)$ est utilisée pour désigner différentes fonctions qui tendent vers 0 avec h). On utilise alors l'argument usuel

$$\begin{aligned}
|X(t;\lambda+h)-X(t;\lambda)-M(t).h| \;&\leq |y(\lambda+h)-y(\lambda)-Dy(\lambda).h| \\
&\qquad +M_1(T,R)|X(t;\lambda+h)-X(t;\lambda)-M(t).h|+|h|\,\varepsilon(h) \\
&\leq |h|\,\varepsilon(h)+M_1(T,R)|X(t;\lambda+h)-X(t;\lambda)-M(t).h|.
\end{aligned}$$

Il reste à utiliser le lemme de Gronwall pour obtenir

$$|X(t;\lambda+h)-X(t;\lambda)-M(t).h| \leq |h|\,\varepsilon(h)e^{M_1(T,R)\,t}.$$

Ceci prouve bien que la différentielle de X en λ existe et vaut $M(t)$. On en déduit donc que $D_\lambda X$ et $\frac{d}{dt}X$ sont continus, donc que $X(t;\lambda)$ est $\mathcal{C}^1$ (on rappelle le Théorème des Dérivées Partielles Continues). □

9.6 Flot et mesure

On considère la solution de l'E.D.O. (9.1) paramétrée par $\lambda = y$ et nous appelons maintenant s la variable de temps et nous avons donc :

$$\frac{d}{ds}X(s;y) = b(s, X(s;y)), \qquad X(s=0;y) = y.$$

Théorème 9.4 *Sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz (9.6)–(9.7), et supposant $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{d+1})$, alors l'application,*

$$\Phi(t) : y \in \mathbb{R}^d \;\rightarrow\; X(t;y) \in \mathbb{R}^d,$$

est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ appelé flot.

Preuve. Le Théorème 9.3 de régularité en fonction d'un paramètre montre que $\Phi(t)$ est bien $C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs c'est une injection par le Théorème de Cauchy-Lipschitz qui montre l'existence et l'unicité des trajectoires. Elle est bien inversible comme on le voit en renversant le temps. L'application $\Phi(t)^{-1}(x)$ s'obtient en résolvant l'E.D.O.

$$\frac{d}{ds}Y(s;x) = b(s, Y(s;x)), \qquad Y(s=t;x) = x,$$

et en posant $y = Y(s=0;x)$. En effet, comme $X(s;y)$ et $Y(s;x)$ résolvent la même E.D.O. avec la même donnée initiale, elles sont égales, on a donc $X(s=0;y) = x \Leftrightarrow Y(s=0;x) = y$. □

Une question fondamentale est alors de comprendre la transformation des volumes, c'est-à-dire de la mesure, par le flot d'une E.D.O. Pour cela on rappelle que la dérivée de

$X(t;y)$ vérifie (voir le Théorème 9.3)

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} D_y X(s;y) = D_x b(s, X(s;y)) \circ D_y X(s;y), \\ \\ D_y X(s=0;y) = I_{d\times d}, \end{cases} \tag{9.13}$$

On a :

Théorème 9.5 *(Liouville) Avec les hypothèses du Théorème 9.4, le Jacobien*

$$J(t;y) = \det D_y X(t;y),$$

vérifie

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} J(s;y) = \operatorname{div} b(s, X(s;y)) \times J(s;y), \\ \\ J(s=0;y) = 1. \end{cases} \tag{9.14}$$

La divergence de b,

$$\operatorname{div} b(s,x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(s,x)$$

permet donc de mesurer l'évolution des volumes par le flot. En effet, soit un ensemble mesurable V^0 et $V(t) = \{X(t;y),\ y \in V^0\}$. Alors on a, par le Théorème de changement de variable dans une intégrale,

$$\operatorname{mes}(V(t)) = \int_{V(t)} dx = \int_{V^0} J(t;y)\, dy.$$

Les flots préservant le volume jouent un rôle important en physique et en mécanique des fluides incompressibles (équations d'Euler ou Navier-Stokes).

Définition 9.1 *Un flot est dit incompressible s'il préserve les volumes, c'est-à-dire si* div $b(s,x) = 0$.

Exemple Les flots hamiltoniens préservent les volumes puisque

$$\operatorname{div}_{(p,q)} \big(\nabla_q \mathcal{H}(p,q), -\nabla_p \mathcal{H}(p,q) \big) = 0.$$

Preuve du Théorème 9.5 On pose $A(s) = D_y X(s;y)$ et $B(s) = D_x b(s, X(s;y))$. En utilisant l'E.D.O. (9.13), on a

$$\frac{d}{ds} A(s) = B(s) \circ A(s).$$

On en déduit que

$$A(s+h) = A(s) + h\, B(s) \circ A(s) + o(h),$$

donc

$$\begin{aligned}\det A(s+h) &= \det\Big([I_{d\times d} + h\ B(s)] \circ A(s)\Big) + o(h)\\ &= [1 + h\ \mathrm{tr}B(s)]\ \det A(s) + o(h),\end{aligned}$$

ce dont on déduit, en divisant par h et faisant tendre h vers zéro, que

$$\frac{d}{ds}\det A(s) = \mathrm{tr}B(s)\ \det A(s).$$

ce qui prouve le résultat. On a en particulier utilisé le résultat algébrique suivant :

Lemme 9.5 *Pour toute matrice $B \in M_{d\times d}$ on a :*

$$\det[I_{d\times d} + h\ B] = 1 + h\ \mathrm{tr}B + O(h^2).$$

On laisse la preuve de ce résultat en exercice (on peut par exemple raisonner par récurrence).
□

À titre de complément mentionons par exemple les

Théorème 9.6 *(du retour de Poincaré) Soit $\Phi(t)$ un flot incompressible et soit Ω un ensemble invariant, i.e., $\Phi(t)(\Omega) = \Omega$ pour tout t. Alors presque tout $y \in \Omega$ est stable au sens de Poisson. C'est-à-dire que,*

$$\forall T > 0, \qquad \forall V(y)\ (voisinage\ de\ y) \quad \exists t \geq T, \quad X(t; y) \in V(x).$$

Nous renvoyons à [1] pour une preuve de ce résultat.

Théorème 9.7 *(Poincaré-Bendixson) En dimension $d = 2$, soit un champ autonome $(b(t,x) = b(x))$ et F un fermé régulier tel que $b(x).\nu(x) < 0$ pour tout $x \in \partial F$, où $\nu(x)$ désigne la normale extérieure à F. Alors*
-) soit F admet un point stationnaire, i.e., $b(x) = 0$,
-) soit il existe une trajectoire $X(t)$ fermée (i.e., $X(0) = X(T)$ pout un $T > 0$).

Voir [28] pour des considérations sur ces questions et la théorie de la bifurcation.

9.7 Equation de transport et méthode des caractéristiques

Considérons l'équation de transport sous sa forme dite forte :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u + b(t,x)\cdot\nabla_x u &= 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\\ \qquad\qquad u(t=0) &= u^0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d).\end{cases} \tag{9.15}$$

On peut construire des solutions explicites de cette équation grâce à la méthode des caractéristiques. Pour cela on a besoin des hypothèses de Cauchy-Lipschitz (9.6)–(9.7). On peut alors définir les caractéristiques :

Définition 9.2 *On appelle caractéristiques de l'équation de transport (9.15), les trajectoires du système différentiel:*

$$\begin{cases} \dot{X}(t;y) = b(t, X(t;y)), \\ X(t=0;y) = y \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{9.16}$$

On rappelle que ces trajectoires existent pour tout temps et que le flot

$$y \in \mathbb{R}^d \to X(t;y) \in \mathbb{R}^d,$$

est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ pour $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{d+1})$.

Théorème 9.8 *Sous les hypothèses (9.6)–(9.7) et $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ de l'équation de transport (9.15), donnée par la méthode des caractéristiques*

$$\forall t,\ s \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \qquad u(t, X(t;y)) = u(s, X(s;y)) = u^0(y).$$

On dit que la solution de l'équation de transport est "constante le long des caractéristiques".

Preuve : Utilisant la règle de dérivation composée, on calcule

$$\frac{d}{dt} u(t, X(t,y)) = \frac{\partial}{\partial t} u + \nabla_x u \cdot \dot{X},$$

or $\dot{X}(t,y) = b(t, X(t,y))$, d'où

$$\frac{d}{dt} u(t, X(t,y)) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla_x u(t,x) = 0, \quad \text{pour } x = X(t;y)$$

et la formule énoncée est donc démontrée ainsi que l'unicité, puisque lorsque y parcourt $\mathbb{R}^d$, $x = X(t;y)$ parcourt également $\mathbb{R}^d$. Pour conclure le Théorème 9.8, il suffit de rappeler que $y \mapsto X(t,y)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ et la formule des caractéristiques définit donc bien une solution $u(t,x)$ en tout point.

□

Proposition 9.2 *(Propriétés d'hyperbolicité) La solution de l'équation de transport (9.15) vérifie les propriétés :*
(i) $u(t,x)$ ne dépend que de $u^0(y)$ avec $|y| \le |x| + \|b\|_{L^\infty}|t|$, en d'autres termes, il y a vitesse finie de propagation,
(ii) il y a propagation des singularités,
(iii) $|u(t,x)| \le \|u^0\|_{L^\infty}$.

Les propriétés (i)–(iii) sont bien sûr opposées aux propriétés des solutions de l'équation de la chaleur qui dépendent instantanément de toute la donnée initiale, avec un effet régularisant.

Preuve : Ces propriétés se déduisent immédiatement de la formule du Théorème 9.8.
□

Considérons maintenat l'équation de transport sous sa forme dite faible :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u + \mathrm{div}(b(t,x)u) & = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \\ u(t=0) & = u^0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{9.17}$$

On a alors la variante suivante (que l'on laisse en exercice) du Théorème 9.8

Théorème 9.9 *Sous les hypothèses (9.6)–(9.7) et* $div(b), b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ *alors il existe une unique solution* $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ *de l'équation de transport (9.17), donnée par la méthode des caractéristiques*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \qquad u(t, X(t;y))J(t;y) = u^0(y).$$

Bibliographie

[1] Arnold V. I., *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer (1978).

[2] Bourbaki N., *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann (1967).

[3] Bourbaki N., *Topologie générale*, Masson (1990).

[4] Brezis H., *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson (1983).

[5] Choquet G., *Cours d'analyse. Topologie*, Masson (1964).

[6] Crandall, M. G.; Lions P.-L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 1–67.

[7] Crouzeix M. et Mignot A. L., *Analyse numérique de équations différentielles*, 2éme édition, Masson (1989).

[8] Dautray R. and Lions J.-L., *Analyse Mathématique et cacul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson (1988).

[9] Demailly J.-P., *Analyse numérique et équations différentielles* , Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

[10] Dixmier J., *Topologie générale*, PUF (1981).

[11] Dungundji J., *Topology.* Reprinting of the 1966 original. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass.-London-Sydney, 1978.

[12] Dunford N. and Schwartz J.T., *Linear Operators*, Part I, Interscience (1967).

[13] Ekeland I., *La Théorie des jeux et ses applications à l'économie mathématique.* P.U.F. (1974).

[14] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, American Mathematical Society (1998).

[15] Gilbarg D. et Trudinger N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of second order.* Springer (1983).

[16] Katznelson Y., *An introduction to hamonic analysis.* Second edition, Dover (1976).

[17] Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach spaces* (2 volumes), Springer (1973, 1979).

[18] Oxtoby J. C., *Measure and category*, 2nd edition, Springer (1980).

[19] Paulin F., *Topologie algébrique élémentaire*, cours à l'ENS, 2001-2002.

[20] Perthame B. *Transport equations arising in biology.*

[21] Reed M. and Simon B., *Methods of modern mathematical physics*, (vomume 1) Acad. Press (1972).

[22] Rudin W., *Real and complex analysis*, 2nd edition, McGraw Hill (1974).

[23] Schatzman M., *Analyse nmérique*, InterEditions (1991).

[24] Schwartz L., *Analyse (topologie générale et analyse fonctionnelle)*, Hermann, Paris (1970). Voir aussi l'édition simplifiée de 1991, *Analyse 1*, Théorie des ensemble et topologie.

[25] Schwartz L., *Théorie des distributions*, Hermann, Paris (1966).

[26] Serre D., *Les matrices, théorie et pratique*, Dunod (2001).

[27] Simmons G. F. Introduction to topology and modern analysis. McGraw-Hill (1963).

[28] Strogatz S. H., *Nonlinear dynamics and chaos*, Addison-Wesley (1994).

[29] R. M. Young, An introduction to nonharmonic Fourier series. Academic Press (1980).

Index