Tremplin - Préparation au Bac

Les “savoir-faire”

Table des matières

Introduction

Fonctionnement du livret

Ce livret contient la grande majorité des choses qu'il faut savoir faire pour pouvoir aborder sereinement le bac. Tous ces savoir-faire et théorèmes sont classés dans les grands thèmes du programme (suites, fonctions, complexes, géométrie dans l'espace, probabilités et statistiques, enseignement de spécialité et algorithmique).
Cette distribution permet de retrouver plus rapidement le savoir-faire que vous chercher. Toutefois, dans certains exercices de bac, plusieurs notions peuvent être mélangées (suites avec probabilités...) : il faut savoir d'adapter !

Comment est se présente un "savoir-faire" ?

✓ **Nom du "savoir-faire" ou théorème** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Détail de ce qu'il faut savoir faire ou énoncé du théorème.

Exemples / Astuces : Des exemples d'utilisation du savoir-faire et/ou des astuces qu'il faut avoir à l'esprit.

Attention ! Ce à quoi il faut faire attention lorsque l'on utilise un théorème.

Pour s'entrainer...

Des références vers des exercices de bac qui utilisent la notion présentée juste avant.

Conseils d'utilisation :

Durant le stage, nous ne prendrons pas le temps de lire ce livret en entier. Toutefois, si vous avez un problème/doute/... en faisant un exercice, venez regarder le "savoir-faire" correspondant dans ce livret !
Chez vous, nous vous conseillons de lire au moins une fois le livret en entier. Ensuite, soit vous continuez de vous en servir comme d'un support en cas de problèmes, soit vous pouvez vous en servir comme d'un moyen de vérifier vos connaissances.

A côté de chaque savoir-faire, il y a une case "maitrisé" et une case "à revoir". Elles vous permettent d'avoir une idée rapide de l'état de vos connaissances sur un sujet en particulier.

Liens utiles pour vos révisions

– **http ://www.apmep.fr/-Terminale-S-240-sujets-depuis-1999-**

Tous les sujets (depuis plus d'une dizaine d'années) du bac S de maths y sont disponibles avec au moins un corrigé pour chaque sujet.
Pour réviser, un moyen parmi les plus efficaces est de faire un certain nombre de ces sujets. Si vous tombez sur un type d'exercice que vous avez déjà fait plusieurs fois, faites-le rapidement (en répondant aux questions sans les rédiger) : il est important que vous vérifiiez que vous savez répondre à ces questions ! Si l'exercice est moins commun, tièrédigez-le enrement pour avoir l'habitude de traiter des questions moins communes.
Une fois l'exercice fini (ou si vous n'arrivez vraiment pas à répondre aux questions : au moins 15 minutes de recherche !), comparez vos résultats et votre rédaction avec le corrigé !

- **http ://www.maths-france.fr/Terminale/TerminaleS/FichesCours/**

  Sur ce site sont présents des fiches de cours pour chaque chapitre du programme et des formulaires sur les dérivées et primitives usuelles, les formules trigonométriques, sur la résolution d'équations et sur les aires et volumes usuels.
  Les fiches de cours peuvent être utiles si vous avez des doutes sur un théorème… et la majorité des formules sont à connaître par cœur !

- **https ://www.kartable.fr/terminale-s**
  http ://xmaths.free.fr/TS/cours/index.php

  Tout le cours y est disponible. Le premier nécessite la création d'un compte. Le deuxième est un peu moins récent.
  Cela peut vous être utile si vous êtes passé rapidement sur certaines parties du cours (en particulier les statistiques ou la géométrie dans l'espace !) ou que vous avez des doutes sur ce que vous avez noté dans votre cours.

- **http ://xymaths.free.fr/Lycee/TS/ROC-Demonstration-Cours-TS.php**

  Toutes les ROC y sont disponibles (avec les démonstrations !).

- **http ://lycee-saint-exupery.fr/portail-lutilisation-calculatrices-au-lycee/**

  Des liens vers des manuels et des notices d'utilisation pour calculatrices (TI et Casio) y sont disponibles.

1 Suites

1.1 Suites usuelles

✓ **Suites arithmétiques** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour montrer qu'une suite u est arithmétique, il faut montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+1} - u_n = r$$

On a alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$.
La somme des $n+1$ premiers termes est égale à $(n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$

Astuce : Les suites arithmétiques que vous croiserez seront très probablement définies par récurrence à l'aide d'autres suites (ce serait trop simple sinon !)

✓ **Suites géométriques** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour montrer qu'une suite u est géométrique, il faut montrer qu'il existe un réel q tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+1} = qu_n$$

On alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 q^n$.
La somme des $n+1$ premiers termes (si $q \neq 1$) est égale à $u_0 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

Astuces : Le risque, lorsque l'on veut montrer qu'un suite est géométrique, est de se perdre dans les calculs. Il faut toujours garder en tête que l'on doit exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, le plus souvent avec une formule de récurrence donnée dans l'énoncé ou démontrée plus tôt.

Les suites présentées en début d'exercice seront rarement géométriques, ce seront la plupart du temps des suites composées avec ces suites de "base" que l'on croisera.

On verra parfois des suites géométriques de raison complexe (le fonctionnement est le même) ; on cherchera souvent à en étudier le module.

Pour s'entrainer...

2016 Amérique du Nord 3, Polynésie 2
2015 Amérique du Nord 2, Antilles-Guyane (juin) 4, Antilles-Guyane (septembre) 3
2014 Pondichéry 3, Liban 4, Centres étrangers 2, Métropole (septembre) 3, Nouvelle-Calédonie (mars) 4

✓ **Suites arithmético-géométriques** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Une suite arithmético-géométrique est une suite définie par une récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$. Les étapes seront tout le temps les mêmes pour déterminer le terme général de u, il faudra passer par une suite auxilliaire (introduite dans l'énoncé), montrer qu'elle est géométrique et en déduire u_n pour tout entier n.

Exemple : Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

L'énoncé introduirait la suite ($v_n = u_n + 1$). On va montrer qu'elle est géométrique :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2(u_n + 1) = 2v_n$$

On en déduit que, pour tout entier n,

$$v_n = v_0 2^n = (u_0 + 1)2^n = 3 \times 2^n$$

puis

$$u_n = v_n - 1 = 3 \times 2^n - 1$$

On peut ensuite vous demander la somme des premiers termes de u, cela ressemble beaucoup à la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

Variante : On aurait pu vous demander de montrer que $u_n = 3 \times 2^n - 1$. Il aurait alors fallu le faire par récurrence.

Pour s'entrainer...

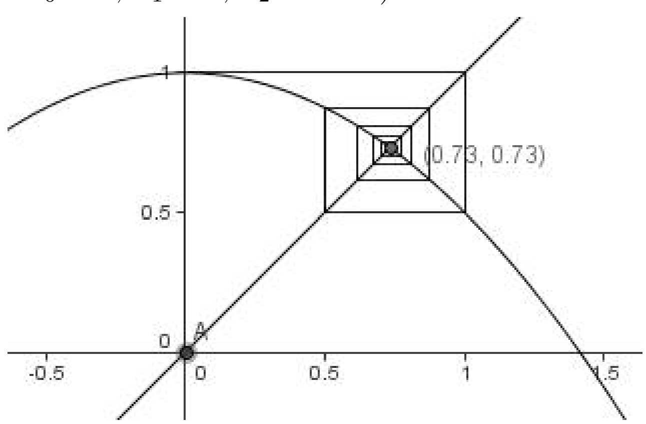
2016 Pondichéry 5, Liban 5, Asie 3, Nouvelle-Calédonie (novembre) 5
2015 Pondichéry 2, Amérique du Sud 4
2014 Amérique du Nord 4, Antilles-Guyane (juin) 4

✓ Suites récurrentes ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Une suite récurrente est une suite définie par une récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (f une fonction continue). Il faut généralement répondre à quelques questions sur la fonction f pour en déduire des propriétés de la suite u.

  Voilà un cheminement de question fréquent : montrer que u est majorée (resp. minorée), croissante (resp. décroissante), en déduire qu'elle converge, que sa limite l vérifie $f(l) = l$ et déterminer la valeur de l.

  La méthode graphique pour déterminer les premiers termes d'une suite récurrente est la suivante (ici $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0.5$...) :



Attention ! Il ne faut surtout par dire que u est croissante parceque f l'est !!!

Pour s'entrainer...

2016 Centres étrangers 2, Métropole (juin) 3, Amérique du Sud 3
2015 Centres étrangers 3, Polynésie 5
2014 Antilles-Guyane (septembre) 2, Nouvelle-Calédonie (novembre) 4

1.2 Propriétés

✓ **Montrer qu'une suite est croissante** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Il faut montrer que, pour tout entier n, $u_n \leq u_{n+1}$. ($u_n \geq u_{n+1}$ si décroissante)

Astuce : La récurrence peut-être utile. Attention toutefois à ne pas vouloir l'utiliser à tout prix. En général, il faudra souvent l'utiliser quand on a déjà montré une autre inégalité auparavant (du type $u_n \leq 0$).

✓ **Montrer qu'une suite est positive** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Il faut montrer que, pour tout entier n, $u_n \geq 0$. ($u_n \leq 0$ si négative)

Astuce : Si l'on vous pose la question, surtout en milieu/fin d'exercice, c'est que la réponse est non évidente. Dans ce cas, il faudra surement utiliser une récurrence. Si c'est en tout début d'exercice, la réponse est surement assez simple. Il n'y aura donc normalement pas besoin d'utiliser une récurrence.

✓ **Plus petit entier n tel que...** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Parfois, il faut trouver le plus petit entier naturel tel qu'une suite soit majorée (ou minorée) par A. Deux façons de faire sont possibles, soit à la "main", soit à l'aide d'un algorithme, appelé algorithme de seuil (voir la partie dédiée aux algorithmes).

Exemple : Quel est le plus petit entier n_0 tel que $2^n + 500 \geq 2000$.

$$2^n + 500 \geq 2000 \Leftrightarrow 2^n \geq 1500 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(1500)}{\ln(2)} \approx 10,6$$

On en déduit $n_0 = 11$.

1.3 Limites

✓ **Formes indéterminées** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Les SEULES formes indéterminées (pour $+$, $-$, $\times$ et $/$) sont : $+\infty - \infty$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $0 \times \infty$.

Astuce : Lorsque l'on a une forme indéterminée, il faut souvent factoriser (lorsque l'on a des produits ou quotients). Voir le savoir-faire sur les limites de fractions rationnelles (partie fonctions) pour un des cas qui peut se présenter.

✓ **Limite de q^n** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- La limite dépend de la valeur de q :
  $q \leq -1$: q^n n'admet pas de limite
  $-1 < q < 1$: q^n tend vers 0
  $q = 1$: q^n tend vers 1
  $q > 1$: q^n tend vers $+\infty$

✓ **Théorème de convergence monotone** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

Théorème : Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge.

Attention ! Si u est majorée par A, cela n'implique pas que u tend vers A !

Pour utiliser ce théorème, une rédaction possible est "*La suite u est majorée par A et est croissante. Elle est donc convergente.*".

✓ **Théorème des gendarmes** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

Théorème : Soient u, v, et w trois suites telles que u et w tendent vers la même limite l et pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Alors, v tend vers l.

Attention ! Les inégalités peuvent être des inégalités large. On rappelle aussi, que si l'on a pour tout n, $u_n < v_n$, avec u convergeant vers l et v vers l', on a $l \leq l'$ et non pas $l < l'$!

2 Fonctions

2.1 Méthodes élémentaires

✓ **Montrer qu'une fonction est croissante/décroissante** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Bien souvent, les fonctions considérées seront dérivables. Après avoir montrer que la fonction est dérivable et l'avoir dérivée, on regarde le signe de la dérivée. Si elle est positive, la fonction est croissante ; si elle est négative, la fonction est décroissante. Si toutefois la fonction n'est pas dérivable, on revient à la définition ($x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$).

  Pour montrer qu'une fonction est constante sur un intervalle I, il suffit de montrer que sa dérivée s'annule sur I.

✓ **Tableau de variation** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- La méthode générale à suivre est la suivante (pour les fonctions dérivables) :
  1. Dériver la fonction et factoriser sa dérivée (si possible).
  2. Etudier le signe de la fonction dérivée. Si on a un produit, on fait un tableau de signe pour chaque terme, puis on en fait la synthèse (en utilisant les règles du produit).

     Attention ! C'est uniquement possible à partir d'un produit et surtout pas à partir d'une somme.
  3. On en déduit les variations de la fonction.
  4. On rajoute les valeurs particulières, valeurs interdites (doubles barres) et les limites, si on les connait.

Exemple : Soit f la fonction définie pour tout réel non nul x par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

– $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x x - e^x}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$

– On étudie le signe de la dérivée (via un tableau de signe) puis les variations de la fonction :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$			0	$+$	
$\frac{e^x}{x^2}$		$+$	||		$+$		
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Pour s'entrainer...

2016 Métropole (juin) 3, Antilles-Guyane (juin) 3, Nouvelle-Calédonie (novembre) 1
2015 Centres étrangers 3, Polynésie 4 (juin), Antilles-Guyane (juin) 1, Métropole (juin) 4, Polynésie (septembre) 1, Antilles-Guyane (septembre) 1
2014 Polynésie 4, Antilles-Guyane (juin) 2

✓ Déterminer les extremum d'une fonction dérivable ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- On commence par dériver la fonction, puis on s'intéresse aux points d'annulation de la fonction. Si la dérivée est négative avant x_0, positive après, c'est que la fonction atteint un minimum local en x_0. Si elle est positive puis négative, c'est un maximum local.

Astuce : Lorsque l'on veut avoir, un maximum global, il est souvent intéressant de faire puis utiliser un tableau de variation, pour avoir une idée de ce qu'il faudra montrer.

Pour s'entrainer...

2016 Pondichéry 4, Polynésie 1, Métropole (juin) 4
2015 Métropole 2, Antilles-Guyane 4
2014 Centres étrangers 3, Nouvelle-Calédonie (mars) 1

✓ Position relative de deux courbes ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- La courbe d'équation $y = f(x)$ et au dessus de celle d'équation $y = g(x)$ sur l'intervalle I si et seulement si

$$\forall x \in I \ f(x) \geq g(x)$$

Les points d'intersections des deux courbes ont pour abscisse x avec x vérifiant $f(x) = g(x)$.

Pour s'entrainer...

2016 Antilles-Guyane (juin) 3
2015 Liban 3, Amérique du Nord 4, Polynésie (septembre) 1
2014 Pondichéry 4, Polynésie 4

2.2 Propriétés des fonctions usuelles

✓ **Propriétés du logarithme et de l'exponentielle** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

$\mathrm{e}^0 = 1$	$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$	$\mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n$	$\mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}$
$\ln(1) = 0$	$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$	$\ln(a^n) = n\ln(a)$	$\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$

✓ **Propriétés des fonctions trigonométriques** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

2.3 Limites

✓ **Montrer l'existence d'une asymptote verticale/horizontale** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Une courbe admet une asymptote horizontale si la fonction qui lui est associée tend vers une limite **finie** l en $\pm\infty$ (la courbe admet alors comme asymptote horizontale en $\pm\infty$ la droite d'équation $y = l$).

  Une courbe admet une asymptote verticale en x_0 si la fonction tend vers $\pm\infty$ à droite ou à gauche de x_0 (la courbe représentative de la fonction admet alors la droite d'équation $x = x_0$ comme asymptote verticale).

Exemple : La courbe représentative de ln admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale comme $\lim\limits_{x\to 0_+} \ln(x) = -\infty$.

La courbe représentative de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+x} = 1$.

Pour s'entrainer...

2015 Pondichéry 1, Polynésie (septembre) 1, Amérique du Sud 1
2014 Liban 3
2013 Amérique du Nord 4, Polynésie (juin) 1

✓ **Montrer qu'une droite est asymptote oblique** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $\pm\infty$, il faut montrer que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax - b) = 0$

Astuce : On vous demandera surement de déterminer la position relative de la courbe par rapport à cette asymptote, voir "Position relative de deux courbes".

✓ **Limite d'une fraction rationnelle** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour trouver la limite d'une fraction rationnelle du type $F(x) = \dfrac{a_n x^n + ... + a_0}{b_m x^m + ... + b_0}$ en $\pm\infty$, il faut mettre en facteur au numérateur et au dénominateur le terme de plus haut degré :

$$F(x) = \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \times \frac{1 + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_n x^n} + ... + \frac{a_0}{a_n x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}x^{m-1}}{b_m x^m} + ... + \frac{b_0}{b_m x^m}}$$

  Il faut ensuite montrer que la deuxième fraction tend vers 1 quand x tend vers l'infini et déterminer la limite de la première fraction. Cette limite sera donc la même que celle de F.

Exemple : Limite en $+\infty$ de : $F(x) = \dfrac{2x^2+4}{5x^2+15} = \dfrac{2x^2}{5x^2} \times \dfrac{1+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}$. Comme $\dfrac{2x^2}{5x^2}$ tend vers $\frac{2}{5}$, il en est de même pour F.

✓ **Autres limites** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^a} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

Pour s'entrainer...

2016 Polynésie 1, Antilles-Guyane (juin) 3, Nouvelle-Calédonie (novembre) 1
2015 Antilles-Guyane (juin) 1, Antilles-Guyane (septembre) 1

2.4 Dérivées, primitives et intégrales

✓ **Dérivées** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

Fonction f définie par :	**Fonction f' :**	**Ensemble de dérivabilité :**
$f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^{-n}, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -nx^{-(n+1)}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = x^{-1}$	$]0; +\infty[$

✓ **Formules de dérivation** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Soient u et v deux fonctions dérivables.

Fonction f définie par :	**Fonction f' :**
uv	$u'v + v'u$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$u \circ v$	$v' \times u' \circ v$

Astuce : La dernière formule permet d'en retrouver beaucoup d'autres (dérivée de $1/u$, e^u, $1/\sqrt{x}$...), il est important de bien la maitriser !

✓ Équation de la tangente ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en a est

$$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Réciproquement, si l'on connaît l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en a, on peut connaître $f'(a)$ (c'est le coefficient directeur de la tangente).

Astuces : Pour montrer que la tangente à la courbe en a est parallèle ave une autre droite, il suffit de montrer $f'(a)$ est égal au coefficient directeur de l'autre droite.

On vous demandera parfois d'étudier la position relative de la courbe par rapport à sa tangente en un point.

Pour s'entrainer...

2016 Amérique du Nord 2, Amérique du Sud 1
2015 Liban 3, Polynésie (juin) 4

✓ Primitives ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

Fonction f définie par :	**Primitive F définie par :**	**Intervalle :**
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^{-n}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$	$F(x) = -\frac{x^{-n+1}}{n-1} + k$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$	$F(x) =]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x + k$	$\mathbb{R}$

✓ Primitives composées ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Voilà quelques formules à savoir reconnaître et utiliser :

Fonction	**Primitive**
u'u^n	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$\dfrac{u'}{u^n}(n \geq 2)$	$\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
u'e^u	e^u
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$

✓ Valeur moyenne d'une fonction ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

✓ Croissance de l'intégrale ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Si

$$\forall x \in [a;b] f(x) \leq g(x)$$

  Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Astuce : Cette propriété est particulièrement utile lorsque l'on veut encadrer une intégrale à partir de sa courbe représentative : si l'on arrive à calculer l'aire d'un polygone situé "au-dessus" de la courbe et d'un autre situé "en-dessous", on peut encadre l'intégrale de la fonction par ces deux aires.

Lorsque l'on étudie une suite d'intégrales définie pour tout entier n par

$$I_n = \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

on cherchera très souvent à montrer une inégalité du type

$$\forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

pour ensuite utiliser la croissance de l'intégrale et montrer que (I_n) est croissante.

Pour s'entrainer...

2016 Pondichéry 5, Liban 3, Amérique du Nord 2
2015 Liban 2, Antilles-Guyane (septembre) 2
2014 Métropole (juin) 1, Asie 4

2.5 Théorème des valeurs intermédiaires

✓ **Théorème des valeurs intermédiaires** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

Théorème : Soit f une fonction CONTINUE définie sur $[a;b]$. Soit A un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $\alpha \in [a;b]$ tel que $f(\alpha) = A$.

Attention ! L'hypothèse INDISPENSABLE est la continuité de f. Il ne faut surtout pas oublier cette hypothèse !

On peut aussi appliquer le théorème en transformant les crochets fermés par des crochets ouverts. À ce moment-là, ce n'est plus la valeur de la fonction en la borne de l'intervalle mais sa limite.

Il faut utiliser ce théorème lorsque l'on demande de prouver l'EXISTENCE d'une solution à l'équation $f(x) = A$. Dès que l'on demande de compter le nombre de solutions, il faudra utiliser le corollaire du théorème (voir le prochain savoir-faire).

✓ **Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

Théorème : Soit f une fonction continue, strictement monotone, définie sur $[a;b]$. Soit A un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $\alpha \in [a;b]$ tel que $f(\alpha) = A$.

Attention ! On utilise le corollaire uniquement s'il y a une notion de NOMBRE de solutions dans la question.
Il faut souvent segmenter l'intervalle de définition de la fonction en plusieurs parties sur lesquelles la fonction est strictement monotone.

Pour s'entrainer...

2016 Polynésie 1, Nouvelle-Calédonie (novembre) 1
2015 Pondichéry 1, Amérique du Nord 4, Antilles-Guyane 1
2014 Liban 3, Centres étrangers 3, Asie 3, Métropole (septembre) 1

3 Nombres complexes

3.1 Forme exponentielle et forme algébrique

✓ **Module et conjugué, quelques règles** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

$$|a+\mathrm{i}b| = \sqrt{a^2+b^2},\ |zz'| = |z||z'|,\ \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$$
$$\overline{a+\mathrm{i}b} = a - \mathrm{i}b,\ \overline{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},\ \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

✓ **Passage d'une écriture à l'autre** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour exprimer $z = a + ib$ sous forme exponentielle, il faut trouver θ tel que $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$. On a alors $z = \sqrt{a^2+b^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
  L'opération inverse se fait de la manière suivante : $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\cos(\theta) + \mathrm{i}r\sin(\theta)$

Astuce : On utilise plutôt la forme algébrique pour les sommes et la forme exponentielle pour les produits/quotients. Toutefois le passage à la forme exponentielle peut-être assez fastidieux, c'est pourquoi vous verrez des calculs de quotients à partir de formes algébriques (voir le prochain savoir-faire).

Pour s'entrainer...

2016 Pondichéry 2, Amérique du Nord 3, Centres étrangers 4, Métropole (septembre) 2, Nouvelle-Calédonie (novembre) 3
2015 Polynésie (juin) 2, Asie 4, Métropole (juin) 3, Polynésie (septembre) 1, Nouvelle-Calédonie (mars) 4
2014 Métropole (juin) 3, Antilles-Guyane (septembre) 3

✓ **Calcul d'un quotient (forme algébrique)** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Lorsque l'on vaut exprimer un quotient sous forme algébrique, il faut multiplier le dénominateur et le numérateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{a+\mathrm{i}b}{a'+\mathrm{i}b'} = \frac{(a+\mathrm{i}b)(a'-\mathrm{i}b')}{(a'+\mathrm{i}b')(a'-\mathrm{i}b')} = \frac{aa'-bb'}{a'^2+b'^2} + \mathrm{i}\frac{a'b-b'a}{a'^2+b'^2}$$

Exemple : $\frac{5+\mathrm{i}2}{2+\mathrm{i}4} = \frac{(5+\mathrm{i}2)(2-\mathrm{i}4)}{(2+\mathrm{i}4)(2-\mathrm{i}4)} = \frac{10-8}{2^2+4^2} + \mathrm{i}\frac{\dot{2}\dot{4}-2\dot{5}}{2^2+4^2} = \frac{1}{10} + \mathrm{i}\frac{-2}{20}$

Pour s'entrainer...

2016 Nouvelle-Calédonie (novembre) 3

3.2 Géométrie

✓ **Calcul d'un angle entre 3 points** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Soient A, B, et C trois points du plan, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. L'angle orienté $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est égal à $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)$.

Astuces : Pour faire le calcul, il faudra utiliser les savoir-faire "calcul de quotient" et "passage d'une écriture à l'autre", d'abord faire le calcul du quotient puis calculer θ.

Pour montrer que 3 points sont alignés, il suffit de montrer que l'angle entre ces trois points est congru à 0 modulo π.

Pour s'entrainer...

2016 Liban 5, Centres étrangers 4

✓ **Équations faisant intervenir des modules/conjugués** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Il existe plusieurs types d'équations faisant intervenir des modules/conjugués :
  - **Équation de cercle** : $|z - z_A| = R$ si et seulement si le point d'affixe M appartient au cercle de centre A (d'affixe z_A) et de rayon R.

    Si l'on vous demande de retrouver le centre et le rayon du cercle à partir d'une équation de cercle avec des x et y, la démarche est la suivante :
    1. Regarder les coefficients devant le x ($-\frac{x_0}{2}$) et le y ($-\frac{y_0}{2}$)
    2. Faire apparaître $(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2$ dans le membre de gauche
    3. Déterminer R (racine carrée de ce qui reste de l'autre côté de l'équation)
  - **Équation de médiatrice** : $|z - z_A| = |z - z_B|$ si et seulement si le point d'affixe M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ avec A et B les points d'affixes z_A et z_B.
  - **Équation non directement reconnaissable :** Introduire la notation algébrique de z et essayer de se rammener à des équations de cercle/droite (il y aura très rarement autre chose). Parfois, il faudra identifier partie réelle et partie imaginaire pour résoudre un système.

  Attention ! Dans toutes ces équations, il est nécessaire que le coefficient devant le z soit 1. Si ce n'est pas le cas, on met en facteur le module du coefficient devant le z pour s'y ramener.

Astuce : En général, il faut mieux essayer de manipuler les modules/conjugués pour faire apparaître des équations connues. Si vous arrivez à vous représenter géométriquement l'équation, cela peut-être une bonne aide. Il ne faut pas se lancer tête baissée dans les calculs ; mais il y a des situations dans lesquelles on ne peut y échapper.

Si l'on remplace le $=$ par un $\leq$ dans une équation de cercle, elle devient une équation de disque.

Pour s'entrainer...

2016 Liban 4, Antilles-Guyane (juin) 2, Amérique du Sud 2
2015 Centres étrangers 2
2014 Antilles-Guyane (septembre) 3

3.3 Équations du second degré

✓ **Solutions d'une équation du second degré** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- On considère l'équation $aX^2 + bX + c = 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

  - $\boldsymbol{\Delta > 0}$, deux solutions réelles : $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  - $\boldsymbol{\Delta = 0}$, une solution réelle : $\dfrac{-b}{2a}$.
  - $\boldsymbol{\Delta < 0}$, deux solutions complexes (conjuguées) : $\dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Astuce : Une fois que l'on a trouvé les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$, on peut factoriser $aX^2 + bX + c$: $aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$.

4 Géométrie dans l'espace

4.1 Les bases

✓ Norme d'un vecteur ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- La norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

✓ Milieu d'un segment ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points, alors le milieu de AB a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

✓ Montrer que deux vecteurs sont colinéaires ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $u = k\vec{v}$.
  Si l'on veut montrer que les vecteurs sont non colinéaires, il faut trouver plusieurs valeurs "possibles" de k.

Astuces : Si l'on veut montrer que deux plans sont parallèles, on montre que deux vecteurs normaux à chacun des deux plans sont colinéaires.

A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Pour s'entrainer...

2016 Liban 1, Amérique du Nord 4, Métropole (juin) 2

2015 Pondichéry 4, Amérique du Nord 1, Métropole (septembre) 3, Polynésie (septembre) 3, Amérique du Sud 2

✓ Montrer que 3 points forment un plan ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- A, B et C trois points de l'espace. Pour montrer que les points A, B et C forment un plan, il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

✓ Montrer que trois vecteurs sont coplanaires ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, il faut trouver λ et μ des réels tels que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$. Pour trouver λ et μ, on résout un système d'équations (3 équations, 2 inconnues). Si l'on trouve deux valeurs possibles pour λ ou μ, c'est que les vecteurs ne sont pas coplanaires.

Astuce : Pour montrer que deux droites sont coplanaires, il suffit de montrer que deux vecteurs directeurs et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec A un point de la première droite et B un point de la deuxième sont coplanaires.

Pour s'entrainer...

2016 Amérique du Nord 4, Asie 4
2014 Liban 4, Nouvelle-Calédonie (mars) 3

✓ Calculer un produit scalaire ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Soient $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs. Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

  On a aussi $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos((\vec{u}; \vec{v}))$. On peut ainsi calculer un angle entre 2 vecteurs ou 3 points à partir de deux calculs du produit scalaire différents.

✓ Vecteurs orthogonaux et vecteur normal à un plan ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

  Un vecteur $\vec{u}$ est normal à un plan si et seulement si, pour 3 points A, B et C du plan tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{u}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Astuce : Si l'on veut montrer que deux droites sont orthogonales, il suffit de montrer que deux vecteurs non nuls portant chacune des droites sont orthogonaux. Si ces deux droites sont sécantes alors elles sont perpendiculaires (la perpendicularité nécessite l'intersection).

En connaissant un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan, on peut facilement montrer qu'une droite est parallèle à un plan (en montrant qu'un vecteur directeur de la droite est orthogonal à $\vec{n}$) ou perpendiculaire à ce plan (vecteur directeur colinéaire à $\vec{n}$).

✓ Montrer qu'un repère est orthonormé ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé si les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux et unitaires (de norme 1).

4.2 Équations paramétriques et cartésiennes

✓ Équation paramétrique d'une droite ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$, alors une équation paramétrique de $(\mathcal{D})$ est

$$\begin{cases} x &= x_A + at \\ y &= y_A + bt, t \in \mathbb{R} \\ z &= z_A + ct \end{cases}$$

  Cette représentation est utile si l'on veut déterminer l'intersection de deux droites (on résout un système; si on trouve deux valeurs possibles pour un paramètre c'est que l'intersection et vide)

Astuce : Réciproquement, si on a une équation paramétrique de droite on peut retrouver un point (en prenant le paramètre nul par exemple) et un vecteur directeur, de coordonnées $(a; b; c)$.

Pour s'entrainer...

2016 Asie 4, Antilles-Guyane (septembre) 2, Amérique du Sud 4
2015 Liban 1, Amérique du Nord 1, Centres étrangers 2, Métropole (septembre) 3, Antilles-Guyane 4

✓ Équation paramétrique d'un plan ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Soit $\mathcal{P}$ un plan. Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de ce plan et $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ deux vecteurs directeurs de ce plan, alors une équation paramétrique de $(\mathcal{P})$ est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + at + a't' \\ y & = & y_A + bt + b't', (t, t') \in \mathbb{R}^2 \\ z & = & z_A + ct + c't' \end{array}\right.$$

Cette représentation est utile pour déterminer l'intersection de deux plans.

Astuce : Là encore, on peut récupérer un point et deux vecteurs directeurs d'un plan à partir de son équation paramétrique.

Pour s'entrainer...

2015 Amérique du Sud 2

✓ Équation cartésienne d'un plan ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour déterminer une équation cartésienne d'un plan, on a besoin d'un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ au plan (voir savoir-faire "vecteurs orhtogonaux et vecteur normal à un plan") et d'un point $A(x_A; y_A; z_A)$ appartenant au plan.
Alors une équation cartésienne du plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec d une constante à déterminer. Pour se faire, on injecte les coordonnées de A dans cette équation :

$$ax_A + by_A + cz_A + d = 0$$

L'équation cartésienne du plan est donc

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

Astuce : Il est bien de conaître les deux formes ($ax + by + cz + d = 0$ et $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$), ou tout du moins de savoir passer de la première à la deuxième si l'on vous demande de redémontrer la deuxième équation. La deuxième équation peut être utilisée directement pour gagner du temps.

Pour s'entrainer...

2016 Pondichéry 3, Liban 1, Antilles-Guyane (juin) 4, Asie 4, Antilles-Guyane (septembre) 2, Amérique du Sud 4
2015 Pondichéry 4, Liban 1, Amérique du Nord 1, Polynésie 1, Métropole (juin) 2, Nouvelle-Calédonie (novembre) 3

4.3 Intersections

✓ **Intersection de deux droites/plans** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Les intersections possibles sont :
  - Un plan (intersection de deux plans confondus).
  - Une droite (intersection de deux plans sécants non confondus, intersection de deux droites confondues et intersection d'un plan avec une droite inscrite dans ce plan).
  - Un point (intersection de deux droites séacantes non confondues, intersection d'un plan avec une droite coupant le plan mais non insrit dans celui-ci).
  - L'ensemble vide (si les droites/plans ne sont pas sécantes).

  Les méthodes à utiliser pour certaines de ces intersections sont détaillées dans les savoir-faire suivants.

Astuce : On cherchera à déterminer les différents paramètres (les t), puis à réinjecter les différentes valeurs dans l'un des deux systèmes d'équation.

✓ **Intersection de deux droites** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Si l'on doit montrer que deux droites sont sécantes, alors que l'on connaît A et B deux points de la première droite et C et D deux points de la deuxième, il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont non colinéaires et que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ (c'est-à-dire que A, B, C et D sont coplanaires).

  On peut aussi, pour déterminer leur intersection, passer par les représentations paramétriques des deux droites (aussi pour montrer qu'elles sont sécantes).

Exemple : L'intersection de la droite d'équation

$$\begin{cases} \text{x} & = & \text{-1 + 2t} \\ \text{y} & = & \text{5+t, t}\in \mathbb{R} \\ \text{z} & = & \text{3t} \end{cases}$$

et celle d'équation

$$\begin{cases} \text{x} & = & \text{-3 + 6t'} \\ \text{y} & = & \text{4 + t', t'}\in \mathbb{R} \\ \text{z} & = & \text{-3 +8t'} \end{cases}$$

est $\{-3; 4; -3\}$. Pour obtenir cela, on résout le système d'équations (2 inconnues t et t' et 3 lignes) et on trouve $t = -1$ et $t' = 0$.

Astuce : Le choix de la méthode dépend de ce dont on dispose.

Pour s'entrainer...

2016 Centres étrangers 1
2015 Liban 1

✓ **Montrer qu'une droite est contenue un plan** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Si l'on connaît une représentation paramétrique de la droite et une équation cartésienne du plan, il suffit d'insérer les coordonnées de la droite (dépendant d'un paramètre) dans "$ax + by + cz + d$". Si on trouve 0 quelque soit la valeur du paramètre, la droite est dans le plan.

✓ **Théorème du toit** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

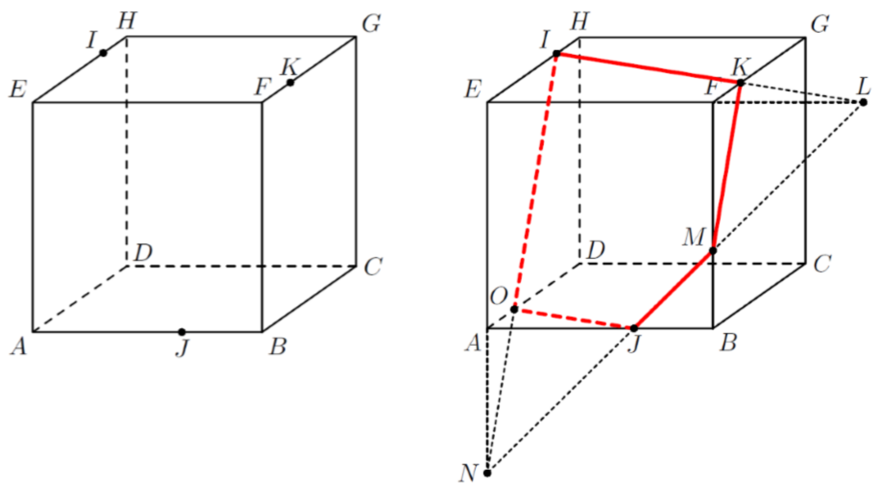
Théorème : Si une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à deux plans sécants $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection $\mathcal{D}$.

Attention ! On peut vous demander d'utiliser la contraposée : si une droite n'est pas parallèle à l'intersection de deux plans sécants, alors elle n'est pas parallèle à au moins un de deux plans.

✓ **Construction d'une insersection plan/cube** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour la géométrie, un exemple vaut mieux que de longues explications !

Exemple : On cherche à déterminer l'intersection du plan (IJK) avec le cube (figure de gauche). On obtient la figure de droite.



Les étapes de construction sont les suivantes :

1. On regarde quels points sont sur la même face, en l'occurence I et K, puis on prolonge la droite (IK) jusqu'à rencontrer la face sur laquelle se trouve le troisième point (J). On note le point d'intersection L.
2. On trace la droite (LJ) (les deux points sont sur la même face) et on regarde l'intersection avec l'arête $[BF]$, le point M. Comme ce point appartient au plan (IJK), on peut le relier à K et J.
3. On refait la même chose pour construire N, puis O.

Pour s'entrainer...

2016 Pondichéry 3, Nouvelle-Calédonie (novembre) 4
2015 Polynésie 1

4.4 Distances

✓ **Distance d'un point à un point, à un plan** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Les deux formules à connaître sont :
  - Distance de $A(x_A; y_A; z_A)$ à $B(x_B : y_B; z_B)$:

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

– Distance de $A(x_A; y_A; z_A)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ est
$$\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

5 Probabilités et statistiques

5.1 Probabilités discrètes

✓ **Loi binomiale** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si et seulement si cette variable aléatoire est définie par le nombre de succès dans la répétition n fois, de façon INDÉPENDANTE, d'une épreuve ayant deux issues, "succès" et "échec". La probabilité du succès étant égal à p.
  La variable aléatoire X prend alors les $n+1$ valeurs 0, 1, ..., n avec les probabilités : $P(X=k) = \binom{n}{k}\ p^k(1-p)^{n-k}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$.

  Le nombre $\binom{n}{k}$ se calcule à la calculatrice (vous devez savoir où cette fonction se trouve dans votre calculatrice !).
  On a de plus $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Exemple : On lance un dé cubique trois fois de suite et on note X la variable aléatoire indiquant le nombre de 6 obtenu. X suit alors une loi binomiale de paramètre 3 et $\frac{1}{6}$. La probabilité d'obtenir deux fois 6 est donc de :
$P(X=2) = \binom{3}{2}\ \frac{1}{6}^2 \times \frac{5}{6}^1 = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$

Astuces : Pour montrer qu'une variable aléatoire suit une loi Binomiale de paramètres n et p, la phrase *"La variable aléatoire X compte le nombre de succès de n expériences de Bernouilli de paramètre p répétées de manière indépendante."* suffit.

Transformer $P(X \geq 1)$ en $1 - P(X=0)$ rend un certain nombre de calculs plus simples.

On demandera souvent de calculer le plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq p$. Il s'agit d'une simple inéquation avec des logarithmes (voir le savoir-faire "plus petit entier n tel que..." ; attention toutefois aux sens des inégalités dans ce type de résolution !).

On peut vous demander, quand n est assez grand, d'approximer $P(X \geq ...)$. Deux solutions s'offrent à vous : soit connaître la fonction de votre calculatrice permettant de faire un tel calcul, soit approximer la loi binomiale par une loi normale (voir "approcher une loi binomiale par une loi normale").

Pour s'entrainer...

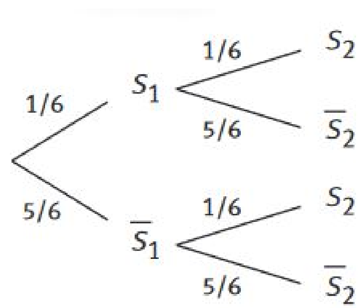
2016 Liban 2, Amérique du Nord 1
2015 Pondichéry 3, Asie 1, Antilles-Guyane (septembre) 2, Amérique du Sud 3
2014 Amrique du Nord 1, Métropole (septembre) 2, Nouvelle-Calédonie (novembre) 1

✓ **Faire et utiliser un arbre de probabilités** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Dans un arbre pondéré, on indique au bout des branches les différents événements et on marque à droite de chaque branche la probabilité d'obtenir l'événement correspondant (sachant que l'évènement situé en début de branche est réalisé).
  La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même événement est nécessairement égale à 1 (on peut se servir de cette propriété pour déduire des probabilités manquantes).

  Pour calculer la probabilité d'un événement, on s'intéresse à tous les chemins qui y mènent et on additionne la probabilité de chaque chemin, sachant que la probabilité d'un chemin s'obtient en multipliant les probabilités de chaque branche du chemin.

Exemple : On lance un dé cubique deux fois de suite et on souhaite connaître la probabilité d'obtenir exactement un 6.
On note alors S_1 l'événement "obtenir six au premier lancer", et S_2 l'évènement "obtenir un 6 au deuxième lancer" et on construit l'arbre pondéré suivant :



Pour obtenir un seul six on peut donc suivre le chemin $S_1\bar{S}_2$ ou le chemin $\bar{S}_1 S_2$.
La probabilité de cet événement, noté A, est donc :
$P(A) = P(S_1 \cap \bar{S}_2) + P(\bar{S}_1 \cap S_2) = P(S_1) \times P_{S_1}(\bar{S}_2) + P(\bar{S}_1) \times P_{\bar{S}_1}(S_2) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

Astuces : Un arbre de probabilités n'est pas toujours demandé. Pensez à en faire un, au brouillon si ce n'est pour vous aider à justifier un résultat !

Pour s'entrainer...

2016 Pondichéry 1, Centres étrangers 3, Antilles-Guyane (juin) 1, Métropole (juin) 1, Métropole (septembre) 1
2015 Liban 4, Amérique du Nord 3, Centres étrangers 1, Amérique du Sud 3
2014 Liban 1, Antilles-Guyane (juin) 1, Métropole (juin) 2, Antilles-Guyane (septembre) 1, Amérique du Sud 1

✓ **Probabilités conditionnelles** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.
  On appelle probabilité de l'événement B sachant A le nombre $P_A(B)$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

  On en déduit donc que $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Exemple : Dans une urne, on place cinq boules, deux noires et trois rouges. On tire au hasard deux boules, successivement et sans remise. On calcule la probabilité de tirer deux boules noires :

On note N_1 l'événement "la première boule tirée et noire", N_2 pour la deuxième boule tirée. On cherche donc $P(N_1 \cap N_2)$.
$P(N_1) = \dfrac{2}{5}$ (il y a 2 boules noires et 5 boules au total) et $P_{N_1}(N_2) = \dfrac{1}{4}$ (si on a déjà tiré une boule noire il reste donc 1 boule noire et 4 boules au total).
Donc $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$.

Pour s'entrainer...

2016 Liban 2, Amérique du Nord 1, Amérique du Nord 4, Centres étrangers 3, Polynésie 3, Antilles-Guyane (juin) 1, Métropole (septembre) 3

2015 Liban 4, Centres étrangers 1, Polynésie (septembre) 2, Nouvelle-Calédonie (mars) 1

✓ Formules des probabilités totales ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Lorsque les n événements $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ d'un univers Ω forment une **partition** de Ω (incompatibles deux à deux et leur réunion est égale à Ω) alors

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + ... + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

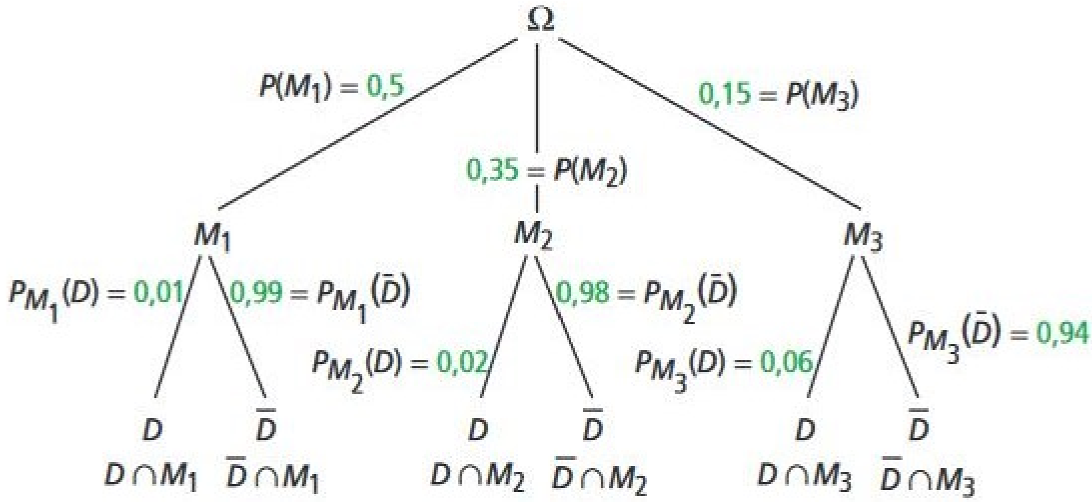
C'est cette formule que l'on utilise dans les arbres pondérés pour calculer la somme des chemins qui mène à un événement sur un arbre !

Exemple : Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines. Toutes les pièces sont vérifiées par le service qualité. Ce service fournit le tableau suivant après une journée de production.

Machine utilisée	N1	N2	N3
Pièces produites (en pourcentage)	50	35	15
Fréquence des défauts(par machine)	0.01	0.02	0.06

On veut savoir, en prenant une pièce au hasard, quelle est la probabilité que cette pièce soit défectueuse.

On commence par construire l'arbre pondéré :



Il s'agit de calculer P(D).
Les événements M_1, M_2 et M_3 sont deux à deux incompatibles et leur réunion est égale à l'univers, ils forment donc une partition de Ω et on peut appliquer la formule des probabilités totales.
$P(D) = P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3)$
$P(D) = P(M_1) \times P_{M_1}(D) + P(M_2) \times P_{M_2}(D) + P(M_3) \times P_{M_3}(D)$
$P(D) = 0.5 \times 0.01 + 0.36 \times 0.02 + 0.15 \times 0.06.$
On a donc $P(D) = 0.0212$

Pour s'entrainer...

2015 Amérique du Nord 3, Métropole (juin) 1, Amérique du Sud 3

✓ Espérance ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- L'espérance d'une variable aléatoire X prenant les valeurs x_1, ..., x_n avec des probabilités p_1, ..., p_n est définie par :

$$E(X) = x_1p_1 + \ldots + x_np_n$$

Exemple : L'espérance d'un lancer de dé est

$$\frac{1}{6}1 + \frac{1}{6}2 + \frac{1}{6}3 + \frac{1}{6}4 + \frac{1}{6}5 + \frac{1}{6}6 = 3,5$$

Astuce : Un jeu est favorable si son espérance est strictement positive ; défavorable si elle est strictement négative ; équitable sinon.

✓ Variance et écart-type ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- La variance d'une variable aléatoire X prenant les valeurs x_1, ..., x_n avec des probabilités p_1, ..., p_n est définie par :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2p_1 + ... + (x_n - E(X))^2p_n$$

L'écart-type σ est défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

5.2 Probabilités continues

✓ **Montrer qu'une fonction est une densité de probabilité** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est une densité de probabilité sur I lorsque :
  1. La fonction f est continue sur I.
  2. La fonction f est à valeurs positives sur I.
  3. L'aire sous la courbe de f est égale à 1 unité d'aire (u.a.).

  Soit f une fonction définie sur I qui est une densité de probabilité sur I.
  On dit que la variable aléatoire X suit la loi de densité f sur l'intervalle I lorsque, pour tout intervalle J inclus dans I, la probabiltié de l'événement (X $\in$ J) est la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine :

$$\{M(x;y) \mid x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Pour s'entrainer...

2016 Amérique du Sud 1

✓ **Loi normale, normale centrée réduite** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- La fonction défnie sur R par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ est une densité de probabilité. Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ si sa fonction de densité est la fonction f. Elle est centrée réduite (espérance nulle et écart-type égal à 1).
  On a alors

$$P(a \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \; P(X \leq -u) = P(X \geq u)$$

$$P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = \frac{1}{2}$$

  Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ si la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. On a alors $E(X) = \mu$ et $\sigma(X) = \sigma$.

Astuce : On peut facilement déterminer graphiquement une approximation de σ regardant l'éccart des abscisses entre le maximum de la gaussienne et un des points où elle est égale à 34,1% de son maximum. Cet écart est égal à σ. Pour déterminer σ par le calcul, voir le savoir-faire "Calcul de probabilités et calculatrice".

Pour s'entrainer...

2016 Pondichéry 1, Asie 1, Métropole (septembre) 1

2015 Pondichéry 3, Amérique du Nord 3, Centres étrangers 1, Polynésie (juin) 3, Asie 1, Polynésie (septembre) 2, Nouvelle-Calédonie (novembre) 1, Nouvelle-Calédonie (mars) 1

2014 Liban 1, Amérique du Nord 1, Centres étrangers 1, Antilles-Guyane (juin) 1, Asie 2, Métropole (juin) 2, Métropole (septembre) 2, Amérique du Sud 1, Nouvelle-Calédonie (novembre) 1

✓ Loi uniforme ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$ si sa densité de probabilité est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$. Il faut savoir montrer que cette fonction est bien une densité de probabilité (calcul d'intégrale basique).

✓ Loi exponentielle ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Soit λ un nombre réel strictement positif. Une variable à densité X suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty]$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
  L'espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ est :
  $$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$
  Cette loi est dite sans vieillissement :
  $$P_{X>T}(X > T + t) = P(X > t)$$

Astuce : On peut calculer λ à partir de la connaissance d'une probabilité du type $P(X \geq x) = p$ (on résout l'équation d'inconnue λ, $e^{-\lambda x} = p$)

Pour s'entrainer...

2016 Polynésie 3, Métropole (juin) 1, Antilles-Guyane (juin) 1, Amérique du Sud 5
2015 Asie 1, Antilles-Guyane 2, Métropole (juin) 1
2014 Pondichéry 1, Centres étrangers 1, Polynésie 3, Antilles-Guyane (septembre) 1, Métropole (septembre) 2, Nouvelle-Calédonie (mars) 2

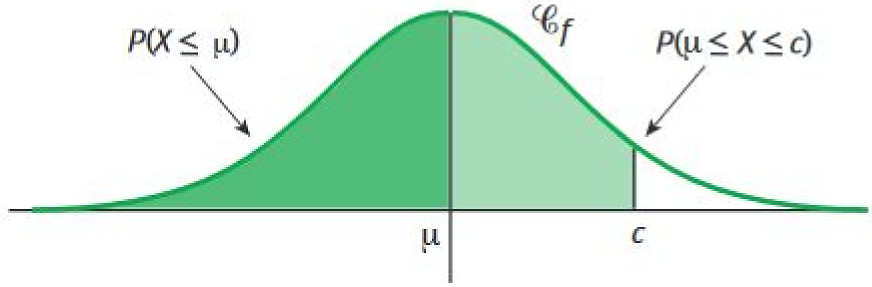
✓ Calcul de probabilités et calculatrice ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Soit X une variable aléatoire définie par une densité de probabilité f, alors
  $$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
  Pour la loi uniforme et la loi exponentielle, ce calcul peut se faire à la main.
  Si X suit la loi normale $\mathrm{N}(\mu\,;\sigma^2)$, cela se fait à la calculatrice. Il faut savoir calculer des probabilités de la forme : $P(a \leq X \leq b)$, $P(X \leq c)$, $P(X \geq c)$, a, b et c étant des nombres réels donnés.

  Pour $P(a \leq X \leq b)$ le calcul se fait directement à la calculatrice (il suffit de savoir où se trouve la bonne fonction !).

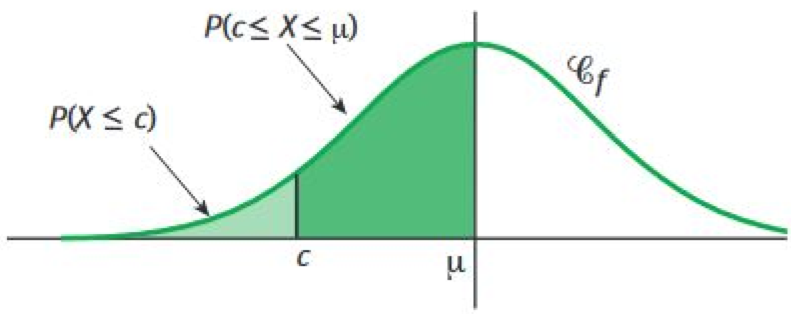
  Pour $P(X \leq c)$ ce n'est pas toujours le cas. On dispose de deux méthodes :
  - On utilise l'approximation $P(X \leq c) \approx P(-10^{99} \leq X \leq c)$ où on néglige $P(X < -10^{99})$

- Ou bien on utilise des égalités, mais elles dépendent de la position de c par rapport à μ. Les égalités sont obtenues en écrivant la probabilité d'une réunion d'événements incompatibles. On mémorise visuellement ces égalités qui s'interprètent avec des aires.
  Si $c \geq \mu$:



$$P(X \leq c) = P(X < \mu) + P(\mu \leq X \leq c) = \frac{1}{2} + P(\mu \leq X \leq c)$$

  Si $c \leq \mu$:



$$P(X \leq c) = P(X \leq \mu) - P(c < X \leq \mu) = \frac{1}{2} + P(c \leq X \leq \mu)$$

Pour $P(X \geq c)$ on peut :
- Utiliser l'événement contraire avec $P(X \geq c) = 1 - P(X < c)$
- Utiliser la symétrie de la loi normale : $P(X \geq c) = P(X \leq -c)$

Il faut également savoir déterminer le réel x tel que $P(X \leq x) = p$, p étant une probabilité donnée. Cela se fait directement avec la plupart des calculatrices. Toutefois si votre calculatrice ne le fait pas automatiquement (la fonction s'appelle surement InvNormale ou InvNorm), voici comment procéder :
On cherche d'abord en tâtonnant z tel que $P(Z \leq z) = p$, Z suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$. Puis on utilise l'équivalence :

$$Z \leq z \Leftrightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \leq z \Leftrightarrow X \leq \sigma z + \mu$$

On en déduit $x = \sigma z + \mu$.

Si l'on connait une p et x tels que $P(X \leq x) = p$ et l'espérance de la loi normale

μ, on peut déterminer σ.
Comme

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = p$$

et que $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite, on peut calculer $\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ et donc en déduire σ (comme on connaît x et μ il suffit juste de résoudre l'équation).

Exemple : Si X suit une loi uniforme sur $[a\,;b]$,

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{b-a}\right]_c^d = \frac{d-c}{b-a}$$

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ,

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-\lambda x}\right]_c^d = -e^{-\lambda d} - (-e^{-\lambda c}) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(21; 9)$:

- $P(8 \leq X \leq 18) \approx 0.159$ (calculatrice).
- Pour calculer $P(X \geq 23)$: on calcule d'abord $P(X \leq 23)$. Pour cela, comme $23 \geq 21$, on a

  $$P(X \leq 23) = P(X < 21) + P(21 \leq X \leq 23) = \frac{1}{2} + P(21 \leq X \leq 23)$$

  On trouve à la calculatrice $P(21 \leq X \leq 23) \approx 0.248$ donc $P(X \leq 23) \approx 0.748$ d'où $P(X \geq 23) = 1 - P(X \leq 23) \approx 0.252$.
- On cherche x tel que $P(X \leq x) = 0.7$. On trouve à la calculatrice $x \approx 22.57$.
- Si l'on ne connaît pas l'espérance mais que l'on connaît le résultat précédent, on peut retrouver σ :

  $$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-21}{\sigma} \leq \frac{x-21}{\sigma}\right) = 0.7$$

  On trouve $\dfrac{x-21}{\sigma} \approx 14,1$ puis $\sigma \approx 9$.

Astuce : Sachez retrouver rapidement les bonnes fonctions dans votre calculatrice !

✓ Approcher une loi binomiale par une loi normale ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- On peut approcher variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p par une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(np; \sqrt{np(1-p)}\right)$ dès lors que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. On cherchera ensuite à calculer une probabilité de la forme $P(c \leq X \leq d)$ (voir le savoir-précédent pour le calcul).

5.3 Statistiques

✓ **Déterminer un intervalle de fluctuation assymptotique** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- On considère des variables aléatoires X_n suivant chacune une loi binomiale de paramètre n et p. On pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ c'est la variable aléatoire qui donne la fréquence du nombre de "succès".
  L'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F_n au seuil $1-\alpha$ est un intervalle déterminé à partir de p et de n et qui contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de $1-\alpha$ que n est grand.
  L'intervalle $J_n = \left[p - 1.96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1.96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%. Les conditions d'utilisation sont les suivantes : $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.
  Pour un intervalle de fluctuation à 99%, il faut changer 1,96 en 2,58.

Exemple : Pour déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% lorsque $n = 100$ et $p = 0.5$: $np = 50$ et $n(1-p) = 50$ donc les trois conditions sont réalisées et on peut utiliser l'intervalle J_n. On obtient :

$$J_n = \left[0.5 - 1.96\frac{\sqrt{0.5 \times 0.5)}}{\sqrt{100}}; p + 1.96\frac{\sqrt{0.5 \times 0.5}}{\sqrt{100}}\right] = [0.402; 0.598]$$

✓ **Valider une hypothèse portant sur une proportion** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- On utilise un intervalle de fluctuation lorsque l'on veut déterminer si la proportion f observée dans un échantillon est compatible ou non avec un modèle de Bernoulli, c'est-à-dire si elle peut être un résultat obtenu par une variable aléatoire $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, où X_n suit une loi binomiale de paramètre n et p.
  La règle de décision adoptée est la suivante :
  - Si la fréquence observée dans un échantillon, f, appartient à un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%, on considère que l'échantillon est compatible avec le modèle.
  - Sinon, on considère que l'échantillon n'est pas compatible avec le modèle.

Exemple : Le responsable de la maintenance des machines à sous d'un casino doit vérifier qu'un certain type de machine est reglé sur une fréquence de succès de 0.06.
Il décide de régler chaque machine pour laquelle il aura observé, dans l'historique des jeux, une fréquence de succès se situant en dehors d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95%.
Lors de contrôle d'une machine, le technicien constate qu'elle a fourni 9 succès sur 85 jeux.
La fréquence observée f de succès de cette machine est $f = \frac{9}{85} \approx 0.106$.
L'intervalle de fluctuation assymptotique à 95% est $J_n = [0.009; 0.111]$ (les conditions sont biens remplies pour pouvoir utiliser cet intervalle).
Le technicien va-t-il modifier le réglage de la machine ? La fréquence observée f

se situe dans l'intervalle de fluctuation, donc le réglage de la machine n'est pas à modifier.

Quelle aurait été sa décision s'il y avait eu 21 succès sur 200 jeux ? Dans ce cas on a $f = \frac{21}{200} = 0.105$ et l'intervalle de fluctuation vaut $[0.027; 0.093]$. La fréquence f n'est donc pas dans l'intervalle, le technicien devra donc devoir modifier le réglage de la machine.

Pour s'entrainer...

2016 Liban 2, Antilles-Guyane (juin) 1, Asie 3, Nouvelle-Calédonie (novembre) 2
2015 Centres étrangers 1, Métropole (septembre) 1, Antille-Guyane (septembre) 2, Amérique du Sud 3

✓ **Intervalle de confiance** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Lorsque l'on connaît la fréquence f d'apparition d'un caractère dans un échantillon de taille n, on peut estimer la proportion réelle p du caractère dans la population à l'aide d'un intervalle de confiance. Lorsque l'on a $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$,

$$p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Astuce : Un intervalle de confiance s'utilise lorsque l'on a une fréquence “partielle” (c'est-à-dire qui se base sur une partie de la population) et que l'on veut avoir la proportion “totale” (sur toute la population).

Pour s'entrainer...

2016 Pondichéry 1, Centres étrangers 3, Polynésie 3, Métropole (juin) 1, Métropole (septembre) 1
2015 Liban 4, Centres étrangers 1, Métropole (septembre) 1, Amérique du Sud 3

6 Spécialité

6.1 Arithmétique

6.1.1 Division euclidienne et congruences

✓ **Faire une division euclidienne** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b, c'est-à-dire déterminer $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < |b|$ tels que $a = qb + r$, on peut calculer $\frac{a}{b}$. On aura alors $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ et $r = a - qb$.

Astuce : Calculons le quotient et le reste de la division euclidienne de 86 par 7 : $\frac{86}{7} \approx 12,29$ donc $q = 12$ et $r = 86 - 12 \times 7 = 86 - 84 = 2$.

✓ **Reste de la division euclidienne de a^n par b** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- On commence par regarder le reste de la division euclidienne de a, a^2, ... par b tant que l'on ne tombe pas sur 1. On note n_0 le premier entier tel que $a^{n_0} \equiv 1[b]$. L'idée est ensuite de faire la division euclidienne de n par n_0 : $n = qn_0 + r$. On en déduit

$$a^n \equiv a^{qn_0}a^r \equiv (a_0^n)^q a^r \equiv 1^q a^r \equiv a^r[b]$$

Exemple : Pour calculer le reste de la division euclidienne de 5^{2017} par 9 :

$$5^1 \equiv 5[9], 5^2 \equiv 7[9], 5^3 \equiv 8[9], 5^4 \equiv 4[9], 5^5 \equiv 2[9], 5^6 \equiv 1[9]$$

Reste donc à effectuer la division euclidienne de 2017 par 6 : $2017 = 336 \times 6 + 1$ (voir le savoir-faire précédent pour effectuer le calcul). Il reste donc

$$5^{2017} \equiv 1[9]$$

Astuce : En fait, en déterminant la congruence modulo b de a^0 jusqu'à a^{n_0}, on peut établir la table de congruence modulo b de a^n (en fonction du reste de la division euclidienne de n par n_0).

✓ Résolution de $ax + b \equiv c[n]$ ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- La première étape consiste en "passer le b de l'autre côté" :

$$ax \equiv c - b[n]$$

On remplit ensuite la seconde ligne du tableau suivant

$x \equiv$	0	...	$n-1$
$ax \equiv$		...	

Puis on conclut.

Exemple : Pour résoudre $5x + 2 \equiv 4[6]$:

$$5x + 2 \equiv 4[6] \Leftrightarrow 5x \equiv 2[6]$$

On remplit le tableau de congruence :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5
$5x \equiv$	0	5	4	3	2	1

On en déduit

$$5x + 2 \equiv 4[6] \Leftrightarrow x \equiv 4[6]$$

Astuce : Ce type de raisonnement peut s'appliquer pour les équations du type

$$f(x) \equiv k[n]$$

Pour s'entrainer...

2016 Centres étrangers 4, Polynésie 4, Amérique du Sud 5

6.1.2 PGCD

✓ **Calcul de PGCD de a et b (par restes successifs)** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Une des méthodes que l'on peut utiliser pour calculer un PGCD, c'est de faire une série de division euclidienne : c'est l'algorithme d'Euclide.

```
u = min(a,b), v= max(a,b)
Tant que u ≠ 0
  r le reste de la division euclidienne du maximum
    de u et v par leur minimum
  u prend la valeur min(v,r)
  v prend la valeur max(v,r)
FinTantQue
Renvoyer v
```

La valeur renvoyée est le PGCD de a et b

Exemple : Si l'on veut calculer le PGCD de 140 et de 30 :

$$\begin{aligned} 140 &= 30\times 4+20 \\ 30 &= 20\times 1+10 \\ 20 &= 10\times 2+0 \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est 10 donc $\text{PGCD}(140, 30) = 10$.

Astuce : La propriété qui permet de valider cet algorithme est, pour tout entier k,

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a + kb, b)$$

Cette propriété peut également vous servir quand vous avez à calculer un PGCD dépendant d'une variable, pour pouvoir faire disparaître la variable d'un côté.

✓ **Théorème de Bezout** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

Théorème : Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que

$$au + bv = \text{PGCD}(a; b)$$

Attention ! Ce théorème donne juste l'existence de ces deux entiers et non pas leur valeur. On utilisera donc ce théorème uniquement lorsque l'on demande l'EXISTENCE d'un couple solution.

✓ **Équations diophantiennes** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour résoudre les équations diophantiennes $ax + by = 1$ (a et b des entiers relatifs premiers entre eux ; x et y les entiers relatifs que l'on cherche à déterminer), trois étapes sont nécessaires :
  1. On cherche une solution particulière (cette étape sera parfois déjà faite dans l'énoncé).

2. À partir de la solution particulière :

$$ax + by = 1 = ax_0 + by_0$$

On a donc

$$a(x - x_0) = -b(y - y_0)$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le théorème de Gauss (voir la prochaine section) pour trouver l'expression de x et de y.

3. Il faut ensuite vérifier que les solutions trouvées conviennent (ce type de raisonnement est appelé raisonnement par analyse-synthèse).

Exemple : On cherche à résoudre l'équation $5x + 7y = 1$.

Soit $(x; y)$ un couple solution de l'équation.
Le couple $(3; -2)$ est solution de l'équation. Il reste donc

$$5(x - 3) = -7(y + 2)$$

5 et 7 sont premiers entre eux et 7 divise $5(x - 3)$, par le théorème de Gauss, 7 divise $x - 3$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 3 = 7k$. Donc $x = 7k + 3$. On en déduit $-7(y + 2) = 5 \times 7 \times k$ donc $y = -5k - 2$.

Réciproquement, on vérifie que tous les couples de la forme $(7k + 3; -5k - 2)$ sont solutions de l'équation.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\{(7k + 3; -5k - 2) | k \in \mathbb{Z}\}$$

Pour s'entrainer...

2016 Pondichéry 3, Antilles-Guyane (juin) 4, Asie 4
2015 Antilles-Guyane (juin) 4, Métropole (juin) 3, Métropole (septembre) 3, Antilles-Guyane (septembre) 4

6.1.3 Diviseurs et nombres premiers

✓ **Déterminer l'ensemble des diviseurs d'un nombre** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Lorsque l'on veut déterminer l'ensemble des diviseurs d'un nombre n, on commence par écrire sa décomposition en facteurs premiers, c'est-à-dire trouver les nombres premiers p_1, ..., p_i et les entiers strictement positifs α_1, ..., α_i tels que

$$n = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_i^{\alpha_i}$$

La méthode pour obtenir tous ces entiers est détaillée dans l'exemple.

Une fois ces informations connues, il ne reste plus qu'à déterminer l'ensemble de diviseurs de n :

$$\mathcal{D}iv(n) = \{p_1^{r_1} \times \ldots \times p_i^{r_i} | \forall k \in [1; i], 0 \leq r_i \leq \alpha_i\}$$

Exemple : Pour calculer l'ensemble des diviseurs de 140, on commence par regarder la puissance de 2 maximale possible : $140 = 2 \times 70 = 2^2 \times 35$ (on ne peut pas aller plus loin comme 35 n'est pas pair).
On recommence l'opération avec le prochain entier premier divisant 35 (5) : $35 = 5 \times 7$. 7 étant premier l'opération est terminée. Si l'on ne tombe pas sur un nombre premier, on recommmence le même type d'opérations jusqu'à arriver sur un nombre premier.
On a donc

$$170 = 2^2 \times 5 \times 7$$

On en déduit l'ensemble des diviseurs de n est

$$\begin{aligned}\mathcal{D}iv(140) &= \{2^0 5^0 7^0; 2^0 5^0 7^1; \ldots; 2^2 5^1 7^0; 2^2 5^1 7^1\} \\ &= \{1; 7; 5; 35; 2; 14; 10; 70; 4; 28; 20; 140\}\end{aligned}$$

Astuce : Pour vérifier que l'on a bien le nombre de diviseurs on vérifie que l'on a bien $(\alpha_1 + 1) \times \ldots \times (\alpha_i + 1)$ diviseurs. Un arbre peut vous aider à ne pas oublier un diviseur.

Pour s'entrainer...

2015 Centres étrangers 4, Polynésie (septembre) 4

✓ Calcul du PGCD de a et b (par facteurs premiers communs) ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour calculer le PGCD de a et de b, on commence par calculer leur décomposition en facteurs premiers (voir le savoir-faire précédent). Ensuite, pour tous les nombres premiers p en commun à a et b, on regarde le minimum des valuations p-adiques de a et de b. La valuation p-adique de $\text{PGCD}(a, b)$ sera égale à ce minimum.

Exemple : Combient vaut $\text{PGCD}(140, 30)$?
Les décompositions en facteurs premiers de 140 et 30 sont : $140 = 2^2 5^1 7^1$ et $30 = 2^1 3^1 5^1$. Le PGCD sera donc composé de puissances de 2 et de 5, ces deux entiers étant commun à 140 et à 30. En regardant les valuation 2-adiques et 5-adiques, on déduit que

$$\text{PGCD}(140, 30) = 2^1 5^1 = 10$$

✓ Théorème de Gauss ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Soient a, b et c trois entiers non nuls. Si c divise ab et a et c premiers entre eux alors c divise b.

✓ Critères de divisibilité par 2, 3, 4 et 5 ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Les différents critères de divisibilité sont :
  Par 2 : le dernier chiffre est pair
  Par 3 : la somme des chiffres est un multiple de 3
  Par 4 : le nombre constitué par les deux derniers chiffres est multiple de 4
  Par 5 : le dernier chiffre est 0 ou 5

Pour s'entrainer...

2016 Amérique du Sud 5

6.2 Matrices

✓ **Montrer qu'une matrice est l'inverse d'une autre** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour montrer que $B = A^{-1}$, il suffit de montrer que $AB = Id$ ET $BA = Id$. Pour une matrice 2×2, la formule à utiliser est la suivante (si $ad - bc \neq 0$)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

✓ **Équivalence système linéaire et matrice** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Lorsque l'on a un système linéaire, il est souvent plus facile d'utiliser des matrices pour le résoudre. Du système linéaire (de taille n), on arrive à une équation du type $AX = Y$ avec Y une matrice colonne (de hauteur n), A une matrice carrée la plupart du temps ($n \times n$) et X une matrice colonne inconnue (de hauteur n) que l'on cherchera à déterminer. Les coefficients de la matrice seront à déterminer en fonction des coefficients présents dans le système.

  Ensuite, l'énoncé donnera généralement la matrice A^{-1} (il faudra vérifier que c'est bien la matrice inverse : voir le savoir-faire précédent). Il ne restera plus qu'à calculer $X = A^{-1}Y$ pour résoudre le système.

Exemple On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 1x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 0x & + & 1y & + & 4z & = & 2 \\ 5x & + & 6y & + & 0z & = & 0 \end{cases}$$

Résoudre ce système revient à résoudre l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On montre ensuite que la matrice suivante est l'inverse de A (cf savoir-faire "montrer qu'une matrice est l'inverse d'une autre") :

$$\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pour s'entrainer...

2015 Amérique du Nord 2

✓ **Calcul d'une puissance de matrice** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Le calcul d'une puissance de matrice est assez fastidieux, sauf dans le cas particulier où la matrice est diagonalisable, c'est à dire qu'on peut la mettre sous la forme PDP^{-1} avec D une matrice diagonale. L'énoncé introduira toujours les matrices D et P. D^n étant facile à calculer (on met à la puissance n tous les coefficients de la diagonale), il est assez facile de calculer A^n

$$A^n = PDP^{-1}...PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

Pour savoir si A^n admet une limite, on regarde si chacun des coefficients diagonaux de D^n admet une limite. Si oui,

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = P. \lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} d_1^n & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_p^n \end{pmatrix} .P^{-1}$$

✓ **Suites de matrices** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Pour déterminer les termes d'une suite de matrices colonnes (U_n) les méthodes de résolution sont assez proches de celles des suites réelles (voir les savoir-faire de la partie 1.1) :
  - **Suites arithmétiques** $U_{n+1} = U_n + X$: $U_n = U_0 + nX$
  - **Suites géométriques** $U_{n+1} = AU_n$: $U_n = A^nU_0$
    Attention ! Si $U_{n+1} = U_nA$, on a $U_n = U_0A^n$ (à cause de la non-commutativité du produit de matrices ; U_n est ici une matrice ligne)
  - **Suites arithmético-géométriques** $U_{n+1} = AU_n + B$: l'énoncé introduirait une suite auxilliaire ($V_n = U_n - C$) et il faudrait montrer qu'elle est géométrique, utiliser le point précédent et en déduire l'expression de U_n

Astuces : Les suites de matrices les plus courantes dans les sujets de bac sont les suites géométriques. On cherchera alors à calculer A^n (voir le savoir-faire précédent pour cela) et à déterminer la limite de U_n.

On les utilise souvent pour résoudre des problèmes avec des probabilités voir du décodage.

Pour s'entrainer...

2016 Amérique du Nord 4, Antilles-Guyane (juin) 4, Métropole (septembre) 3, Antilles-Guyane (septembre) 4, Nouvelle-Calédonie (novembre) 5

2015 Liban 2, Polynésie (juin) 5, Métropole (juin) 3, Nouvelle-Calédonie (novembre) 4, Amérique du Sud 4

7 Algorithmes

7.1 Condition et structure itérative

✓ **Instructions élémentaires** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Dans le cadre d'une résolution de problèmes il faut savoir :
  - Écrire une formule permettant un calcul.
  - Écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction, ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.

  Pour écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction il faut tout d'abord lire la valeur de x, puis dans la partie traitement, on effectue les opérations que la fonction demande et on les enregistre dans une nouvelle variable, le plus simple est de tout faire en une étape. Enfin, il faut afficher en sortie la valeur de la variable que l'on vient de calculer.

Exemple : Ĺe programme suivant calculet et affiche la valeur de la fonction $f(x) = 3x + x^2$.

Entrée
Saisir X
Traitement
A prend la valeur $3 * X + X^2$
Sortie
Afficher A

✓ Instruction conditionnelle ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Utiliser la structure “Si... Alors... Sinon... FinSi” pour introduire un test conditionnel dans un programme.
  La structure exacte est la suivante :

Si *condtion* **Alors**
suite d'instructions 1 (si la condition est vraie)
Sinon
suite d'instructions2 (si la condition est fausse)
FinSi

  La partie **Sinon** n'est pas obligatoire : on ne l'utilise pas s'il n'y a pas d'instructions à exécuter quand la condition est fausse.

Exemple : Le programme suivant lit un entier et affiche “positif” ou “négatif” suivant la valeur de cet entier (on considérera que 0 est positif).

Entrée
Saisir X
Traitement
Si X ≥ 0 **Alors**
Afficher “Positif”
Sinon
Afficher “Négatif”

✓ Calcul itératif ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Il y a deux types de manières de faire des répétitions. La boucle “pour” et la boucle “tant que”.

Boucle pour : Elle s'utilise lorsque l'on connait à l'avance le nombre de répétitions que l'on veut utiliser. La structure, pour répéter n fois une instruction, est la suivante :

```
Pour i allant de 1 à n
   instruction à répéter
FinPour
```

Boucle tant que : Elle s'utilise lorsque l'on ne connait pas le nombre de répétitions mais seulement une condition d'arrêt. La structure est la suivante :

```
Tant que condition
   instruction à répéter
FinTantque
```

Ainsi, tant que la condition indiquée est vraie, on répète l'instruction à l'intérieur de la boucle.

Exemple : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 5$.

Pour calculer u_n (on connaît le nombre de répétitions, on utilise donc une boucle **Pour**) :

```
Entrée
   Saisir n
   u = 1
Traitement
   Pour i allant de 1 à n
      u = 3*u + 5
   FinPour
Sortie
   Afficher u
```

Le programme suivant calcule l'entier n à partir duquel $u_n \geq x$ (on ne connait pas le nombre de répétitions qu'il faut faire mais on dispose d'une condition d'arrêt, on va donc utiliser une boucle **Tant que**) :

```
Entrée
   Saisir x
   u = 1
   n = 0
Traitement
   Tant que u < x
      u = 3*u + 5
      n = n + 1
   FinTantque
Sortie
   Afficher n
```

Astuce : Le choix de la boucle se fait principalement à partir de la connaissance ou non du nombre d'opérations.

Pour s'entrainer...

2016 Centres étrangers 4, Antilles-Guyane (septembre) 1, Amérique du Sud 3
2015 Métropole (juin) 4, Métropole (septembre) 2, Nouvelle-Calédonie (mars) 3
2014 Centres étrangers 3, Asie 4, Métropole (septembre) 3, Amérique du Sud 4

7.2 Algorithmes à connaître

Tous les opérateurs présentés dans le paragraphe précédent sont utiles pour écrire et comprendre des algorithmes. Toutefois, on ne vous demandera que très rarement d'écrire un algorithme en entier. Bien souvent, il s'agira, soit de modifier ou d'ajouter une ligne dans un algorithme déjà existant, soit de décrire ce que fera un algorithme à l'aide d'un tableau. Les trois "savoir-faire" suivants constituent les algorithmes de base qu'il faut savoir écrire ou décrire.

✓ **Calcul des valeurs d'une suite récurrente** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- L'algorithme suivant permet de calculer le terme de rang n de la suite u déterminée par la récurrence $u_{i+1} = f(u_i)$.

```
Entrée
   Saisir n
   u = u0
Traitement
   Pour i allant de 1 à n
      u = f(u)
   FinPour
Sortie
   Afficher u
```

Exemple : Un exemple pour $f : x \mapsto 3x + 5$ est donnée dans le savoir-faire "calcul itératif".

Astuces : Cet algorithme est assez simple, on peut vous demander de l'écrire en entier. En plus il est assez général, suivant la forme de f, on peut calculer un terme d'une suite géométrique, arithmétique, arithmético-géométrique... On peut aussi vous donner un algorithme de ce type, faire un tableau des premières valeurs et éventuellement conjecturer la convergence de la suite.

Pour s'entrainer...

2016 Pondichéry 5, Liban 4, Centres étrangers 4, Asie 3
2015 Liban 2, Amérique du Nord 2, Polynésie 5, Antilles-Guyane (juin) 4, Nouvelle-Calédonie (novembre) 4
2014 Polynésie 2, Antilles-Guyane (septembre) 2, Nouvelle-Calédonie (mars) 4

✓ **Algorithme de seuil** ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- Le principe d'un algorithme de seuil est de calcul le plus petit entier n (cf. savoir-faire "plus petit entier n tel que...", partie 1.2.). Voilà un algorithme pour une suite récurrente qui affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geq A$:

```
Entrée
  A un réel
  u = u0
  n = 0
Traitement
  Tant que u < A
    u = f(u)
    n = n + 1
  FinTantque
Sortie
  Afficher n
```

Exemple : Le deuxième exemple de "calcul itératif" est un exemple d'algorithme de seuil.

Astuces : La majorité du temps les questions posées autour de cet algorithme seront "qu'est-ce que cet algorithme fait ?" ou de modifier ou rajouter une ligne.

Pour s'entrainer...

2016 Polynésie 1, Métropole (juin) 3
2015 Centres étrangers 3, Amérique du Sud 4
2014 Pondichéry 2, Liban 4, Amérique du Nord 4, Antilles-Guyane (juin) 4

✓ Algorithme de dichotomie ☐ Maitrisé | ☐ À revoir

- L'algorithme de dichotomie permet d'approximer à ϵ près une solution de l'équation $f(x) = k$ sur $[a; b]$ (il faut être sur que la fonction admet une unique solution, ce qu'on aura vraisablement fait dans une question précédente en utilisant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) :

```
Entrée
  u = a
  v = b
  ϵ > 0
Traitement
  Tant que v − u > 2ϵ
  m = (u+v)/2
    Si (f(u)-k)(f(m)-k) < 0
      v = m
    Sinon
      u = m
  FinTantQue
Sortie
  Renvoyer m
```

Quelques remarques sur cet algorithme :
– m est le milieu de u et v. Concrètement, cela veut dire qu'à chaque itération de la boucle, la distance entre u et v est divisée par 2.
– La condition "(f(u)-k)(f(m)-k)<0" signifie que la fonction est au dessus de k en u et en dessous en m ou inversement, ce qui signifie que la fonction "passe" par

k entre u et m donc que la solution de $f(x) = k$ est dans l'intervalle $[u; m]$.
Si cette condition n'est pas vérifiée, c'est que la solution se situe sur l'autre intervalle, $[m; v]$.
Ainsi on arrive à savoir à chaque itération sur quel intervalle la fonction égale k.

– Les itérations continuent tant que l'on est pas arrivé à un intervalle de taille ϵ. C'est un 2ϵ dans le "Tant Que" car on renvoie m à la fin et donc l'intervalle dans lequelle on est sur que la solution de l'équation se trouve est de taille ϵ.

Astuce : Cet algorithme est beaucoup plus complexe que les deux précédents. Il faut savoir l'expliquer, l'exécuter à la main et modifier/ajouter une ligne. L'important est donc de bien l'avoir compris !

Pour s'entrainer...

2016 Amérique du
2015 Asie 2