Équations du troisième degré

N. Jacquet

Niveau : Première et anticipation de la Terminale S

Difficulté : moyenne

Durée : 2h30 à 3h

Rubrique(s) : Polynômes, Fonctions, Continuité, Dérivation

La petite histoire...

Le but de ce problème est la résolution des équations du troisième degré. Nous allons étudier dans un premier temps celles du type $x^3+px+q=0$, ce qui correspond aussi à l'évolution historique. Vers 1515, SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526) résout les cas $x^3=px+q$, $x^3+q=px$ et $x^3+q=px$, avec p et q dans $\mathbb{R}_+^*$ (les nombres négatifs n'ayant pas encore été inventés). Cependant il ne publie rien.
Au XVIème siècle, les mathématiciens se lançaient des défis pour résoudre des équations du troisième degré. NICOLO FONTANA dit TARTAGLIA (1499-1557), trouva une méthode de résolution en 1535, qui lui permit de résoudre tous ces défis. Il ne publia rien afin de remporter encore des défis. Ceci intrigua GIROLAMO CARDANO (1505-1576) (en français Cardan) qui rendit visite à Tartaglia en 1539, pour qu'il lui revèle sa méthode. Après plusieurs refus, il lui révéla enfin celle-ci contre des faveurs et en lui faisant jurer de garder le secret.
Cardano et un de ses élèves, LODOVICO FERRARI (1522-1565), essayèrent de généraliser la méthode de Tartaglia dans le cas ou p et q ne sont pas positifs. Mais ils se heurtèrent au problème de la racine carrée d'un nombre négatif. En 1545, Cardano publie un ouvrage intitulé Ars Magna qui contient la méthode de del Ferro (après avoir retrouvé un carnet de celui-ci). Cette méthode étant identique à celle de Tartaglia, Cardano, considéra que son pacte avec Tartaglia n'avait plus lieu d'être, ce qui engendra des conflits avec ce dernier en ce qui concerne la paternité de la méthode. D'ailleurs les formules obtenues sont injustement appelée formules de Cardan (celles-ci sont obtenues aux questions 2.d) et e)).
En 1572, RAFFAELE BOMBELLI (1526-1576) surmonta la difficulté de la racine carrée d'un nombre négatif en acceptant l'existence de règles de calcul avec $\sqrt{-1}$ et en les utilisant comme si de rien n'était. C'est ainsi que sont nés les nombres imaginaires que vous verrez en terminale.

Exercice 1.

Soit (E) l'équation : $x^3+px+q=0$.

1) Soient $p, q \in \mathbb{R}$ $(p \neq 0)$, et on pose $\Delta = 4p^3+27q^2$. On cherche les solutions réelles de (E) ; pour cela on introduit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+px+q$.

a) Calculer $f'(x)$ et en déduire que si $p>0$ alors (E) a exactement une solution réelle.

b) On suppose $p<0$. Dresser le tableau de variations de f et montrer que :

$$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = \frac{\Delta}{27}.$$

c) Établir que

- si $\Delta > 0$ alors (E) a une et une seule solution réelle ;
- si $\Delta < 0$ alors (E) a trois solutions réelles ;
- si $\Delta = 0$ alors (E) a deux solutions réelles, dont une peut être considérée comme « double ».

d) Étudier le cas particulier $p = 0$.

Dans toute la suite on considérera p non nul.

2) À présent, nous allons chercher les solutions de (E) dans le cas où l'on a $\Delta \geqslant 0$.

a) Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que l'on ait : $a + b = -q$ et $ab = \frac{-p^3}{27}$.

b) En déduire l'existence de $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $u^3 + v^3 = -q$ et $uv = \frac{-p}{3}$. Donner une expression possible pour u et v.

c) Montrer que l'on a : $(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$.

d) En déduire la solution de l'équation (E) dans le cas où l'on a $\Delta > 0$.

e) On suppose dans cette question que l'on a $\Delta = 0$.

i) A l'aide des questions précédentes, donner une solution particulière de (E) et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $\frac{3q}{p}$.

ii) Trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $x^3 + px + q = \left(x - \frac{3q}{p}\right)(x^2 + \alpha x + \beta)$.

iii) En déduire toutes les solutions de (E) et préciser la solution que l'on peut qualifier de double.

f) Donner le nombre de solutions réelles et les solutions réelles de : $x^3 - 6x - 6 = 0$.

3) Nous allons traiter le cas $\Delta < 0$. On cherche une solution sous la forme $x_0 = \sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos(\theta)$ où θ est l'inconnue.

a) Montrer que nécéssairement, on a : $p < 0$.

b) Montrer que x_0 est solution de (E) si et seulement si on a $4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}$.

c) Montrer que pour tout u de $\mathbb{R}$, on a $4\cos^3(u) - 3\cos(u) = \cos(3u)$.

d) Justifier l'existence de $\theta \in]0; \frac{\pi}{3}[$ pour que x_0 soit solution de (E).

e) Montrer que toutes les solutions de (E) sont $\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos(\theta)$, $\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$ (on montrera bien que ces trois solutions sont deux à deux distintes).

f) Donner le nombre de solutions réelles et les solutions réelles de : $x^3 - 3x + 1 = 0$.

4) Nous allons maintenant donner quelques clés pour résoudre une équation générale du troisième degré du type : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (E')$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3$.

a) Montrer que (E') est équivalent à l'équation :

$$\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0 \quad (E'')$$

b) Expliquer ainsi comment on peut déterminer le nombre de solutions de (E') et les donner.

c) Résoudre : $2x^3 + 6x^2 - 6x - 22 = 0$.

Indications et Commentaires : 1.c) Utiliser la tableau de variation de f et regarder les signes de $f(\alpha)$ et $f(-\alpha)$. Ne pas ooublier de regarder le signe de p.

1.d) Étudier les variations de $x \mapsto x^3 + q$.

2.b) Utiliser 1.d) pour l'existence de u et v tels que l'on ait $u^3 = a$ et $v^3 = b$. Toujours en utlisant la même question en déduire que $(uv)^3 = (-p/3)^3$ implique que l'on a $uv = -p/3$. Pour trouver u et v, chercher d'abord a et b en cherchant les solutions de $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$.

2.d) $u + v$ est une solution de (E).

2.e.i)$u + v$ est une solution de (E) et donner une expression simplifiée de celle-ci en tenant compte de

$\Delta = 0$. Pour avoir $3q/p$, injecter la solution trouvée dans l'équation (E).
3.b) Se rappeler que $|x| = \sqrt{x^2}$.
3.c) Écrire $\cos(3u) = \cos(2u + u)$ et se rappeler des formules avec $\cos(2u)$ et $\sin(2u)$.
3.d) On a $\cos(3\theta) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}$ et ceci n'est possible que si $-q\sqrt{-27/4p^3}$ est dans $[-1, 1]$. Montrer que l'on a $|q\sqrt{-27/4p^3}| < 1$ à l'aide de $\Delta < 0$.
3.e) Remplacer dans les questions précédentes θ par $\theta+2\pi/3$ et $\theta+4\pi/3$. Vérifier que $\cos(\theta)$, $\cos(\theta+2\pi/3)$ et $\cos(\theta + 4\pi/3)$ sont deux à deux distincts. Pour ceci se rappeler à quelle condition $\cos(a) = \cos(b)$ et raisonner avec les mesures principales.
4.a) Une remarque sur ce calcul : le but est d'enlever le terme en x^2 et donc le but est d'intégrer celui-ci dans une produit remarquable d'où le premier terme $(x + b/3a)^3$.
4.b) Former une équation de X où l'on a $X = x + b/3a$ et reconnaître un type d'équation déjà étudié.

Corrections.

1.a) Immédiatement, on a : $f'(x) = 3x^2 + p$. Si $p > 0$ alors $f' > 0$ et donc f est strictement croissante de limite $-\infty$ et $+\infty$ en respectivement $-\infty$ et $+\infty$. Étant continue f prend donc toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. Donc il existe x_0 tel que l'on ait $f(x_0) = 0$ et donc x_0 est une solution de (E). De plus f est strictement croissante donc elle ne s'annule qu'une fois. Donc x_0 est la seule solution de (E) et par conséquent l'équation (E) ($i.e.$ $f(x) = 0$) a une unique solution réelle.

b) Pour $p < 0$ on note (dans toute la suite) $\alpha = \sqrt{-\frac{p}{3}}$.
On peut alors écrire : $f'(x) = 3(x^2 - \alpha^2) = 3(x - \alpha)(x + \alpha)$, ce qui donne le signe de $f'(x)$ et permet de trouver :

x	$-\infty$		$-\alpha$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Par ailleurs si $\varepsilon = \pm 1$ et en remarquant que l'on a $\alpha^3 = \alpha^2\alpha = -\frac{p}{3}\alpha$, on a :

$$f(\varepsilon\alpha) = -\varepsilon\frac{p}{3}\alpha + \varepsilon p\alpha + q = q + \varepsilon\frac{2p\alpha}{3}.$$

D'où : $f(\alpha)f(-\alpha) = \left(q + \frac{2p\alpha}{3}\right)\left(q - \frac{2p\alpha}{3}\right) = q^2 - \left(\frac{2p\alpha}{3}\right)^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{\Delta}{27}$.

c)

- Si $\Delta < 0$, nécessairement $p < 0$, et par la question précédente $f(\alpha)f(-\alpha) < 0$. Ainsi $f(\alpha)$ et $f(-\alpha)$ sont de signe contraire. Le tableau de variations de f dressé à la question précédente permet de voir que $f(-\alpha) > 0 > f(\alpha)$ puis que f s'annule exactement trois fois : une fois sur chacun des intervalles $]-\infty, -\alpha[$, $]-\alpha, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$.
- Si $\Delta > 0$ et si $p > 0$ alors d'après la question 1.a), (E) a une unique solution réelle.
- Si $\Delta > 0$ et si $p < 0$ alors par la question précédente on voit que $f(\alpha)$ et $f(-\alpha)$ ont le même signe ; puis grâce au tableau de variations on constate que f s'annule une seule fois : ou bien sur $]-\infty, -\alpha[$ ou bien sur $]\alpha, +\infty[$ suivant le signe commun de $f(\alpha)$ et $f(-\alpha)$.
- Si $\Delta = 0$ alors nécessairement $p < 0$, de sorte que l'on peut appliquer les résultats de la question précédente : $f(\alpha) = 0$ ou $f(-\alpha) = 0$. Là encore le tableau de variations permet de conclure que f a deux racines réelles dont l'une est $\pm\alpha$ que l'on considère comme étant une « racine double ».
- En résumé : (E) a exactement $\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$ solutions suivant que $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \Delta = 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

d) Si p est nul, alors (E) devient $x^3 + q = 0$. La fonction $f : x \mapsto x^3 + q$ est strictement croissante comme somme d'une fonction strictement croissante et d'une fonction constante. Elle est continue et elle a pour limites $-\infty$ et $+\infty$ en respectivement $-\infty$ et $+\infty$. Elle prend donc toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. Donc il existe x_0 tel que l'on ait $f(x_0) = 0$ et donc x_0 est une solution de (E). De plus f est strictement croissante donc elle ne s'annule qu'une fois. Donc x_0 est la seule solution de (E). Ainsi (E) admet une unique solution que l'on peut noter $\sqrt[3]{-q}$.

2.a) Le couple (a, b) vérifiant $a + b = -q$ et $ab = \frac{-p^3}{27}$ sont les racines du trinôme du second degré : $x^2+qx-\frac{p^3}{27}$. Le discriminant de ce polynôme est $q^2+\frac{4p^3}{27} = \frac{\Delta}{27}$ qui est positif. Ainsi le trinôme $x^2+qx-\frac{p^3}{27}$ admet bien deux racines a et b (éventuellement confondues) qui vérifiant donc les propriétés voulues.

b) En utilisant la question 1.d), les équations $x^3 - a$ et $x^3 - b$ admettent une unique solution que l'on note respectivement u et v. On a donc $u^3 = a$ et $v^3 = b^3$. Ainsi on a $(uv)^3 = ab = \left(\frac{-p}{3}\right)^3$. Comme l'équation $x^3 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ admet une unique solution grâce à la question 1.d) et que uv et $\frac{-p}{3}$ sont tous les deux solutions de cette équation, on a donc : $uv = \frac{-p}{3}$.

Cherchons une expression possible pour a et b. Grâce à la question précédente, on a

$$a = \frac{-q - \sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{27}}}{2} = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad b = \frac{-q + \sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{27}}}{2} = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

On a donc

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

c) On a : $(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 - 3u^2v - 3uv^2 - u^3 - v^3 = 0$.

d) Grâce à la question précédente, on a donc : $(u+v)^3+p(u+v)+q = 0$. Ainsi $u+v$ est une solution particulière de (E) qui s'écrit :

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Dans notre cas (E) admet une seule solution, c'est donc l'unique solution de (E).

e) i) En utilisant la question 2.c), $u + v$ est encore une solution particulière de (E). Dans notre cas comme on a $\Delta = 0$, on a donc $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Ainsi $2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$ est une solution particulière de (E).

Donnons une autre expression de celle-ci. Cette solution vérifie donc : $\left(2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\right)^3 + 2p\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} + q = 0$, soit $-\frac{8q}{2} + 2p\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} + q = 0$, soit $2p\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} - 3q = 0$ soit $2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} = \frac{3q}{p}$. Ainsi cette solution s'écrit aussi $\frac{3q}{p}$.

ii) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\left(x - \frac{3q}{p}\right)(x^2+\alpha x+\beta) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - \frac{3q}{p}x^2 - \frac{3q}{p}\alpha x - \frac{3q}{p}\beta$. En identifiant, on a

$$\begin{cases} \alpha - \frac{3q}{p} = 0 \\ \beta - \frac{3q}{p}\alpha = p \\ -\frac{3q}{p}\beta = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3q}{p} \\ \beta - \frac{3q}{p}\alpha = p \\ \beta = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

En ayant les égalités $\alpha = \frac{3q}{p}$ et $\beta = -\frac{p}{3}$, on a $\beta - \frac{3q}{p}\alpha = -\frac{p}{3} - \frac{9q^2}{p^2}$. Mais nous avons $\Delta = 0$ soit $q^2 = -\frac{4p^3}{27}$ et donc on a $\beta - \frac{3q}{p}\alpha = -\frac{p}{3} + \frac{4p}{3} = p$.

iii) Cherchons donc les racines de $x^2 + \frac{3q}{p}x - \frac{p}{3}$. Le discriminant de ce trinôme du second degré est $\frac{9q^2}{p^2} + \frac{4p}{3} = \frac{27q^2+4p^3}{3p^2} = \frac{\Delta}{3p^2} = 0$. Ainsi l'équation admet une racine double qui est $-\frac{3q}{2p}$. Comme on est dans le cas $\Delta = 0$, on a exactement deux solutions distinctes qui sont $\frac{3q}{p}$ et $-\frac{3q}{2p}$. Ces solutions sont bien distinctes car q est non nul. En effet si q est nul alors on a $0 = \Delta = 4p^3$ et donc p est nul, ce qui est contradictoire.

f) Calculons le discriminant de cette équation. On a $\Delta = 4\times(-6)^3+27\times(-6)^2 = 108 > 0$ L'équation admet donc une unique solution réelle.

En utilisant la formule précédente, cette solution réelle est donnée par

$$\sqrt[3]{\frac{6}{2} - \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{3-\sqrt{9-8}} + \sqrt[3]{3+\sqrt{9-8}} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}.$$

3.a) On a $27q^2 + 4p^3 < 0$ soit $p^3 < -\frac{27q^2}{4} \leqslant 0$. On a donc : $p < 0$.

b) On a $x_0^3 + px_0 + q = \sqrt{\left(\frac{-4p}{3}\right)^3}\cos^3(\theta) + p\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos(\theta) + q$. On a par ailleurs $\sqrt{p^2} = |p| = -p$, car p est négatif. On a donc

$x_0^3 + px_0 + q = \sqrt{4^2 \frac{-4p^3}{27}} \cos^3(\theta) - \sqrt{9p^2 \frac{-4p}{27}} \cos(\theta) + q = \sqrt{\frac{4p^3}{-27}} \left(4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\right) + q$. Ainsi x_0 est une solution de (E) si et seulement si on a :

$$\sqrt{\frac{4p^3}{-27}} \left(4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\right) + q = 0$$

soit :

$$\sqrt{\frac{4p^3}{-27}} \left(4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\right) = -q$$

soit :

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}.$$

c) Soit $u \in \mathbb{R}$. On a :
$\cos(3u) = \cos(2u+u) = \cos(2u)\cos(u) - \sin(2u)\sin(u) = (2\cos^2(u)-1)\cos(u) - 2\sin^2(u)\cos(u) = 2\cos^3(u) - \cos(u) - 2(1-\cos^2(u))\cos(u) = 4\cos^3(u) - 3\cos(u)$.

d) Grâce aux deux questions précédentes, il faut donc chercher θ vérifiant : $\cos(3\theta) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}$. Comme la fonction cos atteint toutes les valeurs de l'intervalle $[-1,1]$, il suffit de montrer que $-q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}$ est dans $[-1,1]$ soit $\left|-q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}\right| \leqslant 1$. Or on a $\left|-q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}\right| = \left||q|\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}\right| = \left|\sqrt{q^2}\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}\right| = \sqrt{\frac{-27q^2}{4p^3}}$
On a $\Delta < 0$ soit $-4p^3 > 27q^2$ soit $1 > \frac{27q^2}{-4p^3}$, car p est strictement négatif et donc $-4p^3$ est strcitement positif. Ainsi on a
$\sqrt{\frac{-27q^2}{4p^3}} < 1$ et donc $-q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}$ est dans $]-1,1[$. Comme l'image de $]0,\pi[$ par la fonction cos est $]-1,1[$, on a donc l'existence de $\varphi \in]0,\pi[$ tel que $\cos(\varphi) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}$, et donc en posant $\theta = \frac{\varphi}{3}$, on a $\cos(3\theta) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}$, d'où l'existence de θ tel que x_0 soit solution de (E) et avec θ dans $]0, \frac{\pi}{3}[$.

e) En reprennant les notations de la question précédente, on a : $\cos\left(3\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos(3\theta + 2\pi) = \cos(3\theta) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}}$. Donc $\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$ est aussi une solution. On montre de même que $\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$ est une solution de (E). Ces trois solutions sont deux à deux distinctes. En effet comme θ est dans $]0, \frac{\pi}{3}[$, alors $\theta + \frac{2\pi}{3}$ est dans $]0,\pi[$ et $\theta + \frac{4\pi}{3}$ est dans $]0, \frac{5\pi}{3}[$.
Comme θ et $\theta + \frac{2\pi}{3}$ sont dans $]0,\pi[$ et que ces deux angles sont distincts, alors ils n'ont pas le même cosinus.
Montrons que $\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$ est différent de $\cos(\theta)$ et de $\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$. Raisonnons par l'absurde. On suppose que l'on a $\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos(\theta)$. Soit θ et $\theta + \frac{4\pi}{3}$ ont la même mesure principale, soit $\theta + \frac{4\pi}{3}$ et $-\theta$ ont la même mesure principale. Le premier cas est exclus car θ et $\theta + \frac{4\pi}{3}$ sont tous les deux dans $[0, 2\pi[$. Pour le deuxième cas, comme $2\pi - \theta$ est dans $]\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$, alors c'est la mesure principale de $-\theta$ et donc on a $2\pi - \theta = \theta + \frac{4\pi}{3}$. Ceci est impossible car $2\pi - \theta$ est dans $]\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$ et $\theta + \frac{4\pi}{3}$ est dans $]0, \frac{5\pi}{3}[$.
On suppose maintenant que l'on a $\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$. Ainsi soit $\theta + \frac{2\pi}{3}$ et $\theta + \frac{4\pi}{3}$ ont la même mesure principale, soit $\theta + \frac{4\pi}{3}$ et $-\theta - \frac{2\pi}{3}$ ont la même mesure principale. Le premier cas est impossible car $\theta + \frac{2\pi}{3}$ et $\theta + \frac{4\pi}{3}$ sont dans $[0, 2\pi[$. Pour le deuxième cas, comme $2\pi - \theta - \frac{2\pi}{3}$ est dans $]\pi, 2\pi[$, c'est la mesure principale de $-\theta - \frac{2\pi}{3}$ et donc on a $\theta + \frac{4\pi}{3} = 2\pi - \theta - \frac{2\pi}{3}$, ce qui équivaut à $\theta = \frac{2\pi}{3}$, ce qui est exlus.
Ainsi les trois solutions de (E) qui sont deux à deux distinctes sont :
$\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos(\theta)$, $\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$.

f) On a $\Delta = 4(-3)^3 + 27 \times 1 = -81 < 0$. Ainsi l'équation admet trois solutions réelles. On cherche une solution sous la forme $\sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos(\theta) = \sqrt{\frac{12}{3}}\cos(\theta) = 2\cos(\theta)$. On doit avoir $\cos(3\theta) = -q\sqrt{\frac{-27}{4p^3}} = -\frac{1}{2}$. Ainsi on a $3\theta = \frac{2\pi}{3}$ soit $\theta = \frac{2\pi}{9}$. Ainsi les solutions de (E) sont données par $2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$, $2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ et $2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) = 2\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$.

4.a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} =$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{b^3}{27a^3} + \frac{c}{a}x - \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{cb}{3a^2} - \frac{b^3}{9a^3} + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{a}.$$

Ainsi comme a est non nul, l'équation (E') est équivalente à l'équation $(E^{''})$.

b) Grâce à la question précédente, on remarque qu'en posant $X = x + \frac{b}{3a}$, résoudre E'' (ce qui équivalent à résoudre (E')), revient à résoudre l'équation $X^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right) X + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$. C'est une équation du type $X^3 + pX + q = 0$, avec $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$ et $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{cb}{3a^2} + \frac{d}{a}$. Ainsi pour avoir les solutions de (E'') ou de (E'), il suffit de connaître les solutions de l'équation $X^3 + pX + q = 0$ que l'on sait résoudre. On trouve ainsi les X convenables, puis les x solutions de (E').

c) On pose $X = x + \frac{6}{3\times 2} = x + 1$. On doit donc résoudre l'équation $X^3 + \left(\frac{-6}{2} - \frac{36}{3\times 4}\right) X + \frac{2\times 6^3}{3^3\times 2^3} + \frac{36}{3\times 4} + \frac{-22}{2} = 0$, soit $X^3 - 6X - 6 = 0$. On a déjà vu que cette équation admet une seule solution réelle qui est $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Ainsi l'équation $2x^3 + 6x^2 - 6x - 22 = 0$ admet une seule solution réelle qui est $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 1$. $\square$