Introduction aux nombres complexes

E. Miot

Niveau : Première et anticipation de la Terminale S

Difficulté : Pas difficile, sauf le dernier exercice.

Durée : 1h30

Rubrique(s) : Algèbre (Ensemble des nombres complexes)

Géométrie (Géométrie plane, représentation géométrique des nombres complexes, transformations du plan)

La petite histoire... Deux réels sont en boîte de nuit. L'un dit à l'autre : tu viens danser ?

Les nombres complexes sont apparus au XVIème siécle et leurs utilité et applications ont été innombrables. À l'origine, il s'agit de résoudre des équations, et en particulier celle ci

$$x^2 = 1.$$

Elle n'a pas de solutions réelles, et il faut introduire une solution dans un monde imaginaire, noté $\mathbb{C}$, formé des nombres complexes.
Ces nombres s'avèrent rapidement pratiques pour beaucoup de calculs, en maths et plus généralement en physique, comme par exemple en électricité. Ils s'interprètent aussi d'un point de vue géométrique et donnent ainsi de nouvelles armes analytiques pour des questions de géométrie euclidienne. Vous en aurez un premier aperçu ici.
Ensuite, le monde des fonctions de la variable complexe s'est révélé extrêmement riche avec de multiples applications pour le calcul d'intégrales ou la théorie des nombres. Les fonctions dérivables au sens complexe se trouvent en effet dotées de beaucoup de propriétés qui sont fausses pour les fonctions de la variable réelle. L'aventure des nombres complexes est déjà longue et pas prête de s'achever. Elle commence peut être ici pour vous...

Exercice 1 (Mathématiciens sans complexes). Au XVI$^{\text{ième}}$ siècle, le problème de la résolution des équations du troisième degré passionna bon nombre de mathématiciens italiens. Jérôme Cardan généralisa une méthode proposée par Tartaglia pour résoudre certaines de ces équations. Pour l'équation $x^3 + px = q$, il proposa la solution suivante :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{si} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geqslant 0.$$

Cette formule est depuis lors appelée formule de Cardan.

1) Soit l'équation $x^3 - 3x = 2$. Quelles sont les valeurs de p et q ? Trouver une solution.

2) Considérons à présent l'équation $x^3 - 15x = 4$. Peut-on appliquer la formule de Cardan ? Quelle *formule* obtient-on si on décide tout de même de l'appliquer ?

3) Le peu scrupuleux Jérôme Cardan, bientôt suivi par Raphaël Bombelli, introduisit un ***nombre imaginaire dont le carré vaut*** -1 et le nota $\sqrt{-1}$. En admettant comme eux que $(\sqrt{-1})^2 = -1$ et en utilisant les règles habituelles d'addition et de multiplication, montrer que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}.$$

4) En déduire que la *formule* de Cardan trouvée à la question 2) produit $x = 4$ comme solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$. Vérifier que $x = 4$ est bien une solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$.

Corrections.

1) Nous avons $p = -3$ et $q = 2$, de sorte que la formule de Cardan donne $x = 2$ comme solution.

2) Ici $p = -15$ et $q = 4$. Ainsi, $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -121 = -(11)^2$ est négatif, c'est pourquoi on ne peut pas appliquer la formule de Cartan puisque cette dernière fait intervenir $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Cependant, si l'on décide tout de même de l'appliquer nous obtenons la *formule* suivante : $x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$. Tout ceci est complètement formel...

3) En développant comme pour les nombres réels normaux, on trouve

$$\begin{aligned}
(2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \times 2^2 \times \sqrt{-1} + 3 \times 2 \times (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\
&= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\
&= 2 + 11\sqrt{-1},
\end{aligned}$$

et, de même, $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$.

4) D'après ce qui précède, on a donc $2 - \sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$ et $2 + \sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$. Ainsi, la formule de Cardan du 2) nous donne $x = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4$.
On vérifie par ailleurs aisément que $4^3 - 15 \times 4 = 4$. □

En fait, la notation $\sqrt{-1}$ peut engendrer des confusions, puisque d'après nos règles usuelles de calcul on devrait alors avoir

$$-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = 1\ !$$

Plus tard, Leonard Euler sauva la situation en remplaçant $\sqrt{-1}$ par la notation : i, comme "imaginaire". Attention, dorénavant la notation $\sqrt{-1}$ est interdite...
Les premiers nombres complexes furent donc introduits dans le but de résoudre des équations. Par exemple nous venons, grâcee à eux, de trouver une solution réelle à l'équation $x^3 - 15x = 4$. Mais leur utilisation permet également de résoudre des équations qui n'ont pas de solutions rélles, dans un espace de nombres "plus grand". Ainsi, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions réelles mais elle a deux solutions complexes : $+i$ et $-i$.
Définissons à présent cet ensemble de façon plus précise.

On appelle dorénavant ensemble des nombres complexes, que l'on note $\mathbb{C}$, un ensemble contenant $\mathbb{R}$ et qui vérifie

- Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + ib$, avec a et b réels, et cette écriture est unique.
- On additionne et on multiplie les nombres complexes en utilisant les mêmes règles que pour les nombres réels.

  Les nombres complexes sont généralement notés z.

Quelques définitions :

- La ***partie réelle*** de $z = a + ib$ est a. On la note $\Re\mathrm{e}(z)$.
- La ***partie imaginaire*** de $z = a + ib$ est b : attention c'est un réel ! On la note $\Im\mathrm{m}(z)$.
- Le ***module*** de $z = a + ib$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$: attention il s'agit toujours d'un réel positif ! On le note $|z|$.
- Le ***conjugué*** de $z = a + ib$ est $a - ib$. On le note $\overline{z}$.

Exercice 2 (Échauffement).

1) Soient $z_1 = 2-5i$ et $z_2 = 1+3i$. Mettre sous forme $a+ib$ les nombres z_1+z_2 et z_1z_2.

2) Soit $z = 2+3i$.

a) Calculer z^2 et $|z|^2$. Que constate-t-on ?

b) Calculer $z\overline{z}$. Que remarque-t-on ? Peut-on généraliser ?

3) Soient z_1 et z_2 les nombres complexes $z_1 = \frac{i}{4-3i}$ et $z_2 = \frac{1+i}{1-i}$.

a) Mettre sous la forme $a+ib$ les nombres z_1, z_2, $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{z_2}$, z_1z_2.

b) Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$.

4) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Montrer que $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$. En déduire que $|z_1||z_2| = |z_1z_2|$.

Indications et Commentaires :

1) Mêmes règles de calcul pour $+$ et $\times$ que pour les réels, sans oublier que $i^2 = -1$.

3) Multiplier les fractions par le conjugué du dénominateur.

4) S'aider de la question **2.b)**.

Corrections.

1) Par définition des opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$, on obtient $z_1+z_2 = 3-2i$, et $z_1z_2 = 2+6i-5i-15i^2 = 17+i$.

2.a) On a $z^2 = (2+3i)^2 = 4+12i+9i^2 = -5+12i$. Par ailleurs, $|z|^2 = 4+9 = 13$. Par conséquent z^2 et $|z|^2$ sont deux quantités différentes ! De manière générale, lorsque z est un nombre complexe les quantités z^2 et $|z|^2$ sont égales si et seulement si z est réel.

2.b) On a $z\overline{z} = (2+3i)(2-3i) = 13$, d'où le fait que $z\overline{z} = |z|^2$. En fait l'identité précédente est vraie pour tout nombre complexe $z = a+ib$, puisque $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$.

3.a) On multiplie par la quantité conjuguée, c'est-à-dire que l'on multiplie en haut et en bas par le nombre conjugué du dénominateur. Ensuite on se souvient que d'après la question précédente $z\overline{z} = |z|^2$ est réel pour tout complexe z :

$$z_1 = \frac{i}{4-3i} = \frac{i(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{4i-3}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

De la même façon, on trouve : $z_2 = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i$, $\frac{1}{z_1} = -3-4i$, $\frac{1}{z_2} = -i$, et $z_1z_2 = -\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$.

3.b) On obtient $|z_1| = \frac{1}{5}$ et $|z_2| = 1$.

4.a) Écrivons $z_1 = a_1+ib_1$ et $z_2 = a_2+ib_2$. Il s'ensuit que $\overline{z_1z_2} = a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_1b_2+a_2b_1) = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.
Ensuite, grâce à la question **2.b)** on a $|z_1z_2|^2 = z_1z_2\overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1}\ \overline{z_2} = z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = |z_1|^2|z_2|^2$.
On obtient donc $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$, puisque les modules sont des quantités positives. □

Exercice 3 (Complexes et arithmétique). Soient p et q des entiers relatifs. On suppose que p et q sont tous les deux sommes de deux carrés, c'est-à-dire qu'il existe des entiers relatifs a, b, c et d tels que

$$p = a^2+b^2 \quad \text{et} \quad q = c^2+d^2.$$

Montrer que le produit pq est encore somme de deux carrés.

Indications et Commentaires : On pourra écrire que $a^2+b^2 = |a+ib|^2$, etc... Puis on pourra utiliser l'exercice **1** question **4)**.

Corrections. À partir de nos entiers relatifs a, b, c, d, fabriquons les nombres complexes : $a+ib$ et $c+id$. Puisque $p = |a+ib|^2$ et $q = |c+id|^2$, on a

$$\begin{aligned} pq &= (|a+ib||c+id|)^2 \\ &= |(a+ib)(c+id)|^2 \\ &= |(ac-bd)+i(ad+bc)|^2. \end{aligned}$$

Et donc $pq = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ est bien la somme de deux carrés d'entiers. $\square$

Exercice 4 (Un peu de géométrie). Il existe en fait une description complètement géométrique de l'ensemble des nombres complexes. Considérons le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

- Au nombre $z = a + ib$, on associe le point $M(z)$ du plan de coordonnées a et b, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$.
- Au point M du plan de coordonnées a et b, on associe le nombre complexe $z = a + ib$. Ce nombre est appelé affixe de M.

1) Placer les points d'affixes 0, 1, i, $1 + i$.

2) Soit z un nombre complexe.

a) Quelle est l'interprétation géométrique de $|z|$?

b) Placer les points M, N, P, Q, d'affixes respectives z, $\overline{z}$, $-z$, $3z$. Par quelles transformations géométriques obtient-on les points N, P, Q, à partir de M ?

3) (Plus difficile) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

a) $|z| = |z - 1| = \frac{1}{|z|}$.

b) $|z - i| = |z + 1|$ et $|z + i| = |z - 2|$.

Corrections.

1)

2.a) Le module de $|z|$ n'est rien d'autre que la distance OM, où M est le point du plan d'affixe z.

2.b) Le point $N(\overline{z})$ est obtenu à partir de M par la symétrie axiale d'axe (Ox). Le point $P(-z)$ est obtenu par la symétrie centrale de centre O. Le point $Q(3z)$ est obtenu par l'homothétie de centre O, de rapport 3.

3.a) On a $|z| = |z - 1|$ et $|z| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |z| = |z - 1|$ et $|z| = 1 \Leftrightarrow |z - 1| = 1$ et $|z| = 1 \Leftrightarrow AM = 1$ et $OM = 1$, où $A = A(1)$ est le point d'affixe 1. L'ensemble cherché est donc l'intersection des cercles $C(A, 1)$ et $C(0, 1)$ de centres A et O respectivement, et de rayon 1. Il est donc constitué des deux points d'affixes respectives $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.b) Introduisons les points $A(i)$, $B(-1)$, $C(-i)$ et $D(2)$. On cherche l'ensemble des points M tels que $AM = BM$ et $CM = DM$ c'est-à-dire l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[CD]$. Il s'agit donc d'un singleton (c'est-à-dire un ensemble constitué d'un unique point). Calculons l'affixe z correspondante.

On a d'une part $|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow |z - i|^2 = |z + 1|^2 \Leftrightarrow (z - i)(\overline{z} + i) = (z + 1)(\overline{z} + 1) \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{i-1}{i+1}z$. En multipliant par la quantité conjuguée ceci nous donne finalement $|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow \overline{z} = iz$.

D'autre part, $|z + i|^2 = |z - 2|^2 \Leftrightarrow z(2 - i) + \overline{z}(i + 2) = 3$. En injectant le fait que $\overline{z} = iz$ on en déduit que $z(2 - i) + iz(i + 2) = 3$ soit $z(1 + i) = 3$.

En conclusion, l'unique z tel que $|z - i| = |z + 1|$ et $|z + i| = |z - 2|$ est $z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$. $\square$

Exercice 5 (De la trigonométrie). Soit z un nombre complexe. Il existe toujours un nombre θ appartenant à $[0, 2\pi[$ tel que l'on puisse écrire z sous la forme $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. On parle de forme trigonométrique de z. On pose alors

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

et on note $z = |z|e^{i\theta}$.

1) Calculer $e^{\frac{i\pi}{2}}$, $e^{\frac{i\pi}{4}}$, $e^{i\pi}$, $e^{2i\pi}$ et représenter les points du plan correspondant.

2) Soient θ_1 et θ_2 deux réels. Montrer que $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$.

3) Soit $z = |z|e^{i\theta}$.

a) Donner la forme trigonométrique de iz.

b) Par quelle transformation géométrique du plan passe-t-on du point M d'affixe z, au point M' d'affixe iz ?

4) Soit $z = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{3}$.

a) Mettre z sous forme trigonométrique.

b) En utilisant la question 2), en déduire la forme trigonométrique de z^7.

5) Soient $z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{\frac{-i\pi}{4}}$.

a) Mettre sous la forme $a + ib$ les nombres z_1, z_2, $z_1 z_2$.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Corrections.

1) On a $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{2i\pi} = 1$.

2) En appliquant les formules de trigonométrie,

$$\begin{aligned} e^{i(\theta_1+\theta_2)} &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1) \\ &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}. \end{aligned}$$

3) D'après les questions précédentes, on a $iz = |z|e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta} = |z|e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$. Par conséquent, multiplier par i le complexe z revient à faire tourner le vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$ d'un angle de $+\pi/2$.

4.a) On a $|z| = \frac{2}{3}$ et donc $z = \frac{2}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

4.b) On en déduit que $z^7 = (\frac{2}{3})^7 e^{i\frac{7\pi}{6}} = \frac{128}{2187}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

5) On a $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et par conséquent $z_1 z_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. Mais comme par ailleurs $z_1 z_2 = e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$, on en déduit, en identifiant parties réelles et imaginaires, que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. □

Exercice 6 (Plus difficile). Soit n un entier naturel non nul. Calculer, lorsque x est un réel, les sommes

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

Indications et Commentaires : Former le complexe $S_1 + iS_2$. Que reconnaît-on grace à l'exerice précédent et au cours sur les suites ?

On pourra utiliser également la formule de l'angle moitié :

$$1 - e^{ix} = -2ie^{ix/2}\sin(x/2).$$

Corrections. Remarquons que $S_1 + iS_2 = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$. On reconnaît la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison e^{ix} et de premier terme 1. Il faut savoir quand la raison est égale à 1, c'est à dire résoudre pour $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{ix} = 1, \qquad \cos x + i\sin x = 1 + i.0, \qquad \cos x = 1,\ \sin x = 0.$$

Les solutions sont les réels $x = 2ik\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Et donc il y a deux cas :

Si x s'écrit sous la forme $x = 2ik\pi$ avec k entier relatif alors $e^{ix} = 1$, donc $S_1 + iS_2 = n+1$ soit $S_1 = n+1$ et $S_2 = 0$.

Sinon, $e^{ix} \neq 1$ et alors

$$\begin{aligned} S_1 + iS_2 = \frac{1 - e^{ix(n+1)}}{1 - e^{ix}} &= \frac{e^{\frac{ix(n+1)}{2}}(e^{-\frac{ix(n+1)}{2}} - e^{\frac{ix(n+1)}{2}})}{e^{\frac{ix}{2}}(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}})} \\ &= \frac{e^{\frac{ix(n+1)}{2}}(-2i\sin(\frac{x(n+1)}{2}))}{e^{\frac{ix}{2}}(-2i\sin(\frac{x}{2}))} = e^{\frac{ixn}{2}}\frac{\sin(\frac{x(n+1)}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}. \end{aligned}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient finalement

$$S_1 = \cos(\frac{nx}{2})\frac{\sin(\frac{x(n+1)}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$
$$S_2 = \sin(\frac{nx}{2})\frac{\sin(\frac{x(n+1)}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

$\square$