Une introduction aux fractales

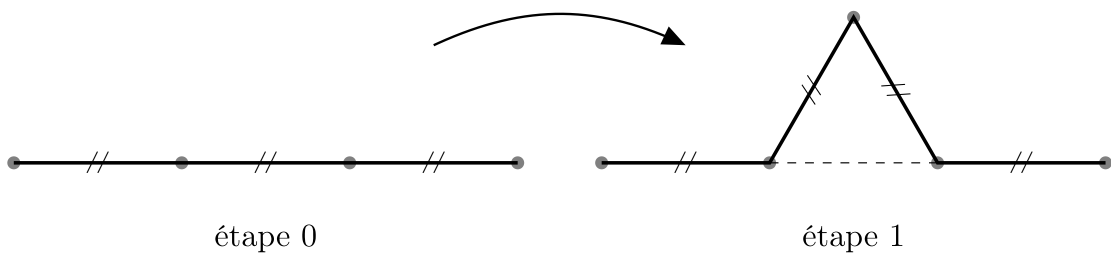
M. Gentes

Niveau : Première et anticipation de la Terminale S
Difficulté : Moyenne
Durée : 1h30
Rubrique(s) : Suites, Géométrie

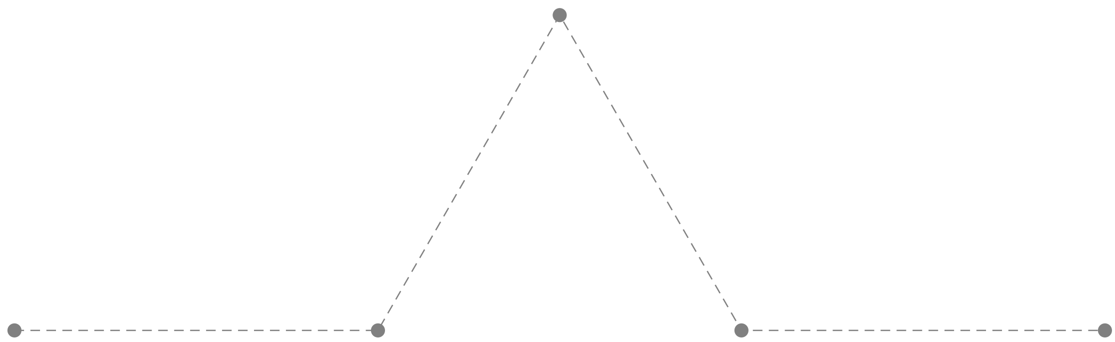
Exercice 1 (Le flocon de Koch).

1) Procédé itératif de construction.

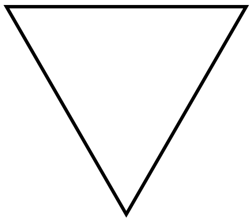
a) Décrire précisément la transformation suivante :



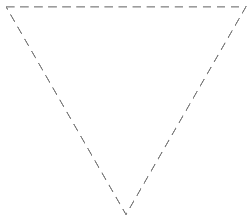
b) On applique cette transformation à tout segment obtenu à l'étape 1. Dessiner le résultat obtenu à l'étape 2.



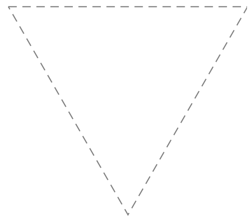
c) On applique maintenant cette transformation aux trois côtés d'un triangle équilatéral, dont les côtés sont de longueur 1. On note F_n la figure obtenue après avoir appliqué n fois cette transformation à tous les segments. Esquisser F_1 et F_2.



F_0



F_1



F_2

On appelle *flocon de Koch* la figure obtenue après une infinité d'étapes.

2) Nombre de côtés de F_n.

On note c_n le nombre de côtés de la figure F_n.

a) Que valent c_0, c_1, c_2 ?

b) Quelle relation y a-t-il entre c_{n+1} et c_n ?

c) En déduire la nature de la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ et une expression de c_n en fonction de n.

3) Calcul du périmètre de F_n.

Les côtés de la figure F_n ont même longueur. On note ℓ_n cette longueur et p_n le périmètre de F_n.

a) Montrer que $(\ell_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire une expression de ℓ_n en fonction de n.

c) Exprimer p_n à l'aide de c_n et ℓ_n. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

4) Calcul de l'aire de F_n.

On note a_n l'aire de la figure F_n.

a) Donner l'aire d'un triangle équilatéral dont les côtés sont de longueur ℓ. Calculer a_0.

b) Que représente l'aire $a_1 - a_0$? En déduire la valeur de a_1.

c) Exprimer $a_{n+1} - a_n$ en fonction de n. Que dire de la suite $(a_{n+1} - a_n)_{n\geqslant 0}$?

d) Calculer $(a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_1 - a_0)$ de deux manières différentes.

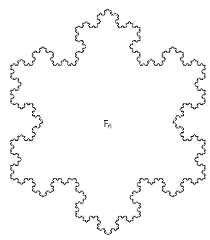
e) En déduire une expression de a_n en fonction de n.

5) Et quand n tend vers l'infini ?

a) Que dire du périmètre du flocon de Koch ?

b) Calculer l'aire du flocon de Koch.

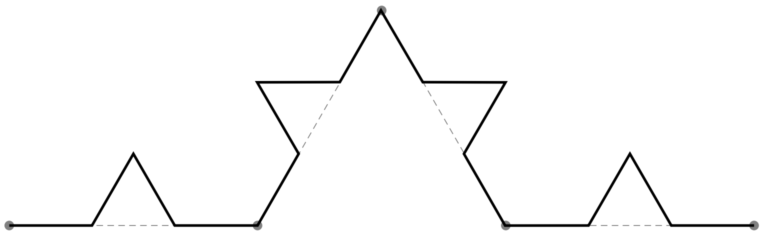
c) Conclure.



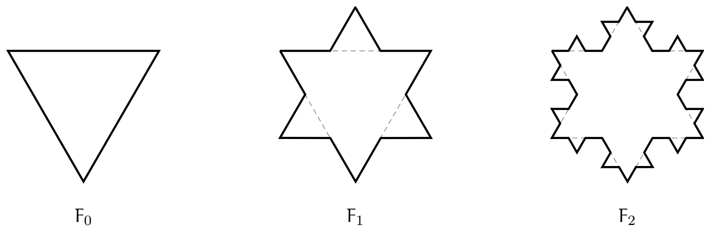
Corrections.

1.a) Le segment initial est décomposé en trois parties de longueurs égales. La transformation remplace le segment central par les deux autres côtés du triangle équilatéral qui s'appuie sur ce segment.

1.b)



1.c)



2.a) On compte $c_0 = 3$, $c_1 = 12$, $c_2 = 48$.
2.b) On remarque qu'à partir de chaque segment, la transformation en génère quatre.
Si à l'étape n on a c_n côtés, à l'étape $n+1$ on en aura $4c_n$, d'où $c_{n+1} = 4c_n$.
2.c) Il s'agit d'une suite géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme $c_0 = 3$.
L'expression de c_n en fonction de n est donc $c_n = c_0 \times q^n = 3 \times 4^n$.

3.a) Par hypothèse, ℓ_0 est le côté du triangle initial, soit $\ell_0 = 1$.
Par construction, tout segment obtenu à l'étape $n+1$ a pour longueur le tiers de la longueur d'un segment à l'étape n, c'est-à-dire $\ell_{n+1} = \frac{1}{3}\ell_n$.
Ainsi, $(\ell_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $r = \frac{1}{3}$ et de premier terme $\ell_0 = 1$.
3.b) On en déduit que pour tout entier positif n, $\ell_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$.
3.c) Les c_n côtés de la figure F_n ayant même longueur ℓ_n, le périmètre p_n vaut $p_n = c_n \times \ell_n$.
En substituant c_n et ℓ_n par les expressions obtenues en **2.c)** et **3.b)**, on trouve

$$p_n = (3 \times 4^n) \times \frac{1}{3^n} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

4.a) La hauteur d'un triangle équilatéral dont les côtés sont de longeur ℓ étant $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$, l'aire $\mathcal{A}$ du triangle équilatéral est donc

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell \times \frac{\ell}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\ell^2.$$

Pour $\ell = \ell_0 = 1$, on en déduit $a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
4.b) a_1 étant l'aire de la figure F_1, $a_1 - a_0$ représente l'aire des triangles équilatéraux ajoutés à la figure F_0 pour obtenir F_1. On en compte 3 dont les côtés sont de longueur $\frac{1}{3}$.
L'aire de chacun étant $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$, on a

$$a_1 - a_0 = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Finalement, a_1 vaut

$$a_1 = a_0 + (a_1 - a_0) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4.c) $a_{n+1} - a_n$ représente l'aire des c_n triangles équilatéraux de côtés de longueur ℓ_{n+1} qu'il faut ajouter à F_n pour obtenir la figure F_{n+1}. Ainsi,

$$a_{n+1} - a_n = c_n \times \frac{\sqrt{3}}{4}(\ell_{n+1})^2 = (3 \times 4^n) \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{4^n}{3^{2n+2}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{4^n}{9 \times 9^n} = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

La suite $(a_{n+1}-a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$ et de premier terme $\frac{\sqrt{3}}{12}$.
4.d) Calculons cette expression de deux manières différentes :
• C'est la somme des n premiers termes de la suite géométrique $(a_{n+1}-a_n)_{n\geqslant 0}$ de raison $s=\frac{4}{9}$ (différente de 1) et de premier terme $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, d'où :

$$(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_1-a_0)=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(1+s+s^2+\cdots+s^{n-1}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{1-s^n}{1-s}.$$

En remplaçant, il vient :

$$(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_1-a_0)=\frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{5}{9}}=\frac{3\sqrt{3}}{20}\times\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right].$$

• En déplaçant les parenthèses, on remarque que des simplifications s'opèrent :

$$\begin{aligned}(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_1-a_0)&=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+(a_1-a_0)\\&=a_n\underbrace{-a_{n-1}+a_{n-1}}_{=0}+\cdots+\underbrace{-a_1+a_1}_{=0}-a_0\\&=a_n-a_0.\end{aligned}$$

On parle de *somme télescopique.*
4.e) En égalisant les deux expressions trouvées à la question précédente, on trouve

$$a_n-a_0=\frac{3\sqrt{3}}{20}\times\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right].$$

Finalement, en utilisant la valeur de a_0 calculée à la question **4.a)**, on a pour tout entier positif n,

$$a_n=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}\times\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right].$$

5.a) On a $\frac{4}{3}>1$, d'où

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}3\times\left(\frac{4}{3}\right)^n=+\infty.$$

Le flocon de Koch a un périmètre infini !
5.b) On a $\frac{4}{9}<1$, d'où

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}\times\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{3}{5}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{8}{5}=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

L'aire du flocon de Koch est de $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (soit $\frac{8}{5}$ de l'aire du triangle initial).
5.c) Le flocon de Koch est d'aire finie mais de périmètre infini !
Cette propriété est caractéristique d'une famille d'objets mathématiques appelés *fractales.*

□