Différents points d'équilibre des triangles

A. Camanes

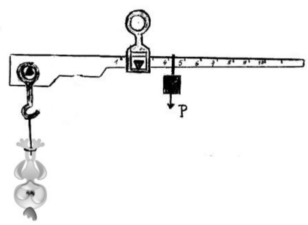
Niveau : Première et préparation de la Terminale S

Difficulté : Pas trop dur

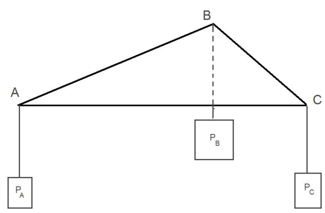
Durée : 1 h

Rubrique(s) : Géométrie (Barycentres - Triangles)

La petite histoire... Tout cet exercice est une histoire d'équilibre. Si vous prenez une barre de fer en position horizontale et que vous voulez la poser en équilibre sur votre doigt, vous savez qu'il faut que votre doigt se trouve au milieu de la barre. Si maintenant vous mettez un poulet à un bout et un poids en plomb à l'autre bout, vous vous retrouvez avec une balance romaine et la position du point d'équilibre vous donne le poids du poulet (connaissant le poids de la masse de plomb).



Supposons maintenant que vous ayez un triangle avec des poids à chacun des sommets. Nous allons voir dans cet exercice que, si les poids sont bien choisis, les points d'équilibre sont les points remarquables du triangle.



En accrochant les poids P_A, P_B et P_C respectivement aux sommets A, B et C, nous savons que le point d'équilibre est E donné par

$$P_A\overrightarrow{EA} + P_B\overrightarrow{EB} + P_C\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0}.$$

Dans tout cet exercice, il ne faut pas hésiter à dessiner des figures sur votre brouillon.

Exercice 1. On considère un triangle ABC non dégénéré (c'est-à-dire qu'il n'est pas plat et que les trois sommets ne sont pas confondus). On note a (resp. b, c) la longueur du côté $[BC]$ (resp. $[AC]$, $[AB]$). On appelle α (resp. β, γ) l'angle $\widehat{CAB}$ (resp. $\widehat{CBA}$, $\widehat{BCA}$). On suppose que les trois angles α, β, γ sont des angles aigus.

1) Dessinez ce triangle en faisant apparaître les grandeurs caractéristiques décrites ci-dessus.

2) En écrivant de trois manières différentes l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC, montrer la formule des sinus
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2\mathcal{A}}.$$

3) Soit G le point du plan qui satisfait
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

Montrer que G est le point d'intersection des médianes du triangle. Quels poids suffit-il de fixer en les sommets A, B, C pour que le triangle suspendu par le point G se trouve en équilibre ?

G est appelé l'isobarycentre (ou le centre de gravité) du triangle ABC.

4) On suppose que l'on suspend au sommet A un poids de masse a kilogrammes, au sommet B un poids de b kilogrammes et on sommet C un poids de c kilogrammes. On va montrer que le point I d'intersection des bissectrices du triangle satisfait la relation
$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}.$$

Pour cela, on note A_1 (resp. B_1, C_1) l'intersection de la bissectrice issue de A (resp. B, C) avec le côté $[BC]$ (resp. $[AC]$, $[AB]$).

a) Montrer, en utilisant la formule des sinus, que $c \times A_1C = b \times BA_1$. En déduire que A_1 est le barycentre des points pondérés $b\overrightarrow{A_1B} + c\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{0}$.

b) Soit M_1 le barycentre des points pondérés $((A, a), (B, b), (C, c))$. Montrer que M_1 est le point de concours des bissectrices et en déduire la relation annoncée.

I est également le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

5) On suppose que l'on suspend au sommet A un poids de masse $m_1 = a\cos\beta\cos\gamma$ kilogrammes, au sommet B un poids de masse $m_2 = b\cos\alpha\cos\gamma$ kilogrammes et au sommet C un poids de masse $m_3 = c\cos\alpha\cos\beta$ kilogrammes. On va montrer que le point H d'intersection des hauteurs du triangle satisfait la relation
$$m_1\overrightarrow{HA} + m_2\overrightarrow{HB} + m_3\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}.$$

On note A_2 le pied de la hauteur issue de A, B_2 le pied de la hauteur issue de B et C_2 le pied de la hauteur issue de C.

a) Montrer que
$$b\cos\alpha\cos\gamma\overrightarrow{A_2B} + c\cos\alpha\cos\beta\overrightarrow{A_2C} = \overrightarrow{0}.$$

b) Notons M_2 le barycentre des points pondérés $((A, m_1), (B, m_2), (C, m_3))$. Montrer que M_2 est le point de concours des hauteurs et en déduire la relation annoncée.

H est appelé l'orthocentre.

6) On suppose que l'on suspend au sommet A un poids de masse $M_1 = a\cos\alpha$ kilogrammes, au sommet B un poids de $M_2 = b\cos\beta$ kilogrammes et au sommet C un poids de $M_3 = c\cos\gamma$ kilogrammes. On va montrer que le point O d'intersection des médiatrices satisfait
$$M_1\overrightarrow{OA} + M_2\overrightarrow{OB} + M_3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}.$$

On appelle A_3 le milieu du segment $[BC]$, B_3 le milieu du segment $[AC]$ et C_3 le milieu du segment $[AB]$.

a) Montrer que le triangle $A_3B_3C_3$ est semblable au triangle ABC.

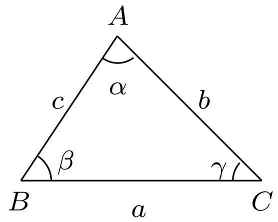
b) Notons O le point de concours des médiatrices. Montrer que O satisfait la relation souhaitée.

O est également le centre du cercle circonscrit au triangle.

Indications et Commentaires : 4.a) Utiliser plusieurs fois la formule des sinus de la question 2).
6.a) Pensez au théorème de Thalès.
6.b) Question difficile, utilisez la formule d'Al-Kashi.

Corrections.

1)



2) Dans le triangle ABC, la hauteur issue de A mesure $b\sin\gamma$, celle issue de B mesure $c\sin\alpha$ et celle issue de C mesure $a\sin\beta$. En rappelant que l'aire d'un triangle est égale au produit de la base par la hauteur divisé par deux, l'aire du triangle ABC vaut :

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta.$$

Ainsi, en notant $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2\mathcal{A}}.$$

3) Notons I (resp. J, K) le milieu du segment $[BC]$ (resp. $[AC]$, $[AB]$). On rappelle que

$$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$$

Ainsi, comme

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0},$$
$$2\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

Ainsi, G appartient à la droite (KC) qui est la médiane du triangle ABC issue de C.
On montre de manière analogue que G appartient à chacune des médiatrices du triangle ABC et appartient donc à leur intersection.
En suspendant des masses égales en chacun des sommets du triangle, on peut le poser en équilibre sur le point G. Faites l'expérience en posant en équilibre un triangle de papier sur votre compas !

4.a) En appliquant la formule des sinus de la question précédente au triangle AA_1C,

$$\frac{A_1C}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{AA_1}{\sin\gamma}.$$

En appliquant la formule des sinus au triangle AA_1B,

$$\frac{BA_1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{AA_1}{\sin\beta}.$$

Ainsi, en utilisant également la question **2)**, on obtient

$$\frac{A_1C}{BA_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BA_1}$ et $\overrightarrow{A_1C}$ étant colinéaires et de même sens,

$$\begin{aligned} b\overrightarrow{BA_1} &= c\overrightarrow{A_1C} \\ b\overrightarrow{A_1B} + c\overrightarrow{A_1C} &= \overrightarrow{0}, \end{aligned}$$

et $A_1 = \mathcal{B}((B;b)(C;c))$.

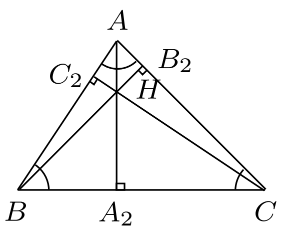
b) On montre de manière analogue que

$$a\overrightarrow{B_1A} + c\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{0},$$
$$a\overrightarrow{C_1A} + b\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{0}.$$

Notons $M_1 = \mathcal{B}((A;a)(B;b)(C;c))$. En utilisant la propriété d'associativité des barycentres, on a $M_1 = \mathcal{B}((C_1;a+c)(C;c))$ et M_1 appartient à la bissectrice issue de C. On montre de même que M_1 appartient aux bissectrices de A et B. Ainsi, M_1 est le point de concours des bissectrices et $M_1 = I$.
Finalement, comme $I = \mathcal{B}((A;a)(B;b)(C;c))$, on obtient bien

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}.$$

5.a)



Dans le triangle ABA_2 rectangle en A_2,

$$\cos\beta = \frac{A_2B}{c}.$$

Dans le triangle ACA_2 rectangle en A_2,

$$\cos\gamma = \frac{A_2C}{b}.$$

Ainsi, $b\cos\gamma A_2B = c\cos\beta A_2C$. De plus, les points B, A_2 et C sont alignés dans cet ordre puisque les angles du triangle ABC sont aigus,

$$b\cos\gamma\overrightarrow{A_2B} + c\cos\beta\overrightarrow{A_2C} = \overrightarrow{0}$$
$$b\cos\alpha\cos\gamma\overrightarrow{A_2B} + c\cos\alpha\cos\beta\overrightarrow{A_2C} = \overrightarrow{0}.$$

b) On montre de manière analogue que

$$a\cos\beta\cos\gamma\overrightarrow{B_2A} + c\cos\alpha\cos\beta\overrightarrow{B_2C} = \overrightarrow{0}$$
$$a\cos\beta\cos\gamma\overrightarrow{C_2A} + b\cos\alpha\cos\gamma\overrightarrow{C_2B} = \overrightarrow{0}.$$

Notons

$$M_2 = \mathcal{B}((A;a\cos\beta\cos\gamma)(B;b\cos\alpha\cos\gamma)(C;c\cos\alpha\cos\beta)).$$

En utilisant l'associativité des barycentres, on montre que $M_2 \in (A_2A)\cap(B_2B)\cap(C_2C)$. Prouvons le directement pour la première droite, c'est à dire montrons que $M_2 \in (A_2A)$, en redémontrant dans ce cas particulier l'associativité du barycentre.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= a\cos\beta\cos\gamma\overrightarrow{M_2A} + b\cos\alpha\cos\gamma\overrightarrow{M_2B} + c\cos\alpha\cos\beta\overrightarrow{M_2C} \\ \overrightarrow{0} &= a\cos\beta\cos\gamma\overrightarrow{M_2A} + b\cos\alpha\cos\gamma(\overrightarrow{M_2A_2} + \overrightarrow{A_2B}) + c\cos\alpha\cos\beta(\overrightarrow{M_2A_2} + \overrightarrow{A_2C}) \\ \overrightarrow{0} &= a\cos\beta\cos\gamma\overrightarrow{M_2A} + (b\cos\alpha\cos\gamma + c\cos\alpha\cos\beta)\overrightarrow{M_2A_2}. \end{aligned}$$

Ainsi, M_2 est le point de concours des hauteurs du triangle ABC et $M_2 = H$. Donc, $H = \mathcal{B}((A; a\cos\beta\cos\gamma)(B; b\cos\alpha\cos\gamma)(C; c\cos\alpha\cos\beta))$ et on a bien

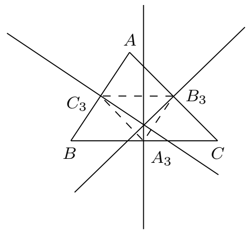
$$a\cos\beta\cos\gamma\overrightarrow{HA} + b\cos\alpha\cos\gamma\overrightarrow{HB} + c\cos\alpha\cos\beta\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}.$$

6.a) En utilisant le théorème de Thalès, on a

$$\overrightarrow{A_3B_3} = -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A_3C_3} = -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{B_3C_3} = -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Ainsi, le triangle $A_3B_3C_3$ est semblable au triangle ABC.

b) Commençons par faire un dessin



Comme les médiatrices du triangle ABC sont les hauteurs du triangle $A_3B_3C_3$, ces droites sont concourantes en un point O et, en utilisant la question précédente,

$$\tfrac{a}{2}\cos\beta\cos\gamma\overrightarrow{OA_3} + \tfrac{b}{2}\cos\alpha\cos\gamma\overrightarrow{OB_3} + \tfrac{c}{2}\cos\alpha\cos\beta\overrightarrow{OC_3} = \overrightarrow{0}.$$

Comme A_3 est le milieu de $[BC]$, on a également en utilisant deux fois la relation de Chasles puis en additionnant les résultats obtenus,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA_3} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA_3}\\
&= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CA_3},\\
\overrightarrow{OA_3} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA_3}\\
\overrightarrow{OA_3} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).
\end{aligned}$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OB_3} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}).\\
\overrightarrow{OC_3} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).
\end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant dans la relation initiale, on obtient

$$\cos\alpha(b\cos\gamma + c\cos\beta)\overrightarrow{OA} + \cos\beta(a\cos\gamma + c\cos\alpha)\overrightarrow{OB} + \cos\gamma(a\cos\beta + b\cos\alpha)\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O}$$

Enfin, en utilisant la formule d'Al-Kashi, on a

$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\\
b\cos\gamma + c\cos\beta &= a.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient comme suggéré par l'énoncé

$$a\cos\alpha\overrightarrow{OA} + b\cos\beta\overrightarrow{OB} + c\cos\gamma\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O}$$

□