

Utilisation de fonctions.

Rédigé par Sophie Dede (professeur en MPSI)
et Vincent Langlet (élève de l'École Polytechnique)

Niveau : AIDE ET APPROFONDISSEMENT EN PREMIÈRE ANNÉE APRÈS LE BAC

Difficulté : Classique pour les deux premiers, pour aller un peu plus loin pour le dernier

Durée : un peu plus d'une heure si le cours est su

Rubrique(s) :

Analyse(Étude de fonction)

La petite histoire... Cette fiche propose des problèmes classiques liés aux fonctions. Vous pouvez directement commencer à chercher les questions, ou bien vous laisser guider par les exercices.

- Dans l'exercice 1, on cherche à savoir si on peut prolonger en 0 de manière continue puis de manière dérivable la fonction f vérifiant pour tout x réel

$$f(x) = \frac{1}{x}(\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}).$$

- Dans l'exercice 2, on cherche à étudier la suite récurrente définie par

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n^3 + a}{3u_n^2 + 1}, \text{ avec } a > 0.$$

- Dans le dernier exercice, on cherche à montrer que

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = l \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

Commencer par considérer des fonctions qui vérifient clairement l'hypothèse, par exemple $f'(x) = l$ pour tout $x \geq 0$, pour lesquelles le résultat paraît plus simple. Ça marche ? Inspirez vous en pour la preuve, en essayant de vous "ramener" à cette situation particulièrement facile lorsque x tend vers l'infini...

Exercice 1 :

1) Soit f la fonction de $] -\pi/2, \pi/2[$ dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x}(\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}).$$

a) Montrer que l'on a l'égalité :

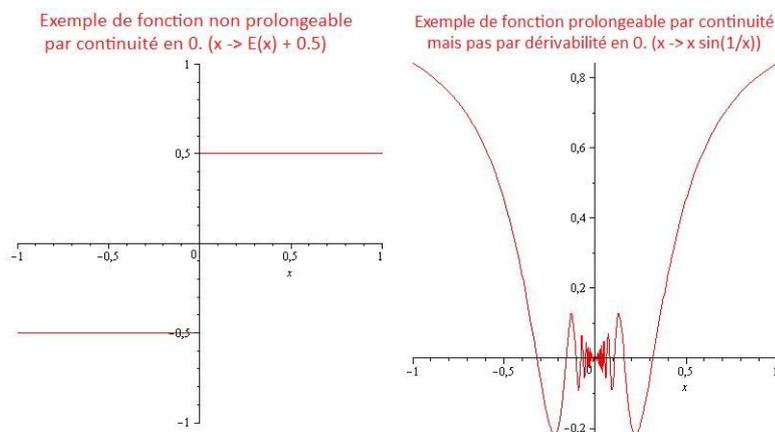
$$f(x) = -\tan(x) \times \frac{\sin(x)}{x}$$

b) En déduire la limite de f en 0.

2.a) Montrer que f admet un prolongement par continuité g en 0 et déterminer le.

2.b) Le prolongement par continuité de f est-il dérivable en 0 ?

Indications et Commentaires : Pour la 1.b), on utilisera le fait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
On ne peut pas toujours prolonger par continuité ou dérivabilité :



Corrections.

1.a) En utilisant le fait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on a :

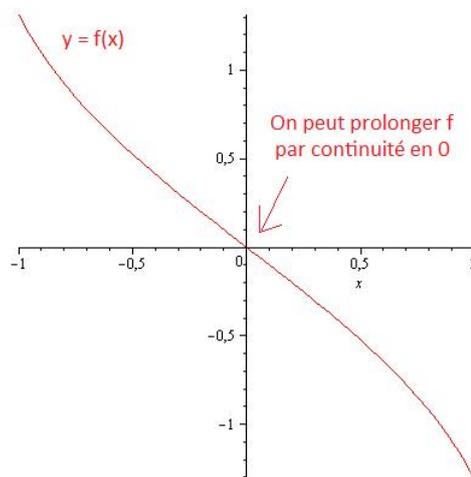
$$f(x) = \frac{1}{x} \left(\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)} \right) = \frac{1}{x} \times \frac{(\cos^2(x) - 1)}{\cos(x)} = -\frac{1}{x} \times \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) \times \frac{\sin(x)}{x}.$$

1.b) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -\tan(x) \times \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\tan(x) = 0.$$

2.a) f est continue sur $] -\pi/2, \pi/2[-\{0\}$ et admet une limite finie en 0, car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. On peut donc définir un prolongement par continuité de f en 0 vérifiant :

$$g(0) = 0 \text{ et } \forall x \in] -\pi/2, \pi/2[-\{0\}, g(x) = f(x).$$



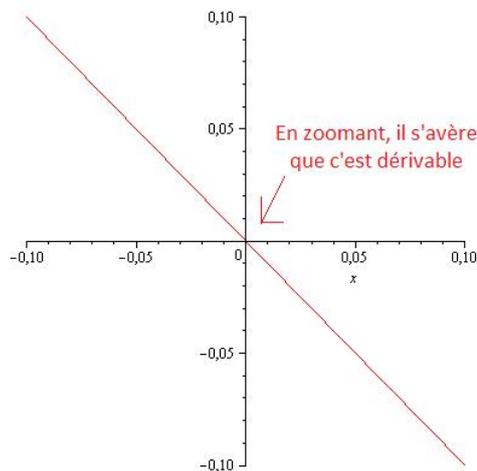
2.b) Montrons d'abord que g est dérivable en 0 en vérifiant que son taux d'accroissement admet une limite en 0.

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{x^2} \left(\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)} \right) = -\frac{\sin^2(x)}{x^2} \times \frac{1}{\cos(x)}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{\cos(x)} = -1.$$

Comme g est dérivable sur $] -\pi/2, \pi/2[-\{0\}$, car f l'est, g est dérivable sur $] -\pi/2, \pi/2[$.



Exercice 2 :

1) Étudier la fonction $f : x \mapsto x + x^3$ et montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

2.a) Étudier l'application φ définie sur \mathbb{R} par : $\varphi(t) = \frac{2t^3 + a}{3t^2 + 1}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

2.b) Rechercher ses points fixes, c'est à dire trouver les points t tels que $\varphi(t) = t$.

3) Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

Est-elle bornée ? Est-elle monotone ? Est-elle convergente ?

Indications et Commentaires : Pour la 1), on rappelle qu'une bijection f de A dans B est une application telle que pour tout $y \in B$, l'équation

$$y = f(x) \quad \text{avec } x \in A$$

a une et une seule solution. Le théorème de la bijection assure que si f est strictement monotone et continue sur A , alors f assure une bijection de A dans $f(A)$.

Pour 2.a), remarquer que $\varphi'(t) = 6tf(t)/(3t^2 + 1)^2$.

Pour la 3), on montrera d'abord par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq f^{-1}(a).$$

Corrections.

1) f est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée vérifie $f'(x) = 1 + 3x^2 > 0$, donc f est strictement croissante. Ainsi f réalise une bijection de \mathbb{R} dans $f(\mathbb{R})$. Comme f est continue et croissante, $f(\mathbb{R}) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=] -\infty, +\infty[$, donc f réalise une bijection de \mathbb{R} sur lui-même.

2.a) φ est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\varphi'(t) = \frac{6t(t^3 + t - a)}{(3t^2 + 1)^2} = \frac{6t}{(3t^2 + 1)^2} f(t)$$

est nulle aux points $t = 0$ et $t = f^{-1}(a)$. De plus f est strictement croissante donc f^{-1} est strictement croissante et $a > 0$ implique $f^{-1}(a) > f^{-1}(0) = 0$.

Pour réaliser le tableau de variation, on note que $\varphi'(t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$ et $\varphi'(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow -\infty$. Enfin, sur $[0, f^{-1}(a)]$, le signe de $\varphi'(t)$ est le signe de $f(t)$ car $6t/(3t^2 + 1)^2 \geq 0$. Or $f'(a) = 3a^2 + a > 0$ donc f est négative sur $[0, f^{-1}(a)]$ et $\varphi'(t)$ également.

Comme $f(0) = 0$, $f'(a) > 0$ et la fonction φ' est négative sur $[0, f^{-1}(a)]$ et positive en dehors.

x	$-\infty$	0	$f^{-1}(a)$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$+$
$\varphi(x)$	$-\infty$	a	$\varphi(f^{-1}(a))$	$+\infty$

2.b) On a $\varphi(t) - t = \frac{a-t-t^3}{3t^2+1}$ ainsi :

$$\varphi(t) = t \Leftrightarrow t^3 + t - a = 0 \Leftrightarrow f(t) = a \Leftrightarrow t = f^{-1}(a)$$

3) φ décroît sur $[0, f^{-1}(a)]$ donc $\varphi(0) > \varphi(f^{-1}(a))$, soit $a > f^{-1}(a)$, d'où $u_0 = a > f^{-1}(a)$. Comme $\varphi([f^{-1}(a), +\infty[) = [f^{-1}(a), +\infty[$, on a par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [f^{-1}(a), +\infty[.$$

La fonction $t \mapsto f(t) - a$ est strictement croissante (car f l'est) et s'annule en $f^{-1}(a)$ donc $t \geq f^{-1}(a) \Rightarrow t^3 + t - a \geq 0$. Ainsi $\varphi(t) - t = \frac{a-t-t^3}{3t^2+1} \leq 0$ sur $[f^{-1}(a), +\infty[$, soit $\varphi(t) \leq t$. Il vient $u_{n+1} = \varphi(u_n) \leq u_n$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle converge. Sa limite est un point fixe de la fonction continue φ , donc vaut $f^{-1}(a)$.

Exercice 3 :

1) Soit f fonction dérivable de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} .

a) Montrer que si $\forall x \geq x_0, m \leq f'(x)$, alors

$$\forall x \geq x_0, m(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0).$$

b) Montrer que si $\forall x \geq x_0, f'(x) \leq M$, alors

$$\forall x \geq x_0, f(x) - f(x_0) \leq M(x - x_0).$$

2.a) Montrer que si $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = l$, alors il existe $x_0 \geq 0$ tel que

$$\forall x \geq x_0, (l - \epsilon)(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq (l + \epsilon)(x - x_0).$$

2.b) En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

Indications et Commentaires : Pour la 1.a), on utilisera $g(x) = f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)$.

Corrections.

1.a) Regardons pour tout $x \geq x_0$, la fonction g définie par :

$$\forall x \geq x_0, g(x) = f(x) - f(x_0) - m(x - x_0).$$

g est continue et dérivable sur $[x_0, +\infty[$, de dérivée

$$\forall x \geq x_0, g'(x) = f'(x) - m \geq 0 \text{ par hypothèse.}$$

Nous en déduisons que g est croissante sur $[x_0, +\infty[$, et donc

$$\forall x \geq x_0, g(x_0) \leq g(x), \text{ soit } \forall x \geq x_0, f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0).$$

1.b) Il suffit d'appliquer la 1.a) avec $-f$ et $-M$.

2.a) Si $f'(x) \rightarrow l$ quand $x \rightarrow +\infty$. Soit $\epsilon > 0$, alors

$$\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, x \geq x_0 \Rightarrow |f'(x) - l| < \epsilon.$$

Donc $x \geq x_0$ entraîne $l - \epsilon < f'(x) < l + \epsilon$. D'après la question 1), on en déduit

$$\forall x \geq x_0, (l - \epsilon)(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq (l + \epsilon)(x - x_0),$$

2.b) Soit $\epsilon \geq 0$. Par la question précédente, il existe $x_0 \geq 0$ tel que

$$\forall x \geq x_0, (l - \epsilon)(x - x_0) + f(x_0) \leq f(x) \leq (l + \epsilon)(x - x_0) + f(x_0).$$

Or, nous avons de manière immédiate les résultats

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(l - \epsilon)(x - x_0) + f(x_0)}{x} = l - \epsilon \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(l + \epsilon)(x - x_0) + f(x_0)}{x} = l + \epsilon. (*)$$

On a donc envie de passer à la limite et obtenir

$$l - \epsilon \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \leq l + \epsilon,$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on ferait tendre ϵ vers 0 et en déduire

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

On a envie mais on ne peut pas, car on ne sait pas si la limite de $f(x)/x$ existe en $+\infty$ et on ne peut pas appliquer le théorème des gendarmes. Il faut revenir aux limites au dessus (*). Il existe $x_1 \geq 0$ tel que pour tout $x \geq x_1$,

$$\frac{(l - \epsilon)(x - x_0) + f(x_0)}{x} \leq l + \epsilon + \epsilon$$

et il existe $x_2 \geq 0$, tel que pour tout $x \geq x_2$,

$$\frac{(l - \epsilon)(x - x_0) + f(x_0)}{x} \geq l - \epsilon - \epsilon.$$

Donc on posant $A = \max(x_0, x_1, x_2)$, pour tout $x \geq A$

$$l - 2\epsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq l + 2\epsilon.$$

Ce qui donne la phrase de la limite avec des quantificateurs et assure que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$