Livret Tremplin - Préparation au Bac

Exercices

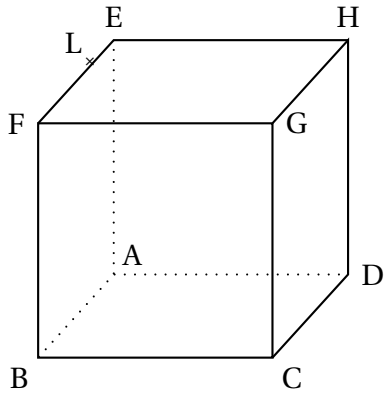
Première partie

QCM et Vrai-faux

1.1 Première série

Les propositions sont soit Vraie, soit Fausse.

1. **Proposition** :
   Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3\mathrm{i}$, $z_B = 1 + \mathrm{i}$ et $z_C = -4\mathrm{i}$ ne sont pas alignés.
2. **Proposition** :
   Il n'existe pas d'entier naturel n non nul tel que $[\mathrm{i}(1+\mathrm{i})]^{2n}$ soit un réel strictement positif.
3. ABCDEFGH est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{\mathrm{EL}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{EF}}$.



   Proposition :
   La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.
   Proposition :
   Le triangle DBL est rectangle en B.
4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;\,5]$ et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous :

x	2	3	4	5
Variations de f	3 ↘	0 ↗	1 ↗	2

   Proposition :
   L'intégrale $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre 1,5 et 6.
5. **Proposition** :
   L'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4 + 6\mathrm{e}^{-2x}}.$$

   Proposition : L'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

7. *Une des quatre réponse est correcte*

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe z

$$(E): \quad z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0,$$

où a désigne un nombre réel quelconque.

- Pour toute valeur de a, (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.
- Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts.
- Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux.
- Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.

8. *Une des quatre réponse est correcte*

Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0\,;\,\pi[$ et z le nombre complexe $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Pour tout réel θ dans l'intervalle $]0\,;\,\pi[$:

- Le nombre z est un réel positif.
- Le nombre z est égal à 1.
- Un argument de z est θ.
- Un argument de z est $\dfrac{\theta}{2}$.

9. *Une des quatre réponse est correcte*

Soit la fonction f définie et dérivable pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

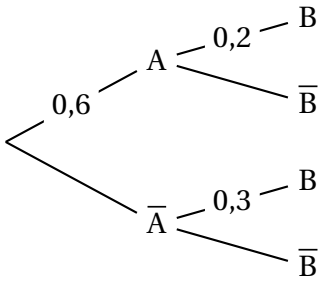
- La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4}\,;\,+\infty\right[$.
- Soit f' la fonction dérivée de f. On a $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
- La fonction f est positive sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
- Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$.
  La fonction F est une primitive de la fonction f.

1.2 Deuxième série

Les propositions sont soit Vraie, soit Fausse.

1. *Une seule des solutions est correcte*

On considère l'arbre de probabilités ci-contre :



Quelle est la probabilité de l'événement B ?

a. 0,12 **b.** 0,2 **c.** 0,24 **d.** 0,5

2. *Une seule des solutions est correcte*

Le césium 137 est un élément radioactif qui constitue une des principales sources de radioactivité des déchets des réacteurs nucléaires. Le temps T, en années, durant lequel un atome de césium 137 reste radioactif peut être assimilé à une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{\ln 2}{30}$.

Quelle est la probabilité qu'un atome de césium 137 reste radioactif durant au moins 60 ans ?

a. 0,125 **b.** 0,25 **c.** 0,75 **d.** 0,875

3. *Une seule des solutions est correcte*

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

Quelle est la valeur arrondie au millième de la probabilité $P(X \geqslant 135)$?

a. 0,159 **b.** 0,317 **c.** 0,683 **d.** 0,841

4. *Une seule des solutions est correcte*

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 100 fois de suite.

Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de la face pile de cette pièce ?

a. [0,371 ; 0,637] **b.** [0,480 ; 0,523] **c.** [0,402 ; 0,598] **d.** [0,412 ; 0,695]

5. *Une seule des solutions est correcte*

Une entreprise souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes de plus de 60 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05.

Quel est le nombre minimum de clients à interroger ?

a. 400 **b.** 800 **c.** 1 600 **d.** 3 200

6. Dans les deux questions suivantes, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives$x+y+z-5=0$ et $7x-2y+z-2=0$.

Proposition : les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

Proposition : les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & t \\ y & = & 2t+1 \\ z & = & -3t+4 \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$

7. Un joueur de jeux vidéo en ligne adopte toujours la même stratégie. Sur les 312 premières parties jouées, il en gagne 223. On assimile les parties jouées à un échantillon aléatoire de taille 312 dans l'ensemble des parties.

On souhaite estimer la proportion de parties que va gagner le joueur, sur les prochaines parties qu'il jouera, tout en conservant la même stratégie.

Proposition : au niveau de confiance de 95 %, la proportion de parties gagnées doit appartenir à l'intervalle [0,658 ; 0,771].

8. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a<b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a\,;\,b]$
TRAITEMENT	Lire a et b Tant que $b-a>0,3$ x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Si $f(x)f(a)>0$, alors a prend la valeur x sinon b prend la valeur x Fin Si Fin Tant que Afficher $\dfrac{a+b}{2}$

Proposition : si l'on entre $a=1$, $b=2$ et $f(x)=x^2-3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,687 5.

9. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Les points A, B, C sont définis par leurs coordonnées :

$$\text{A}(3\,;\,-1\,;\,4), \quad \text{B}(-1\,;\,2\,;\,-3), \quad \text{C}(4\,;\,-1\,;\,2).$$

La droite Δ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1+4t \\ y & = & 4-t \\ z & = & -8+2t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$

Proposition : les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

1.3 Troisième série

Les propositions sont soit Vraie, soit Fausse

1. **Proposition** :
   Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

2. g est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par

$$g(x) = 2x\ln(2x+1).$$

   Proposition :
   Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.

   Proposition :
   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1+\ln 4$.

3. L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
   $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont les plans d'équations respectives : $2x+3y-z-11=0$ et $x+y+5z-11=0$.

   Proposition :
   Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ se coupent perpendiculairement.

4. *Pour chaque question, une seule des réponses est correcte.*
   Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points A(1 ; −1 ; −1), B(1 ; 1 ; 1), C(0 ; 3 ; 1) et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+y-z+5=0$.
   Soit $\mathscr{D}_1$ la droite de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ passant par A.
   Question 1 :
   Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$ est :

   a. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t \\ y &=& -1-t \\ z &=& 1-t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$

   b. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+2t \\ y &=& 1-t \\ z &=& 1+t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$

   c. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5+4t \\ y &=& -3-2t \\ z &=& 1+2t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$

   d. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4-2t \\ y &=& -2+t \\ z &=& 3-4t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$

   Question 2 :
   Soit $\mathscr{D}_2$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& -3-t \\ z &=& 2-2t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R})$.

   a. La droite $\mathscr{D}_2$ et le plan $\mathscr{P}$ ne sont pas sécants
   b. La droite $\mathscr{D}_2$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
   c. La droite $\mathscr{D}_2$ et le plan $\mathscr{P}$ se coupent au point $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ -\dfrac{7}{3}\ ;\ \dfrac{10}{3}\right)$.
   d. La droite $\mathscr{D}_2$ et le plan $\mathscr{P}$ se coupent au point $\mathrm{F}\left(\dfrac{4}{3}\ ;\ -\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{22}{3}\right)$.

   Question 3 :

a. L'intersection du plan $\mathscr{P}$ et du plan (ABC) est réduite à un point.

b. Le plan $\mathscr{P}$ et le plan (ABC) sont confondus.

c. Le plan $\mathscr{P}$ coupe le plan (ABC) selon une droite.

d. Le plan $\mathscr{P}$ et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

Question 4 :

Une mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

a. 22,2 **b.** 0,4 **c.** 67,8 **d.** 1,2

5. **Proposition :**

$$\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^7}\right) + \frac{\ln\left(\mathrm{e}^9\right)}{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)} = \frac{\mathrm{e}^{\ln 2 + \ln 3}}{\mathrm{e}^{\ln 3 - \ln 4}}$$

6. **Propostion :**

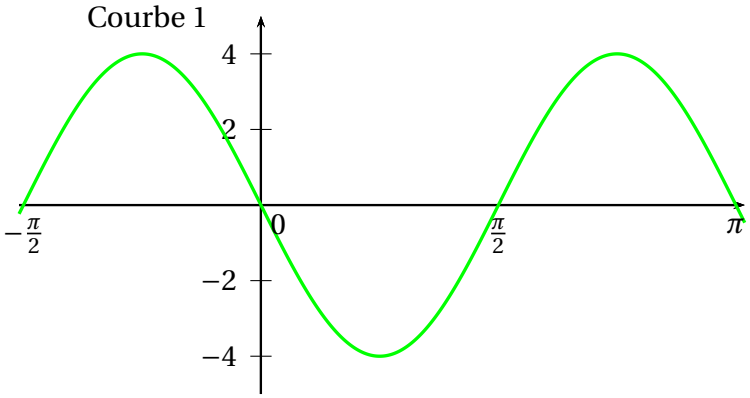
$$\int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 2}\,\mathrm{d}x = -\ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

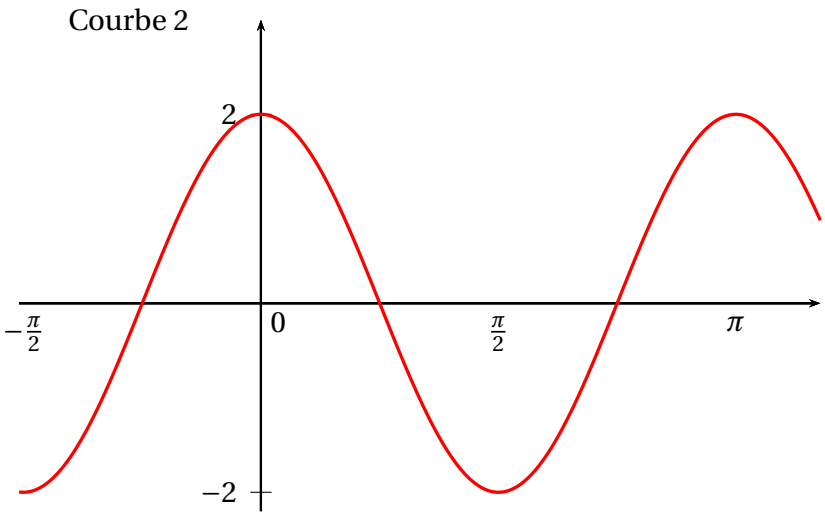
1.4 Quatrième série

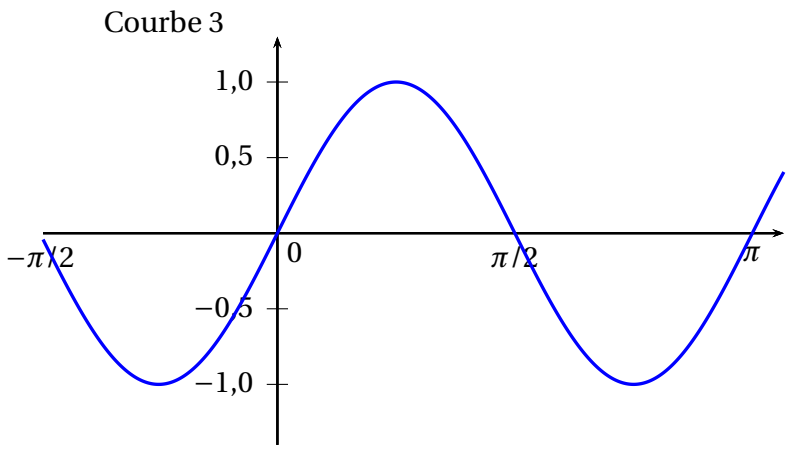
Les propositions sont soit Vraie, soit Fausse.

1. **Proposition** : Pour tout entier naturel n : $(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n$.
2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
   Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.
3. **Proposition** : Pour tout nombre réel α, $1+\mathrm{e}^{2i\alpha} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos(\alpha)$.
4. Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ et M_n le point d'affixe $(z_{\mathrm{A}})^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Proposition : $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$.
6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non constante de réels.
   Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(a_n)$.
   Proposition : on peut choisir la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
7. Dans le plan complexe d'origine O, on considère, pour tout entier naturel non nul n, les points M_n d'affixe $z_n = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}n\pi}{3}}$.
   Proposition : Les points O, M_1 et M_{20} sont alignés.
8. On considère une fonction f, sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.
   Proposition : la courbe 3 ci-dessous est la représentation graphique de f.

Courbe 1







9. On considère, dans un repère orthonormé de l'espace, le point A(0 ; 0 ; 3) et le plan P d'équation $2x - y + z = 0$.

Proposition : la sphère de centre A et de rayon 2 et le plan P sont sécants.

10. Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \dfrac{3}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Proposition : la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

Deuxième partie
Exercices

2.1 Suites

2.1.1 Centres étrangers 2014 - *Exercice 2*

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 16 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. **a.** Calculer z_1, z_2 et z_3.

   b. Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'**annexe, en fin d'exercice**.

   c. Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ sous forme trigonométrique.

   d. Démontrer que le triangle $\mathrm{O}A_0A_1$ est isocèle rectangle en A_1.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   La suite (r_n) est-elle convergente ?

   Interpréter géométriquement le résultat précédent.

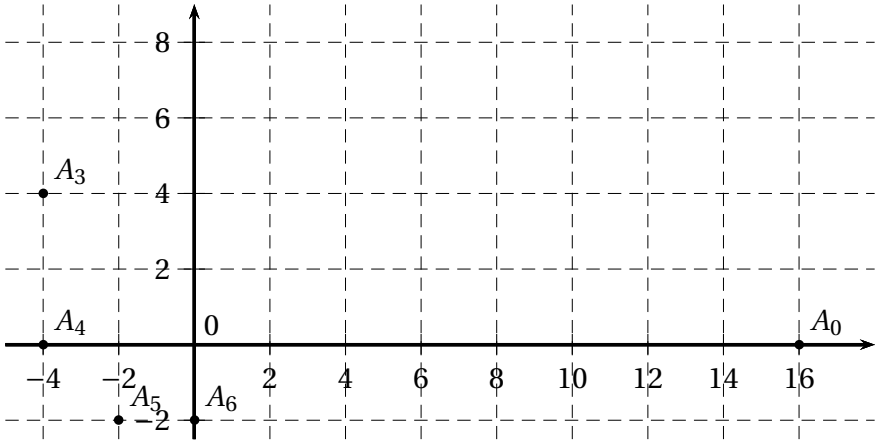
   On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.

   Ainsi $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

   b. Donner une expression de L_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).



2.1.2 Nouvelle-Calédonie 2015 - *Exercice 4*

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} &= \dfrac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} &= \dfrac{1}{2}d_n + \dfrac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1. Calculer d_1 et a_1.

2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n D prend la valeur $\dfrac{D}{2} + 100$ A prend la valeur $\dfrac{A}{2} + \dfrac{D}{2} + 70$ Fin pour
Sortie :	Afficher D Afficher A

a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1.** ?

b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. a. Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

c. La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
$2^n \geqslant n^2$.

c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
$0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{100}{n}$.

d. Étudier la convergence de la suite (a_n).

2.1.3 Nouvelle Calédonie 2016 - *Exercice 5*

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.

Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.

Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.

On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.

Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,8u_n + c.$$

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.
3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1. en justifiant votre réponse.
   Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n)en fonction de n.
3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

2.1.4 Centres étrangers 2015 - *Exercice 3*

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x.$$

a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(2\mathrm{e}^{x} + 1\right)$.

b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que ... ... Fin tant que
Sortie	Afficher n

a. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

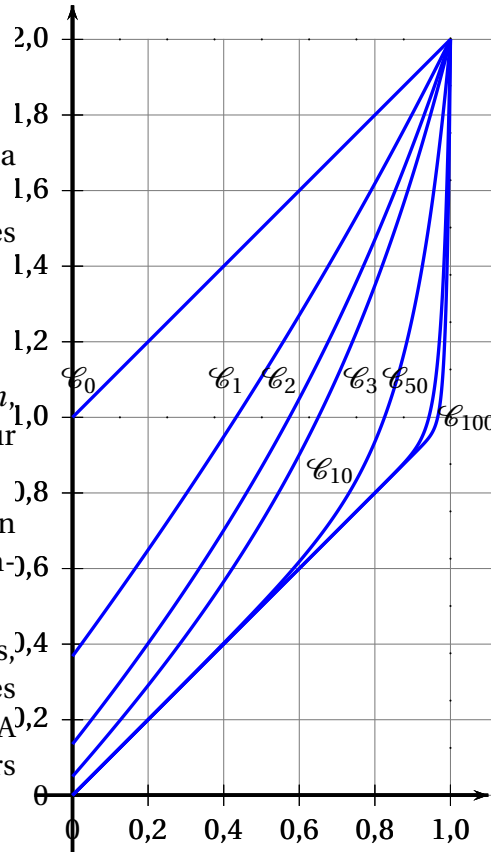
2.2 Fonctions

2.2.1 Asie 2015 - *Exercice 3*

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Quelques-unes des courbes $\mathscr{C}_n$ sont représentées ci-contre.



Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[0\,;1]$.
2. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.
3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathscr{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ?
   Démontrer cette conjecture.

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0\,;1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie C : aire sous les courbes $\mathscr{C}_n$

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

À partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.

2.2.2 Nouvelle-Calédonie 2015 - *Exercice 2*

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^{a}.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

2.2.3 Centres étrangers 2014 - *Exercice 3*

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes : $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, f est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.
Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée
$0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.
Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (\mathrm{e} - 1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.
On définit sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

a. Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$: $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}-2) - (\mathrm{e}-1)x}{1 + (\mathrm{e}-1)x}$;

b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

c. Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.
On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0,05$.

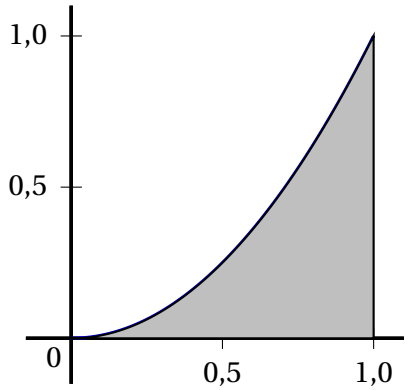
1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.
Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale)
	y (nuance retouchée)
	E (écart)
	c (compteur)
	k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire
	x prend la valeur $\frac{k}{100}$
	y prend la valeur $f(x)$
	E prend la valeur $\lvert y - x \rvert$
	Si $E \geqslant 0,05$, faire
	c prend la valeur $c+1$
	Fin si
	Fin pour
Sortie :	Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-a-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant x$.
On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathscr{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :



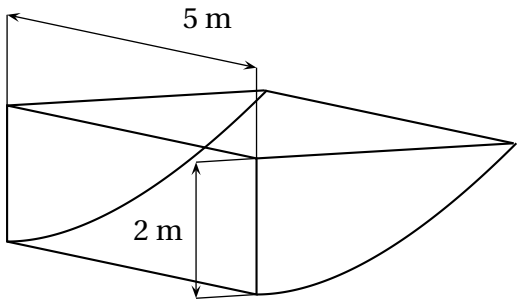
$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{(x^2-1)} \qquad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. **a.** Calculer $\mathscr{A}_{f_1}$.
   b. Calculer $\mathscr{A}_{f_2}$
2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

2.2.4 Amérique du Nord 2016 - *Exercice 2*

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

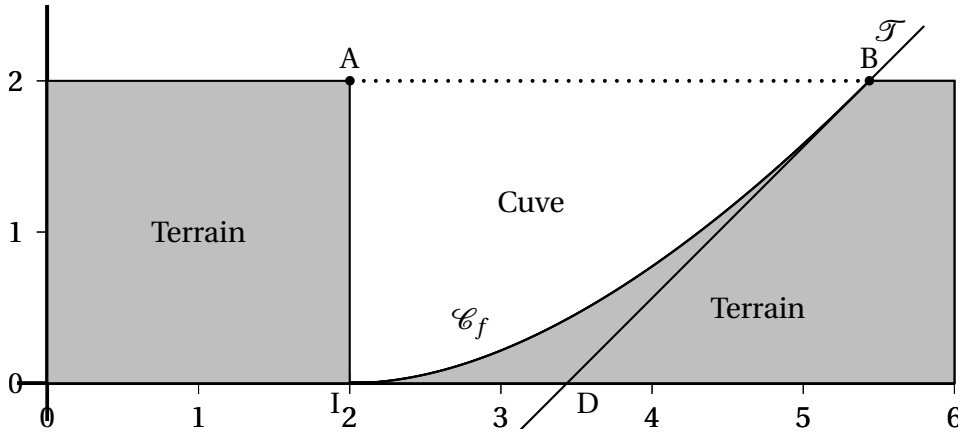
- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.



Cette cuve est schématisée ci-contre.
La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 2e] définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points A(2 ; 2), I(2 ; 0) et B(2e ; 2).



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.
2. On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathscr{T}$ avec l'axe des abscisses.
   a. Déterminer une équation de la droite$\mathscr{T}$ et en déduire les coordonnées de D.
   b. On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2\text{e}$.
   S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.
   Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[2\,;\,2\mathrm{e}]$, la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,2\mathrm{e}]$.

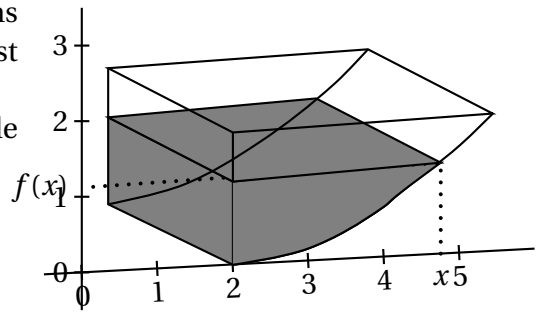
c. Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et 2e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;\,2\mathrm{e}]$,

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$



1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

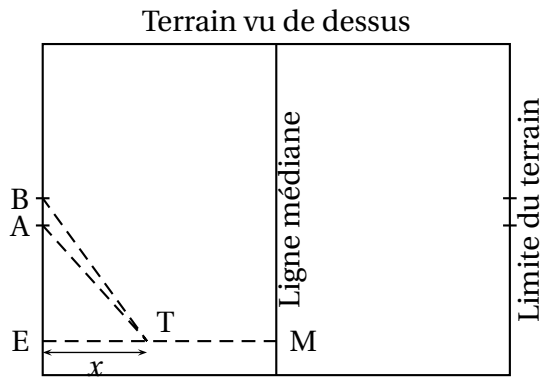
2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.
Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

```
Variables :     a est un réel
                b est un réel
Traitement :    a prend la valeur 2
                b prend la valeur 2 e
                Tant que v(b) − v(a) > 10^−3 faire :
                    c prend la valeur (a + b)/2
                    Si v(c) < V/2, alors :
                        a prend la valeur c
                    Sinon
                        b prend la valeur c
                    Fin Si
                Fin Tant que
Sortie :        Afficher f(c)
```

2.2.5 Métropole 2016 - *Exercice 4*

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].
La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m . On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

   La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

   On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$,

   $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \times \tan b}$.

   Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2+765}$.

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\,;\,50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.

   Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

2.3 Complexes

2.3.1 Antilles-Guyane 2014 - *Exercice 4*

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra comme unité 2 grands carreaux sur chaque axe.
Le graphique sera complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + \text{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
   Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
   On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

   $$|f(z) - 8| = 3.$$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \text{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

   $$x^2 - y^2 + 2x + 9 + \text{i}(2xy + 2y).$$

   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

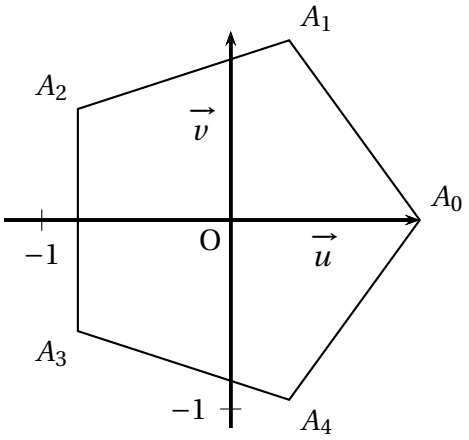
2.3.2 Pondichéry 2016 - *Exercice 2*

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$.

On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ on a $\left(\overrightarrow{OA_k} ; \overrightarrow{OA_{k+1}}\right) = \dfrac{2\pi}{5}$.



1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\dfrac{\text{i}}{2}$.

Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre J et de rayon $\dfrac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K.

Calculer BJ, puis en déduire BK.

2. **a.** Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.

b. Démontrer que ${BA_2}^2 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

c. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :

▶ Calcul formel	
1	cos (4*pi/5) $\rightarrow \dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$
2	sqrt((3 - sqrt(5))/2)
	$\rightarrow \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

« sqrt » signifie « racine carrée »

En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

3. Dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, construire à la règle et au compas un pentagone régulier (sur une feuille cadrillée). N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.

2.4 Géométrie dans l'espace

2.4.1 Métropole (juin) 2014 - *Exercice 4*

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\overrightarrow{\text{AC}},\overrightarrow{\text{AD}}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (DF).
   a. Donner les coordonnées des points D et F.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
   d. Calculer les coordonnées du point H.
   e. Démontrer que l'angle $\widehat{\text{EHG}}$ est un angle droit.
2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{\text{D}M} = t\overrightarrow{\text{DF}}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{\text{E}M\text{G}}$.
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
   a. Démontrer que $M\text{E}^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.
   b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
   En déduire que $M\text{E}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
   c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
   En déduire que α est maximale si et seulement si $M\text{E}^2$ est minimal.
   d. Conclure.

2.4.2 Asie 2016 - *Exercice 3*

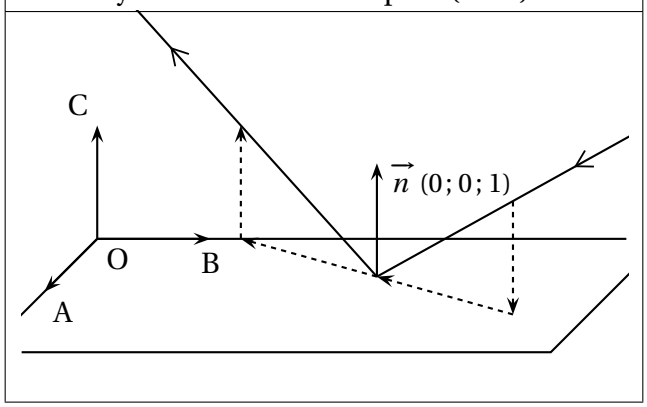
Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs en forme de « coin de cube », les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.
Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(\text{O}\,;\overrightarrow{\text{OA}},\overrightarrow{\text{OB}},\overrightarrow{\text{OC}}\right)$ soit un repère orthonormé.
On utilisera ce repère dans tout l'exercice.
Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admises) :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(a\,;\,b\,;\,-c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(-a\,;\,b\,;\,c)$;

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\ (a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v}\ (a\ ;\ -b\ ;\ c)$;

Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)



1. *Propriété des catadioptres*

En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\ (a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}\ (-2\ ;\ -1\ ;\ -1)$ qui vient frapper le plan (OAB) au point $\mathrm{I}_1\,(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$. Le rayon réfléchi est modélisé par la droite d_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}\ (-2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ et passant par le point I_1.

2. *Réflexion de d_2 sur le plan* (OBC)

a. Donner une représentation paramétrique de la droite d_2.

b. Donner, sans justification, un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne de ce plan.

c. Soit I_2 le point de coordonnées $(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

Vérifier que le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). d_3 est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}\ (2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ passant par le point $\mathrm{I}_2\,(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

3. *Réflexion de d_3 sur le plan* (OAC)

Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC).

On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC). Elle est donc parallèle à la droite d_1.

4. *Étude du trajet de la lumière*

On donne le vecteur $\overrightarrow{u}\ (1\ ;\ -2\ ;\ 0)$, et on note $\mathscr{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

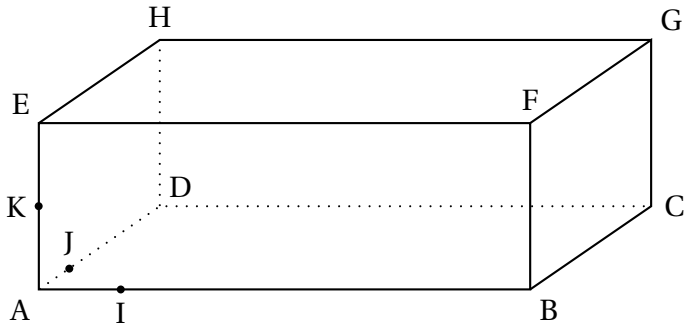
a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b. Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan ?

c. Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan ?

2.4.3 Polynésie 2015 - *Exercice 1*

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB = 6, AD = 4 et AE = 2.
I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI},\,\overrightarrow{AJ},\,\overrightarrow{AK}\right)$.

1. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).
2. Déterminer une équation du plan (IJG).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). Ce tracé sera réalisé sur la figure. On ne demande pas de justification.

2.4.4 Liban 2016 - *Exercice 1*

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée à la fin de l'exercice. Toutes les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AK}\right)$.

1. **a.** Montrer que IE = $\frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

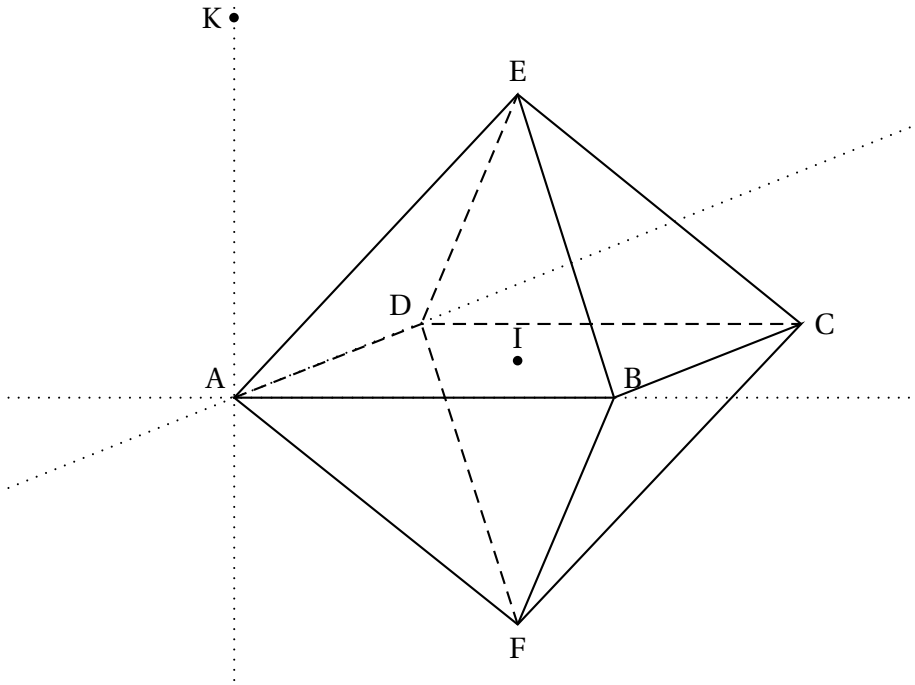
   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).
2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

   a. Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

   b. Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

   c. Construire sur la figure la section du solide ADECBF par le plan (EMN).



2.4.5 Métropole 2014 - *Exercice 4*

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\overrightarrow{\text{AC}},\overrightarrow{\text{AD}}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (DF).
   - **a.** Donner les coordonnées des points D et F.
   - **b.** Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
   - **c.** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
   - **d.** Calculer les coordonnées du point H.
   - **e.** Démontrer que l'angle $\widehat{\text{EHG}}$ est un angle droit.
2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{\text{D}M} = t\overrightarrow{\text{DF}}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{\text{E}M\text{G}}$.
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
   - **a.** Démontrer que $M\text{E}^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.
   - **b.** Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
     En déduire que $M\text{E}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
   - **c.** Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
     En déduire que α est maximale si et seulement si $M\text{E}^2$ est minimal.
   - **d.** Conclure.

2.5 Probabilités

2.5.1 Liban 2014 - *Exercice 1*

Les probabilités seront arrondies au dix millième.

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.

Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.

On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,0192
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée.
Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit le loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}2$.

1. Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.
2. Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?
3. L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ'.
On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.
On note Z' la variable aléatoire égale à $\dfrac{T' - 15}{\sigma'}$

1. Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T'.

2.5.2 Métropole 2016 - *Exercice 1*

Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5 %.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
On note :

A l'évènement « le composant provient de la chaîne A »

B l'évènement « le composant provient de la chaîne B »

S l'évènement « le composant est sans défaut »

1. Montrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,89$.
2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

Partie B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut.

Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A.
Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de $0,92$.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.
2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de $0,02$?

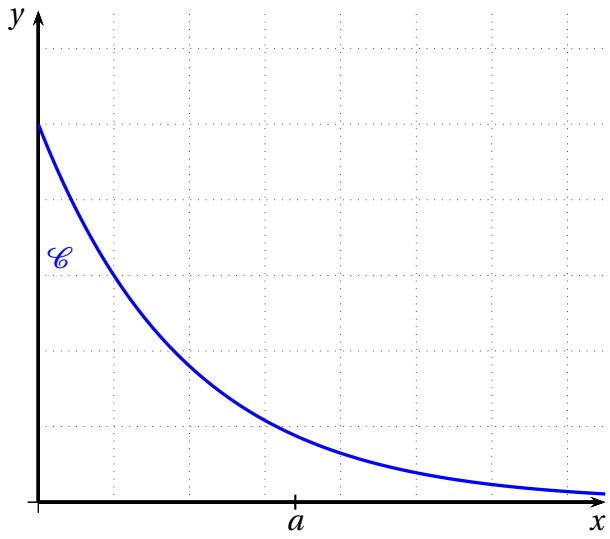
Partie C

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).
On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :

— pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

— pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, $p(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



a. Interpréter graphiquement $P(T \leqslant a)$ où $a > 0$.

b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$: $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

c. En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$.

2. On suppose que $P(T \leqslant 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

c. Donner l'espérance mathématique $\mathrm{E}(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
Interpréter ce résultat.

2.5.3 Amérique du Sud 2014 *Exercice 1*

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de ballons de football. Cette entreprise propose deux tailles de ballons :

— une petite taille,

— une taille standard.

Les trois parties suivantes sont indépendantes.

Partie A

Un ballon de football est conforme à la réglementation s'il respecte, suivant sa taille, deux conditions à la fois (sur sa masse et sur sa circonférence).
En particulier, un ballon de taille standard est conforme à la réglementation lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle [410 ; 450] et sa circonférence, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle [68 ; 70].

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa masse en grammes.
   On admet que X suit la loi normale d'espérance 430 et d'écart type 10.
   Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité
   $P(410 \leqslant X \leqslant 450)$.
2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise associe sa circonférence en centimètres.
   On admet que Y suit la loi normale d'espérance 69 et d'écart type σ.
   Déterminer la valeur de σ, au centième près, sachant que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation.
   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, alors $P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta) = 0,97$ pour $\beta \approx 2,17$.

Partie B

L'entreprise affirme que 98 % de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation.
Un contrôle est alors réalisé sur un échantillon de 250 ballons de taille standard. Il est constaté que 233 d'entre eux sont conformes à la réglementation.
Le résultat de ce contrôle remet-il en question l'affirmation de l'entreprise ? Justifier la réponse.
(On pourra utiliser lintervalle de fluctuation)

Partie C

L'entreprise produit 40 % de ballons de football de petite taille et 60 % de ballons de taille standard.
On admet que 2 % des ballons de petite taille et 5 % des ballons de taille standard ne sont pas conformes à la réglementation. On choisit un ballon au hasard dans l'entreprise.
On considère les évènements :
A : « le ballon de football est de petite taille »,
B : « le ballon de football est de taille standard »,
C : « le ballon de football est conforme à la réglementation » et $\overline{C}$, l'évènement contraire de C.

1. Représenter cette expérience aléatoire à laide dun arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité que le ballon de football soit de petite taille et soit conforme à la règlementation.
3. Montrer que la probabilité de lévènement C est égale à $0,962$.
4. Le ballon de football choisi nest pas conforme à la réglementation. Quelle est la probabilité que ce ballon soit de petite taille ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2.5.4 Nouvelle-Calédonie 2016 - *Exercice 2*

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture. On note X la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes.
Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart-type σ.

1. **a.** Pour tout nombre réel t positif, déterminer une relation entre
   $P(X \leqslant 125 - t)$ et $P(X \geqslant 125 + t)$.

   b. On sait que 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture. En utilisant la relation précédente, déterminer
   $P(121 \leqslant X \leqslant 129)$.

2. Déterminer une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que
   $P(123 \leqslant X \leqslant 127) = 0,68$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $\sigma = 2$.

[resume]On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

1. **a.** On choisit au hasard un pot de confiture de la production. Déterminer la probabilité que ce pot soit conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

   b. On choisit au hasard un pot parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes. Quelle est la probabilité que ce pot ne soit pas conforme ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

2. On admet que la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un pot de confiture soit conforme est $0,988$.

   On choisit au hasard 900 pots dans la production. On constate que 871 de ces pots sont conformes. Au seuil de 95 % peut-on rejeter l'hypothèse suivante : « La machine est bien réglée » ?

2.5.5 Centres étrangers 2015 - *Exercice 1*

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont *premier prix*, et les autres sont *haut de gamme*. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas *haut de gamme*, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *haut de gamme*, et en trouve 19 qui sont défectueux.

   Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?

   On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
2. Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas *premier prix*. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *premier prix*, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.

   Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. Calculer $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.
2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas *premier prix* qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. *On ne réalimente pas le stock en cours de mois.*

   Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Partie C

On admet maintenant que, dans le magasin :

- 80 % des cadenas proposés à la vente sont *premier prix*, les autres *haut de gamme* ;
- 3 % des cadenas *haut de gamme* sont défectueux ;
- 7 % des cadenas sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

- p la probabilité qu'un cadenas *premier prix* soit défectueux ;
- H l'évènement : « le cadenas prélevé est *haut de gamme* » ;
- D l'évènement : « le cadenas prélevé est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Exprimer en fonction de p la probabilité $P(D)$. En déduire la valeur du réel p.

   Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question A - 2. ?
3. Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme*.

2.6 Spécialité

2.6.1 Amérique du Nord 2016 - *Exercice 4*

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1. **a.** Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1), P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \text{ et } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1).$$

   b. Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

   et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1} = R_n \times M$.
   Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$.

3. On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec :

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.
   On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. **a.** Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n.

   b. Sachant que $R_0 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=2)$.
   Interpréter ces résultats.

2.6.2 Centres étrangers 2016 - *Exercice 4*

Le but de cet exercice est d'étudier, sur un exemple, une méthode de chiffrement publiée en 1929 par le mathématicien et cryptologue Lester Hill. Ce chiffrement repose sur la donnée d'une matrice A, connue uniquement de l'émetteur et du destinataire.

Dans tout l'exercice, on note A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Partie A – Chiffrement de Hill

Voici les différentes étapes de chiffrement pour un mot comportant un nombre pair de lettres :

Étape 1	On divise le mot en blocs de deux lettres consécutives puis, pour chaque bloc, on effectue chacune des étapes suivantes.
Étape 2	On associe aux deux lettres du bloc les deux entiers x_1 et x_2 tous deux compris entre 0 et 25, qui correspondent aux deux lettres dans le même ordre, dans le tableau suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Étape 3	On transforme la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vérifiant $Y = AX$.
Étape 4	On transforme la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 celui de la division euclidienne de y_2 par 26.
Étape 5	On associe aux entiers r_1 et r_2 les deux lettres correspondantes du tableau de l'étape 2. Le bloc chiffré est le bloc obtenu en juxtaposant ces deux lettres.

Question : utiliser la méthode de chiffrement exposée pour chiffrer le mot « HILL ».

Partie B - Quelques outils mathématiques nécessaires au déchiffrement

1. Soit a un entier relatif premier avec 26.
   Démontrer qu'il existe un entier relatif u tel que $u \times a \equiv 1$ modulo 26.
2. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	a, u, et r sont des nombres (a est naturel et premier avec 26)
TRAITEMENT :	Lire a
	u prend la valeur 0, et r prend la valeur 0
	Tant que $r \neq 1$
	u prend la valeur $u + 1$
	r prend la valeur du reste de la division euclidienne de $u \times a$ par 26
	Fin du Tant que
SORTIE	Afficher u

On entre la valeur $a = 21$ dans cet algorithme.

a. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

u	0	1	2	...
r	0	21	...	...

b. En déduire que $5 \times 21 \equiv 1$ modulo 26.

3. On rappelle que A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer la matrice $12A - A^2$.

   b. En déduire la matrice B telle que $BA = 21I$.

   c. Démontrer que si $AX = Y$, alors $21X = BY$.

Partie C - Déchiffrement

On veut déchiffrer le mot VLUP.
On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la matrice associée, selon le tableau de correspondance, à un bloc de deux lettres avant chiffrement, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la matrice définie par l'égalité : $Y = AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} X$.
Si r_1 et r_2 sont les restes respectifs de y_1 et y_2 dans la division euclidienne par 26, le bloc de deux lettres après chiffrement est associé à la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $\left\{ \begin{array}{rcr} 21x_1 & = & 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 & = & -7y_1 + 5y_2 \end{array} \right.$

2. En utilisant la question B .2., établir que : $\left\{ \begin{array}{rcll} x_1 & \equiv & 9r_1 + 16r_2 & \text{modulo } 26 \\ x_2 & \equiv & 17r_1 + 25r_2 & \text{modulo } 26 \end{array} \right.$

3. Déchiffrer le mot VLUP, associé aux matrices $\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

2.6.3 Métropole (juin) 2016 - *Exercice 3*

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls (a, b), on note $\text{pgcd}(a, b)$ le plus grand diviseur commun de a et b.
Le plan est muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{2}{3}$.

   a. Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.

   b. Existe-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

   Généralisation

   On considère désormais une droite Δ d'équation (E) : $y = \dfrac{m}{n}x - \dfrac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(m, n) = \text{pgcd}(p, q) = 1$.
   Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.
   Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées $\left(x_0, y_0\right)$ où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

a. En remarquant que le nombre $ny_0 - mx_0$ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np.

b. En déduire que q divise n.

3. Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple $(x_0,\ y_0)$ d'entiers relatifs tels que $y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{p}{q}$.

a. On pose $n = qr$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru - mv = 1$.

b. En déduire qu'il existe un couple $(x_0,\ y_0)$ d'entiers relatifs tels que $y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{p}{q}$.

4. Soit Δ la droite d'équation $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier.

5. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	M, N, P, Q : entiers relatifs non nuls, tels que $\text{pgcd}(M,\ N) = \text{pgcd}(P,\ Q) = 1$ X : entier naturel
Entrées :	Saisir les valeurs de M, N, P, Q
Traitement et sorties :	
	Si Q divise N alors $\quad$ X prend la valeur 0 $\quad$ Tant que $\left(\dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}\text{n'est pas entier}\right)$ $\quad$ et $\left(-\dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}\text{n'est pas entier}\right)$ faire $\quad\quad$ X prend la valeur $X+1$ $\quad$ Fin tant que $\quad$ Si $\dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}$ est entier alors $\quad\quad$ Afficher $X, \dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}$ $\quad$ Sinon $\quad\quad$ Afficher $-X, -\dfrac{M}{N}X - \dfrac{P}{Q}$ $\quad$ Fin Si Sinon $\quad$ Afficher « Pas de solution » Fin Si

a. Justifier que cet algorithme se termine pour toute entrée de M, N, P, Q, entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(M,\ N) = \text{pgcd}(P,\ Q) = 1$.

b. Que permet-il d'obtenir ?

Troisième partie
Plus d'exercices... (bac 2016)

3.1 Pondichéry

Exercice 1

Exercice de **probabilités** sur le temps passé sur internet et la loi Hadopi. Il est assez représentatif des exercices de Bac sur les probabilités/statistiques (une partie sur les probabilités continues, une autre sur les probabilités discrètes avec un arbre pondéré et une dernière sur les intervalles de confiance).

Exercice 2

Exercice sur les **complexes** et la construction d'un pentagone régulier. Le but de l'exercice est de déterminer quelques résultats grâce aux nombres complexes puis de construire un pentagone régulier. C'est un très bon exercice pour s'entrainer aux constructions géométriques à partir des complexes !

Exercice 3

Exercice sur la **géométrie dans l'espace**, et en particulier la géométrie du cube. C'est un exercice qui requiert un large éventail de savoir-faire, et qui est donc intéressant à travailler.

Exercice 3 S

Exercice de codage et décodage à l'aide de matrices 2×2. Le décodage est un sujet récurrent dans les sujets de spécialité étant donné qu'il mêle utilisation de matrices et arithmétique.

Exercice 4

Exercice sur les aires.

Exercice 5

Exercice à la fois sur les **suites** et les **fonctions**. L'idée est de modéliser à la fois de manière discrète (avec des suites arithmético-géométriques) et continue (avec des exponentielles) un phénomène physique (la stérélisation).

3.2 Liban

Exercice 1

Exercice de **géométrie dans l'espace**. L'exercice consiste à partir d'une figure géométrique pour ensuite répondre à des questions classiques de géométrie dans l'espace. La dernière question est un peu plus originale, il s'agit de construire la section entre la figure et un plan : c'est un bon exercice pour vérifier que vous avez bien compris comment construire une intersection plan/figure.

Exercice 2

Exercice de **probabilités** sur un lanceur de balle. Il est classique : loi binomiale, intervalle de fluctuation assymptotique et des probabilités discrètes (la formulation des questions n'est pas usuelle, c'est un bon entrainement pour cela) sont utilisés.

Exercice 3

Cet exercice commence par aborder quelques notions simples sur les fonctions (première partie). La deuxième partie est assez intéressante : elle introduit des suites d'intérales, relativement présentes.

Exercice 4

Vrai-faux abordant plusieurs notions (loi normale, complexes, théorème des valeurs intermédiaires et un peu d'algorithmie).

Exercice 4 S

Vrai-faux avec une partie sur l'arithmétique (divisibilité) et une autre sur un automate (probabilités, les questions sont assez inhabituelles).

Exercice 5

Exercice sur des **suites** arithmético-géométriques complexes, très bien pour réviser ces suites. La dernière question est assez originale.

3.3 Amérique du Nord

Exercice 1

Exercice de **probabilités** très classique (donc à savoir-faire !) sur l'étude de machines de production de billes. La première partie étudie le bon fonctionnement de chaque machine à l'aide de probabilités discrètes. La deuxième étudie la répartition du rayon des billes fabriquées (loi normale). La dernière partie vérifie que le modèle est cohérent avec la réalité (loi binomiale et intervalle de fluctuation).

Exercice 2

Exercice sur l'étude du volume d'un récupérateur d'eau à l'aide de calculs d'**intégrales**. La deuxième partie de l'exercice demande de commenter un algorithme utilisant la dichotomie (version légèrement différente que celle présentée dans les savoir-faire).

Exercice 3

Étude d'une **suite complexe**.

Exercice 4

Exercice où l'on étudie la **géométrie** d'une pyramide. Les études de pyramides sont les plus fréquentes dans les sujets de bac, après celles de cubes. Une grande variété de questions y sont traités : c'est donc un très bon entrainement !

Exercice 4 S

Exercice alliant **probabilités** et **matrices**. Ce type d'exercice, où il faut partir de probabilités conditionnelles et d'une suite de variables aléatoires pour arriver à une matrice permettant de traduire l'évolution du rang n au rang $n+1$ et étudier la suite de matrice résultant pour conclure est un grand classique des exercices de spécialité. À faire !

3.4 Centres étrangers

Exercice 1

Vrai-faux avec une question sur la loi normale, une question sur le théorème des valeurs intermédiaires et deux questions classiques de géométrie dans l'espace.

Exercice 2

Un exercice assez intéressant sur les **intégrales** où l'objectif est de découper l'aire sous la courbe d'une fonction en deux parties égales, d'abord à partir d'exemples simples puis avec une méthode approchée (et des **suites récurrentes** !).

Exercice 3

Exercice de **probabilités** dans la continuité des autres exercices de probabilités. La spécificité de cet exercice réside dans la présence d'intervalle de confiance, dans l'absence de probabilités continues et dans l'utilisation d'un arbre de probabilités.

Exercice 4

Exercice de **géométrie complexe**. L'idée, comme bien souvent, est d'utiliser les complexes pour construire une figure un peu complexe, ici la coquille d'un nautile. Il est assez complexe : c'est un très bon exercice à faire une fois que vous êtes à l'aise sur les complexes.

Exercice 4 S

Exercice sur le chiffrement de Hill : il mélange à la fois **matrices** et **arithmétique**. Ce genre d'exercices est récurrent, il faut savoir le faire ! L'exercice demande de manipuler un algorithme utilisant des divisions euclidiennes, rien de bien compliqué mais l'avoir déjà vu est un plus.

3.5 Polynésie

Exercice 1

Etude de la concentration en alcool en fonction du temps à l'aide de **fonctions exponentielles**. C'est un bon exercice pour travailler l'exponentielle.

Exercice 2

Exercice sur les **suites**. Il est loin d'être évident étant donné qu'il faut piocher dans ses connaissances pour trouver la forme des différentes suites introduites.

Exercice 3

Exercice sur la **probabilité** d'observer sur une étoile filante. Loi exponentielle, probabilités conditionnelles et intervalle de confiance sont nécessaires.

Exercice 4

Vrai-faux avec une question sur l'alignement de points (complexes), une sur les puissances d'un complexe, une sur la section d'un cube par un plan, une sur la nature d'un triangle (3D) et une dernière sur l'encadrement d'une intégrale.

Exercice 4 S

Vrai-faux de spécialité : les deux questions d'arithmétique ne sont pas techniquement dures mais elles nécessitent un certain recul, même chose pour les trois questions sur les matrices.

3.6 Métropole (juin)

Exercice 1

Exercice de **probabilités** sur la fiabilité d'une machine : probabilités conditionnelles, intervalle de confiance et loi exponentielle sont nécessaires.

Exercice 2

Vrai-faux de **géométrie dans l'espace**.

Exercice 3

Exercice sur une étude de fonction **logarithmique** et sur l'utilisation des propriétés trouvées pour étudier une suite récurrente : excellent exercice pour s'entrainer aux suites récurrentes.

Exercice 3 S

Exercice vraiment peu commun d'**arithmétique** : le but est d'étudier les droites rationnelle. L'algorithme présenté en fin d'exercice est lui aussi non commun. Cet exercice est vraiment à faire : il est nécessaire de s'entrainer à résoudre des exercices qui semblent désarmant au premier abord.

Exercice 4

Exercice de **trigonométrie** (oui ça existe !). Rien de vraiment dur si l'on se souvient de ses formules de trigonométries du collège.

3.7 Antilles-Guyane (juin)

Exercice 1

Exercice classique de **probabilités** et l'étude de la fiabilité d'une machine (probabilités conditionnelles, loi exponentielle et intervalle de fluctuation assymptotique).

Exercice 2

Exercice sur l'intersection droite-cercle en utilisant des complexes.

Exercice 3

Etude d'une fonction avec des exponentielles (limites, variations) assez classique.

Exercice 4

Exercice classique de **géométrie** dans un cube.

Exercice 4 S

Exercice dont la première partie est réservée à la résolution d'une **équation diophantienne** et dont la deuxième utilise la même équation (en tant qu'équation de droites) afin d'étudier une **suite matricielle**.

3.8 Asie

Exercice 1

Cet exercice de **probabilités** est composé de deux parties : la première est un vrai-faux sur les probabilités conditionnelles et deux question sur la loi normale constituent la deuxième.

Exercice 2

Exercice sur l'**intégrale** d'une fonction exponentielle.

Exercice 3

Exercice assez récurrent sur l'étude d'un phénomène concret (ici la masse de bactéries) avec une première partie qui le fait à l'aide de **suites arithmético-géométrique**, une deuxième à l'aide de fonctions **exponentielles** et une troisième avec des **statistiques**.

Exercice 4

Exercice sur la **géométrie dans l'espace** liée aux lois de l'optique géométrique : contrairement à bon nombre d'exercices de géométrie dans l'espace assez théorique, celui-ci propose une mise en situation physique !

Exercice 4 S

Exercice sur le chiffrement de Hill : il mélange à la fois **matrices** et **arithmétique**. Ce genre d'exercices est récurrent, il faut savoir le faire ! La première partie établit quelques résultats arithmétiques nécessaires dans la deuxième partie dédiée au codage (et décodage) à l'aide de matrices.

3.9 Métropole (septembre)

Exercice 1

Exercice de **probabilités** des plus classiques, non pas sur l'étude de la fiabilité d'une machine mais du diabète au sein d'une population.

Exercice 2

Étude d'une **suite complexe** non commune. Comme d'habitude, on essaie de se ramener à des choses simples ou connues.

Exercice 3

Encore un exercice de **probabilités** dans ce sujet. On y étudie une suite de variables aléatoires : il est vraiment intéressant de le faire, ce type d'exercices est assez rare, surtout pour ceux qui ne font pas la spécialité (ceux qui la font croiseront surement ce genre d'exercices avec des matrices).

Exercice 3 S

Cet exercice est une déclinaison du précédent avec des **matrices** en plus.

Exercice 4

Exercice sur les **fonctions exponentielles** qui part d'un phénomène physique (comme nombre d'exercice 4 en 2016), la laché de colis depuis un hélicoptère.

3.10 Antilles-Guyane (septembre)

Exercice 1

Exercice sur les **suites d'intégrales**. On y utilise à la fois des propriétés des suites et des intégrales pour étudier cette suite.

Exercice 2

Exercice de **géométrie du cube** classique.

Exercice 3

QCM sur plusieurs parties du programme (complexes, fonctions et probabilités continues)

Exercice 4 S

Exercice sur les **matrices** un peu original puisque il étudie les failles de sécurité d'un parc informatique, en utilisant des suites de matrices et en particulier des suites **arithmético-géométriques**.

3.11 Nouvelle-Calédonie (septembre)

Exercice 1

Exercice sur les **fonctions exponentielles** (étude d'une fonction puis de son intégrale pour ensuite l'appliquer à un probablème concret).

Exercice 2

Exercice de **probabilités** un peu différent des autres étant donné qu'il ne suit pas la répartition classique (un peu de tout) et qu'il s'attarde beaucoup sur la loi exponentielle.

Exercice 3

Étude d'une **fonction complexe**.

Exercice 4

Exercice de **géométrie du cube** (avec dessin d'une intersection plan-cube !).

Exercice 5

Étude d'une **arithmético-géométrique**.

Exercice 5 S

Étude d'une suite un peu particulière à l'aide de **matrices**.

3.12 Amérique du Sud

Exercice 1

Étude d'une **fonction exponentielle** pour ensuite l'utiliser en tant que densité de probabilité. L'exercice est original et à faire !

Exercice 2

Vrai-faux sur les **complexes**.

Exercice 3

Étude d'une **suite récurrente** et détermination d'une valeur à l'aide d'un algorithme.

Exercice 4

Étude d'une pyramide : la première partie a pour but de calculer le volume de cette pyramide, la deuxième se fait à l'aide d'un repère et la troisième utilise les résultats obtenus précédemment pour résoudre un problème concret.

Exercice 5

Exercice de **probabilités continues** (loi exponentielle et loi normale). Il est intéressant étant donné que son cheminement diffère de celui de la majorité des autres exercices de probabilité.

Exercice 5 S

Exercie d'**arithmétique** vraiment intéressant. Il couvre une bonne partie du programme. À faire !