Liens logiques

N. Jacquet

Niveau : Première et préparation à la terminale

Difficulté : Pas difficile dans l'ensemble

Durée : une petite heure

Rubrique(s) : Raisonnement (Logiques, condition nécessaire ou suffisante)

La petite histoire... Dans une argumentation ou un débat, et en mathématiques, il est important de bien savoir utiliser les liens logiques et notamment comprendre quand un argument est « exact », trop fort, pas assez fort, « À l'envers » (quand on mélange la cause et la conséquence) ou n'a rien à voir avec ce que l'on cherche à montrer. Précisons ce que l'on entend dans chacun de ces cas.

« exact » il permet de vraiment justifier une affirmation, sans saupoudrer de choses inutiles en soulignant la « bonne » raison pour laquelle l'assertion est juste.

Par exemple, « Bip Bip ne se fait pas manger par le coyote car il court plus vite, est malin et a de la chance » ou « J'ai eu mon bac car j'ai eu plus de 10 de moyene ».

« Trop fort » quand l'argument permet certes de justifier l'assertion, mais il est (bien) trop fort et on pourrait utiliser un argument plus adapté.

Par exemple, « Je mange à ma faim car je suis millionaire », ou « J'ai eu mon bac car j'ai eu mention B ».

« Pas assez fort » quand l'argument ne permet pas de justifier l'assertion, il est insuffisant, et peut être mis en défaut.

Par exemple, « J'ai eu mon bac car je me suis rendu à toutes les épreuves ».

« À l'envers » quand l'argument est plus une conséquence qu'une cause.

Par exemple, « J'ai eu mon bac car j'ai fait la fête après ».

« Rien à voir » L'argument avancé est sans rapport avec la discussion.

Par exemple, « Bip Bip ne se fait pas manger par le coyote car le coyotte ne sait pas chanter au clair de la lune » ou « J'ai eu mon bac car j'ai mangé de la soupe étant petit ».

Exercice 1. Dans chacune des situations suivantes, précisez si les arguments donnés sont exacts, trop forts, pas assez forts, à l'envers ou n'ont rien à voir. Bien sûr, parfois, c'est une question d'appréciation et les réponses peuvent ici faire l'objet de discussions... Quand l'argument n'est pas assez fort, on justifiera avec un contre-exemple. Quand il est trop fort, on précisera pourquoi.

1) Je pense que Martin a un faible pour Noemie car
- ils ont le même signe astrologique ;
- il a été lui parler hier ;
- il ne laisse personne s'approcher d'elle ;
- ils sortent ensemble ;
- il lui a envoyé un texto "Jtkif grav".

2) Eric est en infraction car
- il est convoqué par la police ;
- il a volé plus de 1000000 euros de matériel ;
- il a volé ;

– il s'est levé tard le matin ;
– il a doublé tout le monde à la cantine.

3) John va être convoqué au tribunal car
– il a tué une personne avec préméditation et il s'est enfui ;
– il a croisé un policier ;
– il aime bien Claude François ;
– il a volé et a été reconnu sur la vidéo ;
– il a demandé quel bus s'arrête au tribunal.

4) f s'annule sur le segment $[a, b]$ ($\exists x \in [a, b] \ : \ f(x) = 0$) car
– f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) > 0$, $f(b) < 0$;
– f est un polynôme ;
– il existe $x \in [a; b]$ tel que $f(x)$ soit un entier ;
– f est strictement croissante et $f(a) = -1$, $f(b) = 2$;
– f dérivable sur $[a, b]$ et $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

5) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel car
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée ;
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encadrée par deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers la même limite ;
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
– La suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro ;
– u_0 est positif.

6) Le polynôme $P(x) = x^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes, car
– $b^2 - 4c > 0$.
– $b^2 - 4c \geqslant 0$.
– $c < 0$.
– $P(0) = 7$.
– la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{bx^2}{2} + cx$ n'est pas monotone.

Corrections.

1) Pas assez fort : « il lui a parlé hier » ne suffit pas à dire qu'il a un faible pour elle. Les garcons peuvent (heureusement) parler à des filles pour d'autres raisons.
Exact : « il lui a envoyé un texto "Jtkif grav" » est l'argument exact. Il pourrait aussi lui écrire une poésie pour décrire ce qu'il ressent.
Trop fort : « il ne laisse personne s'approcher d'elle » est certes un argument qui laisse penser qu'il est très épris, mais c'est bien trop fort. On peut espérer que son sentiment se manifeste autrement.
À l'envers : « ils sortent ensemble » est a priori une conséquence du fait qu'il y a quelque chose entre eux, plus qu'une cause.
Rien à voir : « ils ont le même signe astrologique » n'a, a priori, pas grand chose à voir, et ils ne le savent peut etre même pas.

2) Pas assez fort : « il a doublé tout le monde à la cantine » n'est pas une infraction, même si ceci n'est vraiment pas civique.
Exact : « il a volé » est l'argument exact.
Trop fort : « Il a volé plus de 1000000 euros de matériel » est certes un argument suffisant, mais trop fort : "plus de 1000000 euros" est inutile (on est en infraction pour moins que ça en principe !).
À l'envers : « Il est convoqué par la police » est une conséquence du fait d'être en infraction, pas une cause.
Rien à voir : « il s'est levé tard le matin » n'a bien sur « rien à voir » avec une infraction. Heureuse-

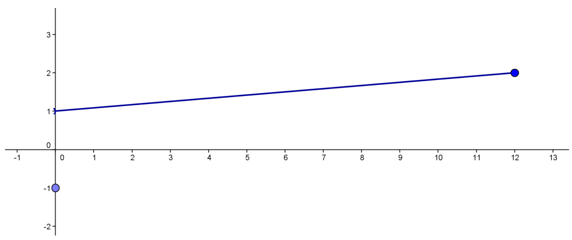
ment...

3) Pas assez fort : « car il a croisé un policier » n'est bien sûr pas suffisant pour qu'il soit convoqué, ce n'est « pas assez fort ». Sinon cela voudrait dire que dès que l'on croise un policier, on est convoqué au tribunal...
Exact : « il a volé et a été reconnu sur la vidéo » semble un argument « exact ». Pas forcément trop fort puisque s'il n'est pas identifié, il ne sera pas convoqué a priori...
Trop fort : « il a tué une personne et il s'est enfuit » suffit à provoquer une convocation au tribunal, mais est « trop fort » car on sera convoqué même si on ne s'est pas enfuit (le problème serait plutot d'être repéré ou pas).
À l'envers : « il a demandé quel bus s'arrête au tribunal » est plus une conséquence qu'une cause. En effet s'il n'avait pas été convoqué, il n'aurait peut-être jamais posé cette question.
Rien à voir : « car il aime bien Claude François ».

4) Il s'agit ici du théorème des valeurs intermédiaires (TVI). Ce théorème dit que si la fonction prend une valeur négtive et une valeur positive et qu'elle est continue entre ces deux valeurs, alors elle s'annule quelque part. C'est la version mathématique de

- La température valait -3 degré hier à minuit, elle vaut 1 degré aujourd'hui à minuit, elle a donc valu exctament 0 à un moment entre les deux. C'est vrai si la température varie continuement, c'est à dire sans faire de sauts de valeurs.
- Je suis d'un côté de la rivière, je vais aller de l'autre côté, sans faire de sauts. Je suis donc obligé de me mouiller les pieds (la valeur 0 est ici la rivière).

Pas assez fort : « f est strictement croissante et $f(a) = -1$, $f(b) = 2$ » n'est pas suffisant car la stricte croissance ne sert à rien s'il manque la continuité. Voilà un contrexemple, c'est à dire une fonction strictement croissante telle que $f(a) = -1$ et $f(b) = 2$, sans point d'annulation dans $[a, b]$. On prend ici $a = 0$ et $b = 12$.



Exact :« f continue sur $[a, b]$ et $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ » grâce au TVI.
Trop fort : « f dérivable sur $[a, b]$ et $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ », car certes f dérivable implique f continue donc les hypothèses du TVI sont satisfaites, mais f dérivable est trop fort : certaines fonctions sont continues mais non dérivables. Ainsi $f(x) = |x| - 1$ est continue sur $[0, 2]$ (avec $f(0) < 0, f(2) > 0$), mais n'est pas dérivable en 1. On peut néanmoins lui appliquer le TVI.
À l'envers : « il existe $x \in [a; b]$ tel que $f(x)$ soit un entier ». En effet, si pour un certain x, on a $f(x) = 0$, alors $f(x)$ est un entier. C'est plutôt une conséquence. Mais cette condition peut être vue comme « pas assez forte » aussi.
Rien à voir : « f est un polynôme ». Prenez par exemple $f(x) = x^2 + 1$ qui ne s'annule jamais.

5) Pas assez fort : « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante » n'est pas suffisant, il aurait fallu la majorer en plus. Par exemple $u_n = n$ est une suite croissante qui ne converge pas.
Exact : « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encadrée par deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers la même limite ». En effet c'est le théorème des gendarmes qui assure la convergence de la suite u. Notons d'ailleurs que la réciproque est vraie : si u converge on peut prendre $u = v = w$ pour encadrer la suite u par deux suites qui convergent vers la même limite.
Trop fort :« u_n est croissante bornée ». En effet, pour justifier la convergence, il suffit de montrer que la suite est croissante majorée. En fait elle est automatiquement minorée par u_0 si elle est croissante. Notons enfin qu'il y a des suites qui convergent sans être croissantes, comme la suite $(1/n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$.
À l'envers : « la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro » est une conséquence de la convergence. Cet argument peut aussi être considéré comme « pas assez fort ». Par exemple, on peut voir que la suite

$(\sqrt{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ mais que $\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$ a une limite nulle en $+\infty$.
Rien à voir : « u_0 est positif ». Par exemple la suite $(n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

6) Pas assez fort : « $b^2-4c \geqslant 0$ », car le discriminant peut être nul et dans ce cas on peut avoir une racine double. Ceci est par exemple le cas pour $b=2$ et $c=1$. Ainsi on a $P(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$ et donc -1 est une racine double.
Exact : « $b^2-4c>0$ », car le discriminant est strictement positif.
Trop fort : « $c<0$ ». Dans ce cas le disriminant b^2-4c est automatiquement strictement positif. Mais on peut très bien avoir deux racines distinctes sans que l'on ait $c<0$. Par exemple pour $b=3$ et $c=1$, on a bien deux racines distinctes car le discriminant vaut 5.
À l'envers : « la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{3}x^3+\frac{bx^2}{2}+cx$ n'est pas monotone » semble être une conséquence. En effet on a $g'=P$. Donc si P admet deux racines distinctes, alors P n'est pas de signe constant et donc g' non plus. Ainsi g ne peut être monotone. Donc, a priori, ceci semble être plutôt une conséquence du fait que P admette deux racines réelles distinctes. Mais on peut prouver que c'est un argument exact. En effet g n'est pas monotone si et seulement si $g'=P$ n'est pas de signe constant si et seulement si P est tantôt strictement positif et tantôt strictement négatif. Ceci est équivalent au fait que P ait deux racines distinctes car c'est un trinôme du second degré.
Rien à voir : « $P(0)=7$ ». On peut par exemple considérer le polynôme $P(x)=x^2+7$ qui ne s'annule jamais et pourtant $P(0)=7$. □

Indications et Commentaires : Vous verrez plus tard que ceci a un lien avec ce que l'on appelle une condition nécessaire, une condition suffisante et une condition à la fois nécessaire et suffisante.
Dans un énoncé demandant une condition nécessaire pour qu'une affirmation soit vraie, il faut chercher des hypothèses indispensables pour réaliser cette affirmation. Mais attention, ces hypothèses ne sont pas forcément suffisantes. L'expression « il faut » est associée à une condition nécessaire.

(i) Pour qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel il faut que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers zéro ;
(ii) Pour que $P(x)=x^2+bx+c$ admette deux racines distinctes, il faut que $b^2-4c\geqslant 0$;
(iii) Pour qu'une fonction dérivable ait un extremum en a, il faut que $f'(a)=0$.

On remarquera que dans tous les exemples précédents, il n'y a aucune condition suffisante.
Dans l'exercice, ceci est à rapprocher des conditions « **Pas assez fortes** ». Mais aussi lorsque l'on fait les raisonnements « **À l'envers** », ceci nous a permis d'extraire des conditions nécessaires. En effet si une affirmation de départ A a pour conséquence une affirmation B, alors pour que A soit réalisée, il faut obligatoirement que B le soit. Quand on a fait le raisonnement « À l'envers », on a prétendu que l'affirmation B impliquait l'affirmation A. Par exemple, soient x et y deux réels fixés : $x=0$ implique $xy=0$, mais la réciproque est fausse.
Dans un énoncé demandant une condition suffisante pour qu'une affirmation soit vraie, il faut chercher des hypothèses qui valident automatiquement cette affirmation. Mais attention si une condition suffisante n'est pas réalisée, ceci ne veut pas dire que notre affirmation est fausse.

(i) Pour qu'une suite soit convergente, il suffit qu'elle soit croissante et majorée ;
(ii) Pour que $P(x)=x^2+bx+c$ admette deux racines distinctes, il suffit que l'on ait $c<0$;
(iii) Pour qu'une fonction dérivable f vérifie $f'(a)=0$, il suffit que f admette un extremum en a.

On remarquera que dans tous les exemples précédents, il n'y a aucune condition nécessaire.
Dans l' exercice, elles sont à rapprocher des conditions « **Trop fortes** ».
Chercher une condition nécessaire et suffisante (CNS) revient à chercher une équivalence entre une affirmation et une autre affirmation. En général entre ces deux affirmations figure un « si et seulement si ».

(i) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel si et seulement si elle est encadrée par deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers la même limite ;
(ii) Le polynôme $P(x)=x^2+bx+c$ admet deux racines distinctes si et seulement si $b^2-4c>0$;
(iii) $f : [-1;1]\to\mathbb{R}$, dérivable admet un minimum en 0 si et seulement si toute primitive de la fonction $f-f(0)$ est croissante.

Les conditions « **Exactes** » de l'exerice sont souvent des (CNS).