Suite récurrente définie par une fonction

Rédigé par un enseignant et un élève de
l'Ecole Polytechnique (Vincent Langlet).

Niveau : Approfondir la Terminale S ou Première Année post bac

Difficulté : Exercice classique, simple au début si le cours est su
Durée : 1 heure, un peu plus en soignant la rédaction

Rubrique(s) :
Analyse(Suites récurrentes, fonctions)

Exercice 1 :
1) Soit $A \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + A$.
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par

$$u_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Donner le tableau de variation de f.
b) Donner le tableau de signe de $x \mapsto f(x) - x$ selon la valeur de A par rapport à $1/4$.
c) On dit que l'intervalle I est stable par f si et seulement si $f(I) \subset I$.
Montrer que si I est stable par f et $u_0 \in I$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

2) Dans cette question, on suppose $A \geq 0$.
a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
b) Montrer que si $A > 1/4$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
c) Montrer que si $A \in [0, 1/4[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente et donner sa limite.

3) On suppose dans cette question que $A \in]-1, 0[$.
a) Montrer que $[A, 0]$ est stable par f.
b) Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers a tel que $f \circ f(a) = a$.
Montrer que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers b tel que $f \circ f(b) = b$.
c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) - x = (x^2 - x + A)(x^2 + x + A + 1)$.
d) Montrer que si $A \in]-3/4, 0[$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
e) Montrer que si $A \in]-1, -3/4[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Indications et Commentaires : 2.c) On utilisera un intervalle stable par f.
3.e) On montrera que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers la même limite que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Corrections.
1.a) Pour tout x réel, nous définissons $f(x) = x^2 + A$ avec A réel. La dérivée de la fonction f vaut, pour tout x réel, $f'(x) = 2x$. Le tableau de variation de la fonction f est donc,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	A	$\nearrow$	$+\infty$

1.b) Définissons pour tout réel x, la fonction g, $g(x) = f(x) - x$. Sa dérivée vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x) - 1 = 2x - 1.$$

Le tableau de variations de g est donc le suivant :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$A - 1/4$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $A > 1/4$, d'après le tableau de variations ci-dessus, pour tout x réel, $f(x) - x > 0$.
Si $A = 1/4$, alors pour tout x réel, $f(x) - x \geq 0$.
Si $A < 1/4$, alors le tableau de variations de g est de la forme,

x	$-\infty$		α		$1/2$		β		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		0		$+$		
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$A - 1/4 < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Déterminons α et β, puisque ces deux valeurs joueront un rôle important par la suite. Ce sont les racines du polynôme $P = X^2 - X + A$, si $A < 1/4$. On obtient donc :

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - 4A}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4A}}{2}.$$

1.c) On démontre ceci, par récurrence. Pour tout entier naturel n, posons $\mathcal{P}_n$: "$u_n \in I$".
Initialisation : $u_0 \in I$, par hypothèse. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel $n \geq 0$, montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
Par hypothèse de récurrence, nous avons $u_n \in I$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et I est stable par f, alors $u_{n+1} \in I$. Nous en déduisons que $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie. On conclut par récurrence.

2.a) Si $A > 1/4$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car, d'après le tableau de signe de la question 1.b),

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0.$$

Si $A \in [0, 1/4[$, $I = [0, \alpha]$ est un intervalle stable par f car f est croissante sur I donc

$$f(I) = [f(0), f(\alpha)] = [0, \alpha] = I \text{ et en particulier } f(I) \subset I.$$

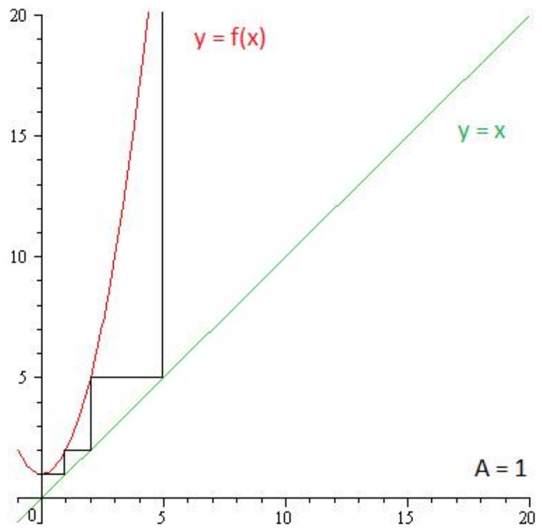
Comme $A \leq \alpha$, par la question 1.c), on a donc pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \alpha$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également croissante car, d'après le tableau de signe de la question 1.b),

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0.$$

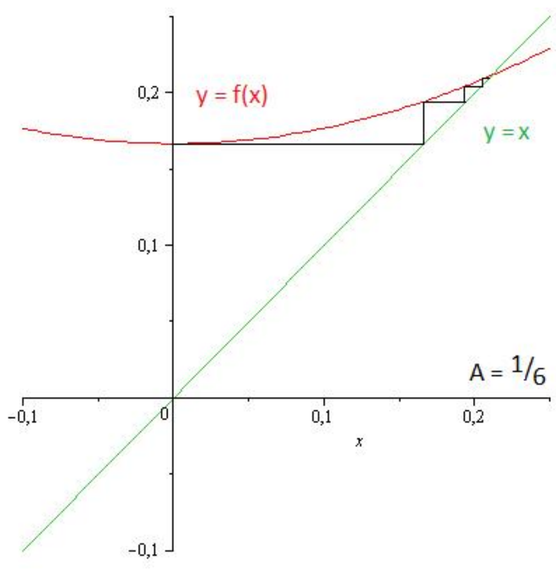
2.b) Supposons que u_n tende vers une limite l. Alors $f(l) = l$ puisque f continue. Détaillons le cette fois ci : $u_{n+1} = f(u_n) \to l$ par continuité de f en l.Pr $u_{n+1} \to l$ et par unicité de la limite :

$$f(l) = l, \quad \text{c'est à dire} \quad l = l^2 + A.$$

Or le polynôme $P = X^2 - X - A$ n'a pas de racine, puisque son discriminant, si $A > 1/4$, est $\Delta = 1 - 4A < 0$. Absurde et la suite ne converge pas. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et elle ne ne converge pas, donc elle tend vers l'infini.
Nous pouvons tracer la suite dans le cas $A = 1$ par exemple. Nous rappelons que le tracé d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ se fait en tracant f et la première bissetrice $y = x$. Comme ca on part de u_0 en abscisse et on obtient u_1 en prenant l'image par f. On reporte alors u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la première bissectice et on recommence ... On obtient cet escalier dont les abscisses successives des points de contact avec $y = f(x)$ sont les valeurs u_0, u_1, u_2....



2.c) Si $A \in [0, 1/4[$, le polynôme $P = X^2 - X - A$ a deux racines α et β. Remarquons que $A \leq \alpha$. Considérons l'intervalle $I = [0, \alpha]$. I est un intervalle stable par f , donc par la 1.c), pour tout entier naturel n, $u_n \in I$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée, donc converge vers une limite l, vérifiant $l = f(l)$. Dans l'intervalle I, il existe une unique solution vérifiant $l = f(l)$, donc $l = \alpha$.



3.a) f est décroissante sur $[A,0]$, d'où $f([A,0]) \subset [f(0), f(A)] \subset [A, A^2+A]$. Or sur $]-1,0[$, considérons la fonction $h : x \longmapsto x^2+x$, alors $h'(x) = 2x+1$. Le tableau de variation de h est :

x	-1		$-1/2$		0
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	0

Nous en déduisons que $\forall A \in]-1,0[,\ -1/4 \leq A^2+A \leq 0$. d'où $f([A,0]) \subset [A,0]$.

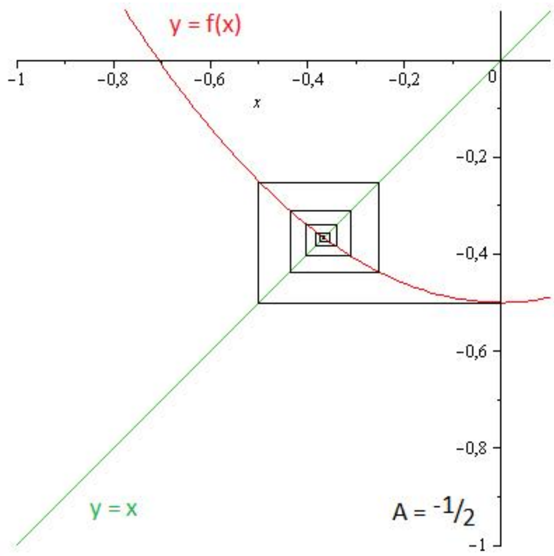
3.b) Comme $f \circ f$ est la composée de deux fonctions décroissantes, elle est croissante. La suite récurrente $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc monotone. C'est une récurrence qui repose sur le fait que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_{2n+2} - u_{2n} = f \circ f(u_{2n}) - f \circ f(u_{2n-2})$ est de même signe que $u_{2n} - u_{2n-2}$ puisque $f \circ f$ est croissante. Puis, on démontre par récurrence que $u_{2n+2} - u_{2n}$ a le même signe que $u_2 - u_0 = f(A) - 0 \leq 0$. Donc, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée, elle converge vers a. $f \circ f$ étant continue, sa limite vérifie $f \circ f(a) = a$. De même, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b tel que $f \circ f(b) = b$.

3.c) Comme $(x^2 - x + A)(x^2 + x + A + 1) = x^4 + 2Ax^2 + A^2 - x + A$, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) - x &= (x^2+A)^2 - x + A \\ &= x^4 + 2Ax^2 + A^2 - x + A \\ &= (x^2 - x + A)(x^2 + x + A + 1). \end{aligned}$$

3.d) Si $A \in]-3/4, 0[$, il n'y a qu'une seule racine β sur $[A,0]$ car :
$P = X^2 - X + A$ a deux racines $\alpha = \frac{1+\sqrt{1-4A}}{2} > 0$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{1-4A}}{2} < 0$.
$Q = X^2 + X + A + 1$, de discriminant $\Delta = -3 - 4A$ négatif, est de signe constant positif.

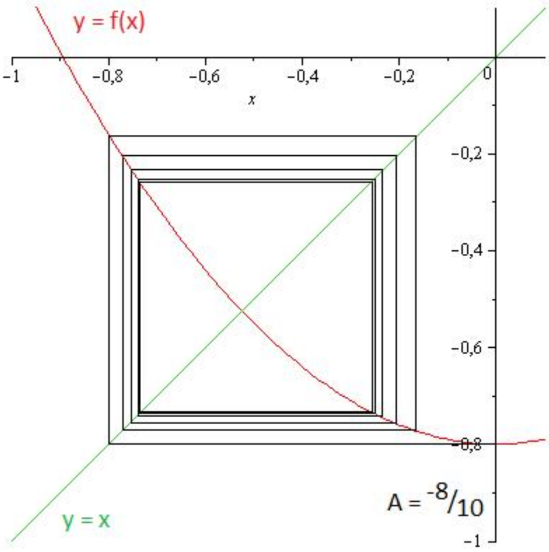
Comme $u_0 = 0$ et $[\beta, 0]$ est un intervalle stable par $f \circ f$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, minorée, converge vers β. Comme $u_1 = A < \beta$, et $[A, \beta]$ est un intervalle stable par $f \circ f$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, majorée, converge vers β. Les suites extraites, paire et impaire, convergent vers la même limite, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.



3.e) Si $A \in]-1, -3/4[$, il y a trois racines possibles de $f \circ f(x) - x$ sur $[A,0]$ car :
$P = X^2 - X + A$ a deux racines $\alpha = \frac{1+\sqrt{1-4A}}{2} > 0$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{1-4A}}{2} < 0$.

$Q = X^2 + X + A + 1$ a deux racines $\beta < x_1 = \frac{-1+\sqrt{-3-4A}}{2} \leq 0$ et $A \leq x_2 = \frac{-1-\sqrt{-3-4A}}{2} < \beta$.

Comme $u_0 = 0$ et $[x_1, 0]$ est un intervalle stable par $f \circ f$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, minorée, converge vers x_1. Comme $u_1 = A < x_2$ et $[A, x_2]$ est un intervalle stable par $f \circ f$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, majorée, converge vers x_2. Les deux suites extraites, d'indices pair et impair, ne convergent pas vers la même limite, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.



FIN