Logique et quantificateurs

V. Bansaye

Niveau : Préparer la Terminale S
Difficulté : Facile au début, plus difficile sur la fin
Durée : Une heure et demi, voire plus sur la fin
Rubrique(s) : Logique (Liens, connecteurs, manipulation des quantificateurs)

Exercice 1 (Connecteurs et liens logiques). On rappelle que les propositions expriment un fait, fixe ou variable, réalisé ou non. Par exemple « $2+2=4.$ » ; « $2x+8y=20.$ » ; « $1+1=0.$ » ; « La Terre est plate. » ; « Il fait plus de 20 degrés. ». On remarque que la proposition « Le mois de février comporte 30 ou 31 jours. » est une proposition fausse.
Profitons en pour rappeler également qu'en mathématiques le *ou* est inclusif, c'est à dire que les deux sont possibles

« Rejoignez-nous si vous êtes une fille ou russe. »

n'exclut pas de prendre soit une fille, soit une personne de nationalité russe, soit une fille russe. Pour prendre un exemple plus mathématique :

« Un parallélogramme est un rectangle s'il a un angle droit ou des diagonales de même longueur. »

Nous utiliserons donc ici le *ou inclusif*, contrairement au langage courant qui utilise plutôt le *ou exclusif*.

1) Donnez la négation des propositions suivantes, c'est-à-dire la proposition qui est vraie (respectivement fausse) quand la proposition de départ est fausse (respectivement vraie).

a) Tous les orchestres possèdent au moins un excellent violoniste.
b) Pour tout $x \in A$, il existe $y \in B$ tel que $x+y<0$.
c) Il y a au moins une pièce du bâtiment qui possède moins de trois prises de courant.
d) Il existe $x \in A$ tel que $f(x)<3$.
e) Dès que je suis fatigué, je vais me reposer ou je prends du café.
f) $x \in A \Rightarrow (x \leqslant 0$ ou $x \in \mathbb{Q})$.
g) La température restera la même les prochains jours.
h) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (c'est-à-dire que la suite est constante à partir d'un certain rang).
i) La température augmentera continûment les prochains jours.
j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante (c'est à dire que pour tous réels $a<b$, $f(a) \leqslant f(b)$).
k) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (c'est à dire qu'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, $|u_n| \leqslant M$).
l) Je me bats si et seulement si on m'attaque et que mon adversaire est moins fort.

m) Soit F un ensemble de fonctions de la variable réelle à valeurs réelles. $f \in F \Leftrightarrow$ (f est croissante et $f(0) \leqslant 0$).

2) Le journal sportif local a affirmé hier

« Il y a au moins une équipe de Ligue 1 qui est constituée uniquement de joueurs français. »

C'était une erreur et le journal a publié un démenti. Cela veut il dire que (plusieurs réponses peuvent être possibles)

a) « Il y a au moins une équipe de Ligue 1 qui ne possède aucun joueur français. »

b) « Il n'y a pas d'équipe de Ligue 1 qui soit constituée uniquement de joueurs français. »

c) « Toute équipe de Ligue 1 possède au moins un joueur étranger. »

d) « Il y a au moins une équipe de Ligue 1 qui ne soit pas constituée que de joueurs francais. »

e) « Il n'y a pas d'équipe de Ligue 1 qui ne soit pas constituée uniquement de joueurs français. »

3) Justifier pourquoi les implications suivantes sont fausses

a) Soit $f\ :\ [a, b] \to \mathbb{R}$. « f continue et $f(a) = f(b) = 0$ » donc « pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$ ».

b) Soit $f\ :\ [0, 1] \to \mathbb{R}$. « f est croissante, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ » donc « il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = 1/2$ ».

4) Deux propositions sont équivalentes quand elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses. En justifiant votre réponse, dites lesquels parmi les couples de propositions suivantes correspondent à des propositions équivalentes. Dans le cas où une implication serait vraie et l'autre fausse, précisez-le.

a) « J'ai eu le permis de conduire » et « J'ai eu le code et la conduite ».

b) « J'ai eu le bac S » et « J'ai eu 20 en maths, en physique-chimie et en SVT au baccalauréat ».

c) « Toutes nos salles de bains sont équipées d'une douche ou d'une baignoire » et « Aucune de nos salles de bains ne possède ni douche ni baignoire ».

d) Soit x un réel. « $x + 1 = 2$ » et « $2x < x + 2$ ».

e) « $ABCD$ est un rectangle » et « $ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur ».

f) Soit x un réel. « $x \geqslant 2$ » et « $x^2 \geqslant 4$ ».

g) « Pour tout $\varepsilon > 0$, $x < \varepsilon$ » et « $x < 0$ ».

h) Soit x un réel. « Pour tout $y \in \mathbb{N}$, $xy = y$ » et « $x = 1$ ».

i) « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ » et « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$ ».

j) Soient a un réel et b un réel positif. « $\sqrt{b} < a$ » et « $a \geqslant 0$ et $b < a^2$ ».

Indications et Commentaires : Soit $P(a)$ une proposition dépendant de a. On rappelle que

- la négation de « Pour tout $a \in A$, $P(a)$ est vraie » est « Il existe $a \in A$ tel que $P(a)$ est fausse ».
- la négation de « Il existe $a \in A$ tel que $P(a)$ est vraie » est « Pour tout $a \in A$, $P(a)$ est fausse ».
- la négation de « P implique Q » est « P et non Q ».

Notons aussi que la place des termes a son importance. Plus précisément, on ne peut pas permuter des quantificateurs de nature différente. Par exemple :

Pour tout b bracelet, il existe s somme d'argent telle que s permet d'acheter b

ne signifie pas la même chose que

Il existe s somme d'argent telle que pour tout b bracelet, s permet d'acheter b.

. La première phrase dit que la somme d'argent à dépenser dépend du bracelet. La deuxième phrase dit qu'il existe une somme d'argent s permettant d'acheter tout bracelet (ce qui est accessible pour peu de personnes !).

Corrections.

1) Voilà les négations des différentes propositions

a) Il y a un orchestre qui ne possède pas d'excellent violoniste.

b) Il existe $x \in A$ tel que pour tout $y \in B$, $x + y \geqslant 0$.

c) Aucune pièce du bâtiment ne possède moins de trois prises de courant, ou toutes les pièces du batiment possèdent au moins trois prises de courant.

d) Pour tout $x \in A$, $f(x) \geqslant 3$.

e) Il arrive que je sois fatigué mais que je n'aille ni me reposer ni prendre un café.

f) $\exists x \in A$ tel que $x > 0$ et $x \notin \mathbb{Q}$.

g) On doit nier ici une équivalence, c'est à dire deux implications. En effet, $P \Leftrightarrow Q$, c'est ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$). La négation est donc (P et $nonQ$) ou (Q et $nonP$). Pour notre cas particulier :

« Il arrive que je me batte alors que l'on ne m'attaque pas ou que mon adversaire est plus fort ou que je ne me batte pas alors que l'on m'attaque et que mon adversaire est moins fort. »

h) ($f \notin F$ et f est croissante et $f(0) \leqslant 0$) ou ($f \in F$ et f est non croissante) ou ($f \in F$ et $f(0) > 0$).

i) La température va varier au cours des prochains jours.

j) Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \neq u_{n_0+1}$.

k) Il y aura une baisse de la température à un moment dans les prochains jours

l) f n'est pas croissante, c'est à dire qu'il existe $a < b$ tel que $f(a) > f(b)$.

m) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, c'est à dire que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n_0}| > M$.

2) On veut ici la négation de

« Il y a au moins une équipe de Ligue 1 qui est constituée uniquement de joueurs français. »

Rappelons que la négation de « Il y a P tel que Q » est « Il n' y a pas P, tel que Q », qui est équivalent à « Pour tout P, il n'y a pas Q ». La négation de l'information est donc de manière équivalente :

– « Il n'y a pas d'équipe de Ligue 1 qui soit constituée uniquement de joueurs français. »
– « Toute équipe de Ligue 1 possède au moins un joueur étranger ».

3.a) Considérons la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = 2x, \text{ si } x \in [0, 1/2] \text{ et } f(x) = 1 - 2x, \text{ si } x \in [1/2, 1].$$

La fonction f est est continue, $f(0) = f(1) = 0$, mais f n'est pas identiquement nulle. L'implication est donc fausse.

b) Comme contrexemple, on peut prendre f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = 0, \text{ si } x \in [0, 1/2] \text{ et } f(x) = 1, \text{ si } x \in]1/2, 1].$$

4.a) Pour avoir le permis, il est nécessaire d'avoir à la fois le code et la conduite. Et cela suffit : une fois que l'on a le code et la conduite, on a le permis. Les deux propositions s'impliquent l'une l'autre ; elles sont équivalentes.

b) Si vous avez 20 en maths, en physique-chimie et en SVT dans la filière S, vous aurez votre Bac : un petit calcul en utilisant les coefficients (forts) de ces matières va vous en convaincre facilement. Par contre si vous avez le Bac (ce que nous vous souhaitons), ça n'implique pas que vous ayez 20 dans ces matières, ni même la moyenne dans une seule. Il n'y a qu'une implication de vraie, et donc les propositions ne sont pas équivalentes.

c) Les deux propositions sont équivalentes : dans les deux cas, on trouvera dans toutes les salles de bain de quoi se laver, une douche, une baignoire ou les deux. Ici, on a l'exemple d'une phrase du type « Pour tous ..., alors *boum* », qui est équivalente à « Pour aucun ..., il n'y a pas de *boum* ».

d) $x+1=2$ est équivalent à $x=1$. Tandis que $2x<x+2$ est équivalent à $x<2$. Donc $x+1=2$ implique $2x<x+2$, mais la réciproque n'est pas vraie. Il n'y a pas équivalence.

e) Un rectangle est un parallélogramme et ses diagonales ont même longueur. Réciproquement, un parallèlogramme dont les diagonales ont même longueur est un rectangle. Donc les deux propositions sont équivalentes.

f) $x \geqslant 2$ implique que $x^2 \geqslant 4$. Mais $x^2 \geqslant 4$ implique $x \geqslant 2$ ou $x \leqslant -2$. Donc l'implication réciproque n'est pas vraie, et il n'y a pas équivalence.

g) Clairement, si $x<0$ et $\varepsilon>0$, alors $x<\varepsilon$. Donc l'implication réciproque est vraie : « $x<0$ » implique « Pour tout $\varepsilon>0$, $x<\varepsilon$ ». Mais $x=0$ vérifie « Pour tout $\varepsilon>0$, $x<\varepsilon$ » sans vérifier « $x<0$ ».
Profitons en pour signaler une erreur classique. Si pour tout $\varepsilon>0$, $x<\varepsilon$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $1/n>0$ et donc $x<1/n$. En faisant tendre n vers l'infini, l'inégalité stricte devient large à la limite donc $x \leqslant 0$ (et pas $x<0$).

h) Les deux propositions sont équivalentes : prendre $y=1$ pour la première implication, multiplier par y pour la réciproque.

i) Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0$, alors $u_{n+1}=u_0$, et donc $u_n=u_{n+1}$. Réciproquement, supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_{n+1}$. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0$.
L'égalité est triviale pour $n=0$ (initialisation). Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $u_n=u_0$. Alors $u_{n+1}=u_n=u_0$ (hérédité).
Ceci prouve la réciproque et les deux propositions sont équivalentes.

j) Soient $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}_+$. Si « $\sqrt{b}<a$ », alors $a\geqslant 0$ et on peut élever cette inégalité au carré car les deux termes sont positifs en utilisant la stricte croissance de $x\mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$. On obtient $b<a^2$. Donc « $\sqrt{b}<a$ » implique « $a\geqslant 0$ et $b<a^2$ ».
Réciproquement, si $a\geqslant 0$ et $b<a^2$, en passant cette inégalité à la racine carrée par stricte croissance de $x\to\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $\sqrt{b}<a$.
Il y a donc équivalence entre les deux propositions. Notons que si l'on retire $a\geqslant 0$, la réciproque devient fausse, par exemple $a=-2$ et $b=1$, $1<(-2)^2$ mais $-2<1$. □

Exercice 2. L'inspecteur LaTruffe cherche le voleur du trésor de la reine. Il a trois suspects : Eric, Brice et Frédéric. Il sait que le voleur est une de ces trois personnes. Il sait également que le voleur ment systématiquement, tandis que les deux autres, qui ne sont pas des voleurs, disent toujours la vérité. Voilà où en est l'inspecteur :

« Eric dit que Brice a volé et Brice dit que c'est Frédéric le voleur. »

Qui est le voleur ?

Indications et Commentaires : Nous vous conseillons la lecture des *Énigmes de Shéhérazade* pour d'autres exemples...
Attention, ce n'est pas parce qu'une configuration semble possible que c'est la bonne. Il pourrait y en avoir une autre...

Corrections. On sait qu'il y a un (et un seul) menteur, qui est le voleur. On utilise la disjonction des cas.

- Eric est le menteur, et donc le voleur. Il dit que Brice a volé, ce qui est bien faux puisque c'est Eric. Mais Brice dit la vérité puisqu'il y a un seul menteur-voleur et donc Frédéric est le voleur. Ce qui fait deux voleurs : impossible !!
- Brice est le menteur, et donc le voleur. Donc il ment en accusant Frédéric, qui est donc innocent. Eric dit également la vérité puisqu'il n'y a qu'un coupable, et il accuse Brice, qui semble donc bien être le coupable. Tout est cohérent.
- Frédéric est le menteur, et donc le voleur. Alors Eric et Brice sont innocents et disent la vérité. Mais Eric accuse Brice et il y aurait donc deux coupables : impossible !!

Brice est donc le voleur-menteur. □

Exercice 3. Rodolphe se retrouve devant trois portes et n'a le droit d'en ouvrir qu'une seule pour accéder au trésor. Sur chacune des portes est inscrite une inscription. Il sait que, parmi ces portes, une seule dit la vérité et les deux autres mentent.

Quelle porte doit-il choisir ?

Indications et Commentaires : Faire une disjonction de cas, en distinguant si c'est la première, la deuxième ou la troisième porte qui dit la vérité.

Corrections. On raisonne par disjonction de cas.

- Supposons que la première porte soit celle qui dit la vérité. Alors les deux autres portes mènent au trésor. Et elles mentent. Comme la deuxième porte ment, c'est que ni la première ni la troisième ne mènent au trésor, ou bien les deux mènent au trésor. Or on vient de dire que la troisième porte mène au trésor, donc les première et troisième portes mènent au trésor, et la deuxième aussi. Les 3 portes mènent au trésor.
- Supposons que la deuxième porte soit celle qui dit la vérité. Alors une seule des deux autres portes mène au trésor, c'est-à-dire la première et pas la troisième, ou bien la troisième et pas la première. La troisième porte ment et donc il y a deux ou trois portes qui mènent au trésor. Comme la première porte ment également, au moins une des autres portes ne mène pas au trésor.
  Récapitulons. Dans ce cas, il y a exactement deux portes qui mènent au trésor, dont la première ou (exclusif) la troisième, tandis que la deuxième ou (inclusif) la troisième ne mènent pas au trésor.
  Supposons que la deuxième porte ne mène pas au trésor, alors la première et la troisième méneraient au trésor, ce qui est exclu.
  Donc la deuxième porte mène forcement au trésor. On en déduit que la troisième n'y mène pas et que la première y mène.
- Supposons que la troisième porte soit celle qui dit la vérité. Il y a une seule porte qui mène au trésor. Donc il n'est pas possible que les deuxième et troisième portes mènent au trésor. Or la deuxième porte ment, ce qui veut dire que ni la première ni la troisième porte ne mènent au trésor. Donc seule la deuxième porte mène au trésor.

On remarque que dans chaque cas la deuxième porte mène au trésor. C'est celle-ci qu'il faut choisir ! □

Exercice 4. Quel est le problème avec les deux énoncés suivants ?

1) « Je mens ».

2) « Soit n_0 le plus petit entier naturel qui ne peut être défini en moins de dix neuf mots ».

Indications et Commentaires : La première phrase est-elle vraie ? Est-elle fausse ?
Combien la phrase qui définit n_0 comporte-t-elle de mots ?

Corrections.

1) Si la phrase « Je mens » est vraie, alors je suis un menteur et donc je devrais dire un mensonge, donc je dis la vérité. Absurde.
Si la phrase « Je mens » est fausse, alors je dis la vérité. Or je dis que je mens, absurde également.
Cette phrase ne peut être ni vraie, ni fausse, ce n'est donc pas une proposition.

2) Cette phrase contient 18 mots et donc n_0 qui est défini par cette phrase est défini en moins de 19 mots, ce qui est en contradiction avec sa propre définition.

Ce point soulève un problème en théorie des ensembles : certaines définitions ne sont pas correctes, à cause d'une « boucle » dans la définition. Vous pouvez également penser « au barbier qui rase toutes les personnes qui ne se rasent pas elles-mêmes »... qui rase le barbier ? Ceci renvoie à « l'ensemble de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes ». $\square$