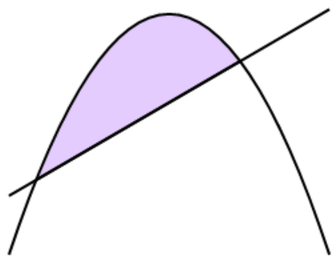
Méthode d'exhaustion pour un calcul d'aire

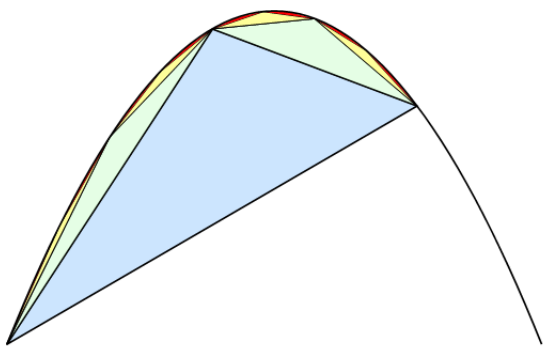
R. Danflous

Niveau : Première et anticipation de la Terminale S
Difficulté : Difficile
Durée : plus d'une heure
Rubrique(s) : Géométrie analytique (plane), Suites

La petite histoire... Le but de ce problème est de calculer l'aire d'un *segment de parabole* [1] par la méthode d'exhaustion élaborée par Archimède au IIIᵉ siècle avant Jésus-Christ.

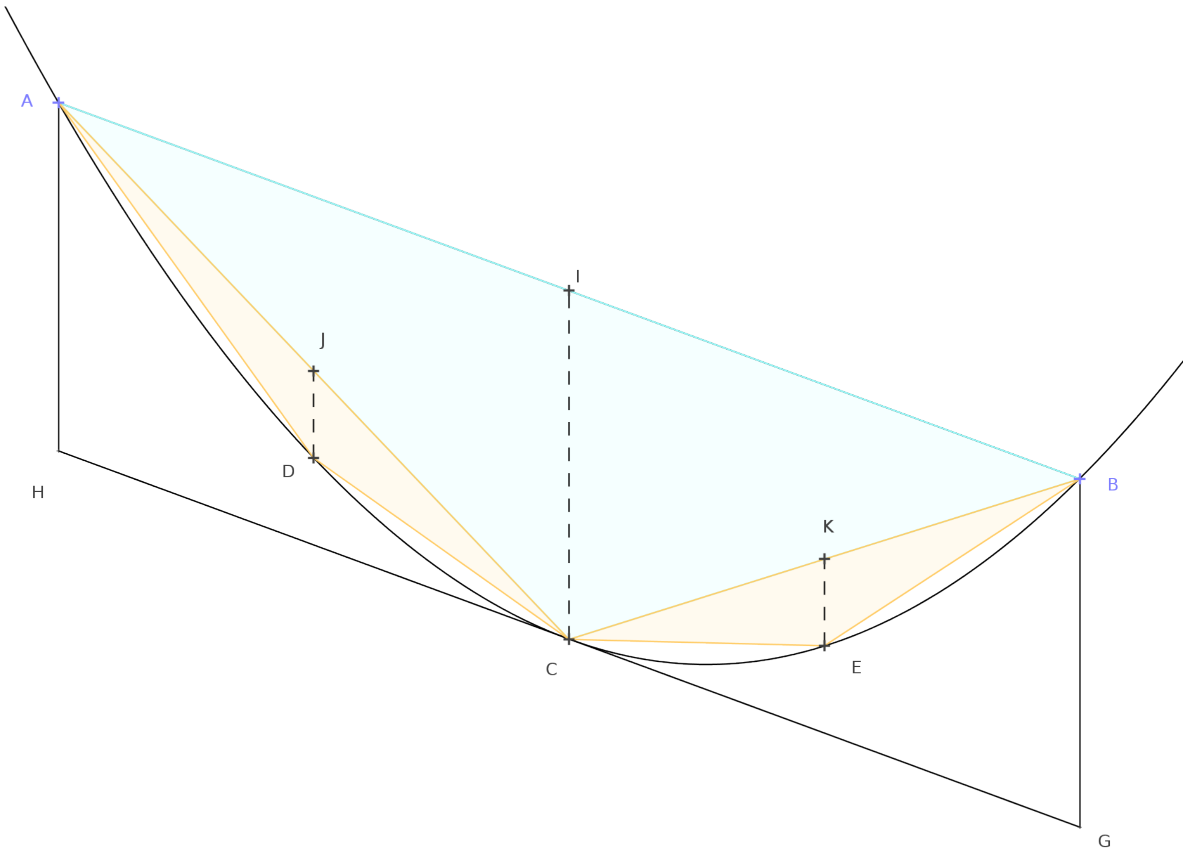


Cette méthode consiste à découper dans le segment de parabole des triangles de plus en plus petits. L'aire de chacun des petits triangles se calcule en fonction des triangles précédents, et l'objectif est de comparer l'aire du segment de parabole à celle du triangle initial.



Exercice 1.
On considère une parabole $\mathcal{P}$ dans le plan.
Soient A et B deux points distincts de cette parabole. On cherche à calculer l'aire comprise entre [2] l'arc de parabole AB et le segment [AB].
On considère C le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse la moyenne de celles de A et de B.
Dans tout le problème, on appelle $\mathcal{S}$ l'aire du segment de parabole mentionné ci-dessus et $\mathcal{A}$ celle du triangle ABC.

1. Un segment de parabole est la *surface* comprise entre un arc de parabole et la corde reliant les extrémités de cet arc. Par exemple, la surface en violet de la première figure est un segment de parabole.
2. Le fait que le segment [AB] ne traverse pas la parabole est lié à la convexité de la parabole.



Dans tout l'exercice, on choisit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.
Par souci de commodité de calcul, on va travailler sur la parabole $\mathcal{P}$ d'équation

$$y = \frac{x^2}{2p},$$

où p est un réel strictement positif donné. Le cas général s'obtient en appliquant une rotation et une translation à cette parabole.

1) Soit I le milieu du segment [AB].
On considère le parallélogramme ABGH où G est tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{IC}$ et H complète le parallélogramme.
Montrer que l'aire de ce parallélogramme est supérieure à celle du segment de parabole.
En déduire que l'aire du triangle ABC est supérieure à la moitié de l'aire du segment de parabole.

2) Soit D le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse la moyenne de celles de C et de A.
Soit J le milieu de [AC].
Montrer que CI=4DJ.

3) En déduire que l'aire du triangle ADC est égale au huitième de l'aire du triangle ABC.

4) Pour le moment, on a construit deux triangles à l'intérieur de la surface à calculer. Mais de la même façon que l'on a construit le triangle ADC, on peut construire un

triangle BEC où E est d'abscisse moyenne entre B et C. Le résultat montré pour ADC est toujours valable.
Ainsi, si on définit la suite A_n telle que A_1 est l'aire du triangle ABC, A_2 celle du polygone ABECD, *i.e.* de la réunion des aires de ABC, ADC et BEC, A_3 celle du polygone ABECD auquel on ajoute quatre triangles construits de la même façon que ADC, on a :

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathcal{A} \\ A_2 &= \mathcal{A} + \frac{1}{4}\mathcal{A} \end{aligned}$$

Montrer que le terme général de la suite A_n vérifie

$$A_n + \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}}{4^{n-1}} = \frac{4}{3}\mathcal{A}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

5) Archimède envisage les trois possibilités suivantes dans son raisonnement :
– ou bien $\mathcal{S} < \frac{4}{3}\mathcal{A}$; – ou bien $\mathcal{S} > \frac{4}{3}\mathcal{A}$; – ou bien $\mathcal{S} = \frac{4}{3}\mathcal{A}$.
On va maintenant montrer par l'absurde que les deux premiers cas ne sont pas possibles et ainsi montrer le résultat prouvé par Archimède, à savoir que l'aire du segment de parabole est égal aux quatre tiers de l'aire du triangle ABC.
Pour montrer ce résultat, on va utiliser l'**axiome d'Archimède** qui stipule :

> *Étant donné deux grandeurs inégales, si de la plus grande on retranche plus que sa moitié puis du reste ainsi obtenu on retranche encore plus que sa moitié et si l'on continue toujours ainsi, nous aboutirons finalement à une grandeur inférieure à la plus petite des grandeurs données.*

a) On suppose ici que $\mathcal{S} > \frac{4}{3}\mathcal{A}$.
À l'aide de l'axiome d'Archimède, en considérant les quantités $\mathcal{S} - A_n$ et $\mathcal{S} - \frac{4}{3}\mathcal{A}$, trouver une contradiction.
b) On suppose ici que $\mathcal{S} < \frac{4}{3}\mathcal{A}$.
Procéder de même qu'à la question précédent, en considérant cette fois-ci $\frac{4}{3}\mathcal{A} - A_n$ et $\frac{4}{3}\mathcal{A} - \mathcal{S}$.
c) Conclure.
On pourra calculer l'aire du triangle ABC en fonction de p et des abscisses des points A et B.

Indications et Commentaires : Pour les premières questions du problème, on peut noter a l'abscisse du point A et b celle du point B, et de là en déduire les coordonnées de tous les points en jeu.
2) On pourra montrer que (GH) est tangente en C à la parabole et montrer que $\mathcal{P}$ est située au-dessus de cette tangente.3) Pour la question sur l'aire du triangle ADC, on pourra montrer que, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &:= ad - bc \\ &= ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\sin((\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})). \end{aligned}$$

Pour cela, on peut démontrer et utiliser l'*identité de Lagrange* :

$$\text{pour tous } a, b, a', b', \text{ on a } (ab' - a'b)^2 + (aa' + bb')^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2),$$

et commencer par prouver ce résultat pour des vecteurs unitaires.

5.a) Penser à utiliser le résultat de la première question.

Corrections.

1) On a A$\left(a, \dfrac{a^2}{2p}\right)$ et $B\left(b, \dfrac{b^2}{2p}\right)$.

Donc I$\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a^2+b^2}{4p}\right)$ et C$\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{(a+b)^2}{8p}\right)$.

On en déduit $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{(a-b)^2}{8p} \end{pmatrix}$.

Ainsi G$\left(b, \dfrac{4b^2 - (a-b)^2}{8p}\right)$ et H$\left(a, \dfrac{4a^2 - (a-b)^2}{8p}\right)$.

Donc G et H sont situés sous la parabole $\mathcal{P}$.

Les droites (AH) et (BG) sont verticales, donc ne rencontrent la courbe $\mathcal{P}$ qu'aux points A et B respectivement. Donc les segments [AH] et [BG] sont situés sous la parabole et sont donc extérieurs au segment de parabole ABC.

De plus, puisque $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BG}$, BGCI est un parallélogramme. Comme (BI)=(AB), on en déduit que (GC)=(GH) et donc C$\in$(GH).

Calculons la pente α de (AB), qui est aussi celle de (GH).

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{b^2 - a^2}{2p(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2p} \end{aligned}$$

Or, si on considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2p}$ définie sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x}{p}$.

Ainsi, la tangente en C à $\mathcal{P}$ a pour pente $\dfrac{a+b}{2p}$: il s'agit donc de la droite (GH).

Une parabole convexe étant toujours située au-dessus de sa tangente, on vient donc de montrer que le parallélogramme ABGH contient le segment de parabole ABC, ce qui prouve bien que l'aire du parallélogramme est supérieure à $\mathcal{S}$.

Or l'aire du triangle ABC est la moitié de celle du parallélogramme ABGH (considérer les parallélogrammes BGCI et CIAH, ou bien le fait qu'ils ont la même base AB et la même hauteur correspondante, puisque C$\in$(GH)).

Donc l'aire de ABC est supérieure à la moitié de l'aire du segment de parabole ABC.

2) Posons $\beta = \dfrac{a+b}{2}$. Alors C$\left(\beta, \dfrac{\beta^2}{2p}\right)$.

Alors, de la même façon que pour I et C, on obtient pour J et D,

J$\left(\dfrac{a+\beta}{2}, \dfrac{a^2+\beta^2}{4p}\right)$ et D$\left(\dfrac{a+\beta}{2}, \dfrac{(a+\beta)^2}{8p}\right)$.

On en déduit $\overrightarrow{JD}\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{(a-\beta)^2}{8p} \end{pmatrix}$.

Ainsi JD$= \dfrac{(a-\beta)^2}{8p}$. Mais $a - \beta = \dfrac{a-b}{2}$.

Ainsi JD$= \dfrac{1}{4}\dfrac{(a-b)^2}{8p}$. Autrement dit

$$IC = 4DJ.$$

3) Pour montrer l'identité de Lagrange, il suffit de développer les deux membres de l'égalité, ce qui ne doit pas poser de problème.

L'identité de Lagrange nous dit que $(xy'-x'y)^2+\cos^2(\theta)=1$ pour deux vecteurs unitaires réalisant un angle θ, et donc que $xy'-x'y=\pm\sin(\theta)$.
Une méthode alternative pour montrer cette égalité sans le problème de signe est d'écrire $\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}|| \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{v}|| \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$. Ainsi, le produit $xy'-x'y$ vérifie :

$$\begin{aligned} xy'-x'y &= ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||(\cos(\alpha)\sin(\beta)-\sin(\alpha)\cos(\beta)) \\ &= ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\sin(\beta-\alpha) \end{aligned}$$

et on a bien la formule souhaitée car $\theta=\beta-\alpha$.
Donc $\mathcal{A}_{ACD} = \frac{1}{2}|x_C-x_A|DJ$ et $\mathcal{A} = \frac{1}{2}|x_B-x_A|CI$. Mais on vient de montrer que DJ$=\frac{1}{4}$IC, et $x_C-x_A=\frac{b-a}{2}$. On a donc bien

$$\mathcal{A}_{ACD} = \frac{\mathcal{A}}{8}.$$

4) Chacun des quatre triangles construits à la troisième étape a une aire égale au huitième de l'aire du triangle ACD, et on a donc ajouté un seizième de l'aire $\mathcal{A}$. Ainsi, à chaque étape, on ajoute deux fois plus de triangles d'aire huit fois plus petite que précédemment, ce qui revient à ajouter un quart de l'aire précédemment ajoutée. On a donc $A_{n+1}-A_n=\frac{\mathcal{A}}{4^n}$ (la suite des différences ainsi définie est donc une suite géométrique) et A_n est donc la somme des termes d'une suite géométrique.
Donc $A_n = \mathcal{A}\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}$, soit $A_n=\frac{4}{3}\mathcal{A}-\mathcal{A}\frac{1}{3\times 4^{n-1}}$, d'où le résultat.

5.a) On a montré avec la première question qu'à chaque étape on ajoutait une surface supérieure à la moitié de ce qu'il restait à combler. Cela signifie donc, par l'axiome d'Archimède, que la quantité $\mathcal{S}-A_n$ peut être rendue aussi petite que l'on veut, et notamment que la quantité $\mathcal{S}-\frac{4}{3}\mathcal{A}$ que l'on suppose strictement positive dans cette question. Ainsi, à partir d'un certain rang, on a $\mathcal{S}-A_n<\mathcal{S}-\frac{4}{3}\mathcal{A}$, ce qui revient à $A_n>\frac{4}{3}\mathcal{A}$.
Or, d'après la question précédente, $A_n=\frac{4}{3}\mathcal{A}-\frac{\mathcal{A}}{3\times 4^{n-1}}$ pour tout $n>0$ et donc $A_n<\frac{4}{3}\mathcal{A}$ pour tout $n>0$. On a donc une contradiction.
Donc il n'est pas possible que $\mathcal{S}$ soit supérieur strictement à $\frac{4}{3}\mathcal{A}$.

5.b) Au vu de l'expression du terme général de la suite $(A_n)_{n>0}$, on a $\frac{4}{3}\mathcal{A}-A_n=\frac{\mathcal{A}}{3\times 4^{n-1}}$.
Ainsi, la suite des différences est divisée par 4 à chaque étape de la construction. Donc, d'après l'axiome d'Archimède, cette quantité peut être rendue aussi petite que l'on veut, notamment que $\frac{4}{3}\mathcal{A}-\mathcal{S}$ supposée strictement positive dans cette question.
Donc, à partir d'un certain rang, on a $\frac{4}{3}\mathcal{A}-A_n<\frac{4}{3}\mathcal{A}-\mathcal{S}$ et donc $A_n>\mathcal{S}$.
Mais tous les triangles construits le sont à l'intérieur du segment de parabole, et donc, par construction, $A_n\leqslant\mathcal{S}$. On a donc une contradiction.
Donc il n'est pas non plus possible que $\mathcal{S}$ soit strictement inférieur à $\frac{4}{3}\mathcal{A}$.

5.c) Seul le dernier cas est possible, donc

$$\mathcal{S}=\frac{4}{3}\mathcal{A}.$$

À l'aide de la formule montrée précédemment, on a $\mathcal{A}=\frac{1}{2}|b-a|\frac{(a-b)^2}{8p}$ et donc

$$\mathcal{S}=\frac{|b-a|^3}{12p}.$$

Remarque. Ce qui fait l'originalité de la preuve d'Archimède pour des contemporains, c'est cette dernière démarche par l'absurde pour éviter d'effectuer la somme d'une infinité d'éléments.
Cet axiome d'Archimède a quelque chose de plus intuitif que le postulat qu'avait proposé Antiphon [3], par exemple, et il préfigure déjà la notion formalisée, au XIX^{e} siècle seulement, de limite.

□

3. Antiphon travaillait sur l'aire et le périmètre du cercle et supposait que le cercle était un polygone à une infinité de côtés. Autrement dit, il passait à la limite, sans justifier puisqu'il posait cela en postulat. Par ailleurs, ce postulat avait le défaut d'être très spécifique, contrairement à la méthode d'Archimède, qui lui a permis de calculer bien d'autre résultats, notamment le volume exact de la boule.