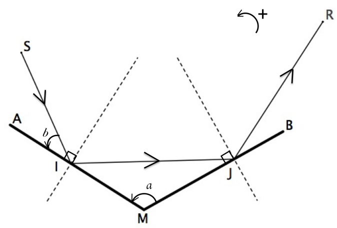
Réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir à deux faces

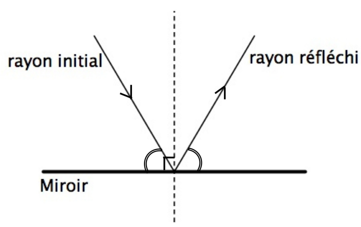
Niveau : Première et anticipation de la Terminale S
Difficulté : Moyenne
Durée : 30 min
Rubrique(s) : Géométrie (Géométrie plane)

La petite histoire... Le but de ce problème est d'étudier la direction d'un rayon lumineux qui se réfléchit sur un miroir à deux faces.

Exercice 1. La figure ci-dessous décrit la situation : les deux faces du miroir correspondent aux segments $[AM]$ et $[MB]$. Le trajet du rayon lumineux est fléché : partant de S, le rayon initial (appelé aussi rayon incident) est d'abord réfléchi sur la première face au niveau du point I, puis sur la deuxième face au niveau du point J.
On note $a = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \in]0; \pi[$ la mesure principale de l'angle orienté entre les deux faces du miroir. On note $b = (\overrightarrow{IS}, \overrightarrow{IA}) \in [0; \frac{\pi}{2}]$ la mesure principale de l'angle orienté entre le rayon initial et la première face du miroir.



On va utiliser la loi d'optique suivante : Lorsqu'un rayon lumineux se réfléchit sur un miroir, l'angle (géométrique) que fait le rayon réfléchi avec le miroir est égal à l'angle (géométrique) que fait le rayon initial avec le miroir (voir schéma ci-dessous).



1) Exprimer $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IJ})$ puis $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IS})$ en fonction de b.

2) Quel est le lien entre $(\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{IJ})$ et $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IS})$?

3) Montrer que $\pi - a - b$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JM})$.

4) En déduire une mesure de $(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JR})$ puis de $(\overrightarrow{JR}, \overrightarrow{JI})$.

5) En déduire que $-2a$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{JR})$ (c'est l'angle entre le rayon initial et le rayon réfléchi).

6) Pour quelle(s) valeur(s) de a le rayon initial et le rayon réfléchi sont-ils parallèles ?

7) Pour quelle(s) valeur(s) de a le rayon initial et le rayon réfléchi sont-ils perpendiculaires ?

Indications et Commentaires : **1)** Utiliser la loi d'optique et la relation de Chasles.
2) C'est du cours !
3) Considérer le triangle IJM.
4) S'inspirer de la question **1)**.
5) Utiliser les résultats des questions précédentes.
6) Que doit valoir $(\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{JR})$? Que peut-on dire de deux mesures d'un même angle ?
7) Deux cas sont possibles.

Corrections.

1) On applique la loi d'optique au miroir de face $[AM]$: $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IJ}) = (\overrightarrow{IS}, \overrightarrow{IA}) = b$.
D'après la relation de Charles,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IA}) &= (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IJ}) + (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IS}) + (\overrightarrow{IS}, \overrightarrow{IA}) \\ \pi &= b + (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IS}) + b\end{aligned}$$

D'où $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IS}) = \pi - 2b$.

2) $(\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{IJ}) = (\overrightarrow{IS}, \overrightarrow{IJ}) + \pi = -(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IS}) + \pi$.

3) Dans un triangle, la somme des mesures principales des angles internes est égale à π. Par conséquent, $(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MI}) + (\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JM}) + (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IJ}) = \pi$.
D'après l'énoncé, $(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MI}) = a$ et d'après la première question, $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IJ}) = b$.
On en déduit $(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JM}) = \pi - a - b$.

4) On applique maintenant la loi d'optique au miroir de face $[MB]$: $(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JR}) = (\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JM})$.
En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient $(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JR}) = \pi - a - b$.
Pour calculer une mesure de $(\overrightarrow{JR}, \overrightarrow{JI})$, on utilise la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JM}) &= (\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JR}) + (\overrightarrow{JR}, \overrightarrow{JI}) + (\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JM}) \\ \pi &= \pi - a - b + (\overrightarrow{JR}, \overrightarrow{JI}) + \pi - a - b\end{aligned}$$

D'où $(\overrightarrow{JR}, \overrightarrow{JI}) = 2a + 2b - \pi$.

5) Par la relation de Chasles, $(\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{JR}) = (\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{IJ}) + (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{JR})$.
D'après les deux premières questions,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{IJ}) &= -(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IS}) + \pi \\ &= -(\pi - 2b) + \pi \\ &= 2b.\end{aligned}$$

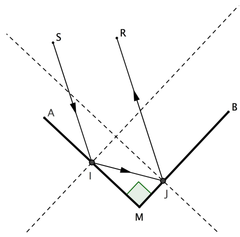
D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{JR}) &= -(\overrightarrow{JR}, \overrightarrow{IJ}) \\ &= -(\overrightarrow{JR}, \overrightarrow{JI}) - \pi \\ &= -(2a + 2b - \pi) - \pi \\ &= -2a - 2b\end{aligned}$$

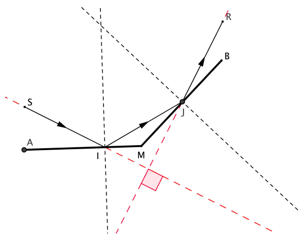
Finalement, $(\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{JR}) = 2b + (-2a - 2b) = -2a$.

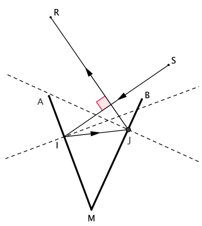
6) Le rayon initial et le rayon réfléchi sont parallèles lorsque $(\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{JR}) = \pi$. D'après la question précédente, $-2a$ est aussi une mesure de $(\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{JR})$.
On doit donc avoir $\pi = -2a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Attention ! Ne pas oublier le "$2k\pi$" ! ! Rappelez-vous, un angle orienté a plusieurs mesures. Deux réels x et y sont des mesures d'un même angle orienté si et seulement si la différence $x - y$ est un multiple de 2π.

$a = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Comme l'énoncé précise que $a \in]0, \pi[$, on choisit $k = 1$ et on obtient $a = \dfrac{\pi}{2}$.
Finalement, le rayon initial et le rayon réfléchi sont parallèles si et seulement si $a = \dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire lorsque les deux faces du miroir sont perpendiculaires.



7) Le rayon initial et le rayon réfléchi sont perpendiculaires lorsque $(\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{JR}) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{-\pi}{2}$.
• Première possibilité : $\dfrac{\pi}{2} = -2a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
On obtient $a = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Pour avoir $a \in]0; \pi[$, il faut choisir $k = 1$ et on obtient $a = \dfrac{3\pi}{4}$.
• Seconde possibilité : $-\dfrac{\pi}{2} = -2a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
On obtient $a = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Pour avoir $a \in]0; \pi[$, il faut choisir $k = 0$ et on obtient $a = \dfrac{\pi}{4}$.
Finalement, le rayon initial et le rayon réfléchi sont perpendiculaires si et seulement si $a = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $\dfrac{\pi}{4}$.





$\square$