Autour du nombre d'or

A. Camanes

Niveau : Approfondir la Terminale S

Difficulté : Intermédiaire / Difficile

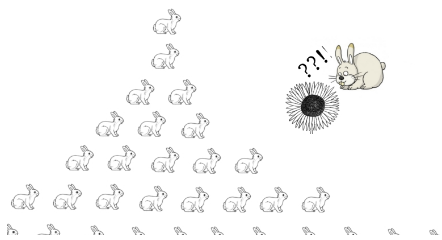
Durée : plus d'une heure

Rubrique(s) : Analyse (Suites - Trinôme - Étude de fonctions)

La petite histoire... Considérons une famille de lapins autoreproduisants, c'est-à-dire que chaque lapin peut engendrer des lapins tout seul. Les lapins sont également supposés immortels ...
On suppose qu'à l'aube des temps, un lapin naquit. Le mois suivant, ce lapin fut adolescent et le mois d'après il engendra un autre lapin. Le mois suivant, le premier lapin engendra encore un autre lapin, alors que le deuxième faisait sa crise d'adolescence. Ainsi tous les matins, chaque lapin ayant deux mois ou plus, donna naissance à un lapin de plus.
Combien de lapins étaient en vie après 6 mois ? et n mois ?
Un moyen de répondre à cette question de manière plus générale est d'étudier la suite donnant le nombre u_n de lapins vivant au bout de n mois. Elle vérifie la relation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

En notant u_n le nombre de lapins le jour n, nous verrons que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est appelée suite de Fibonacci. Nous verrons comment nous pouvons trouver le nombre de lapins à la génération n. Nous étudierons le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, qui donne le taux d'accroissement journalier des lapins, et nous verrons qu'il tend vers le célèbre nombre d'or.
Enfin, nous verrons comment approcher le nombre d'or. Ce dernier a des vertus mystiques et biologiques. Il est relié par exemple à l'angle séparant deux graines contiguës dans une fleur de tournesol ...



Exercice 1 (Le nombre d'or et les lapins : 30 min à 1h).

1.a) On s'intéresse à l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

b) Montrer que cette équation possède une unique solution positive que nous noterons φ. φ est appelé le nombre d'or.

c) Montrer les égalités

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi^2+1}{2\varphi-1}.$$

2) On considère la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ puis pour tout entier naturel n par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Cette suite est appelée la suite de Fibonacci.

a) Calculer u_2, u_3, u_4.

b) Justifier que cette suite donne bien le nombre de lapins dans le modèle décrit plus haut dans la petite histoire, c'est à dire que u_n correspond au nombre de lapins au bout de n mois.

Soient α et β deux réels. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

c) Déterminer α et β de sorte que $v_0 = v_1 = 1$.

d) Vérifier par récurrence que la suite ainsi définie satisfait la relation de récurrence

$$\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_1 &= 1 \\ v_{n+2} &= v_{n+1} + v_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n$ désigne le nombre de lapins au bout de n mois.

e) En déduire que pour tout entier n, $\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ est un entier naturel.

f) Montrer que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers φ lorsque n tend vers l'infini.

Indications et Commentaires : **2.c)** Se ramener à l'étude du système

$$\begin{cases} 1 &= \alpha + \beta \\ 1 &= \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

2.d) On pourra poser $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et se rappeler que φ et ψ sont les solutions du trinôme étudié à la question précédente.

2.e) Se rappeler l'histoire des lapins...

2.f) Mettre en facteur le numérateur et le dénominateur par φ^n puis utiliser le fait que, si $|\rho| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho^n = 0$.

Corrections.

1.a) Le discriminant du trinôme $x^2 - x - 1$ vaut 5. Ainsi, les racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Comme $5 \geqslant 4$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant -\frac{1}{2}$ et l'unique solution positive de l'équation précédente est

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

b) Comme $\varphi \neq 0$, on obtient immédiatement

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

La deuxième égalité montre de manière analogue que

$$\frac{\varphi^2+1}{2\varphi-1} = \varphi\frac{\varphi^2+1}{2\varphi^2-\varphi} = \varphi\frac{\varphi+2}{2\varphi+2-\varphi} = \varphi.$$

2.a) En utilisant la formule de récurrence pour $n = 0$, il vient

$$u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 1 = 2.$$

En utilisant la formule de récurrence pour $n = 1$, on obtient

$$u_3 = u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3.$$

En utilisant la formule de récurrence pour $n = 2$, on a

$$u_4 = u_3 + u_2 = 3 + 2 = 5.$$

b) Notons v_n le nombre de lapins à la génération n, c'est à dire au bout de n mois. Le nombre de lapins à la génération $n+2$ est la somme

- du nombre de lapins à la génération précédente $n+1$ car les lapins sont immortels. Ce nombre vaut v_{n+1} ;
- du nombre de lapins nés à la génération $n+2$. Il est égal au nombre de lapins qui ont déjà un mois à la génération $n+1$, c'est à dire le nombre de lapins présents à la génération n, ce qui vaut v_n.

Ceci implique que $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$. De plus, d'après la petite histoire $v_0 = v_1 = 1$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien la même que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et u_n donne bien le nombre de lapins au bout de n mois.
Pour prouver rigoureusement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$, il faut faire une récurrence avec comme hypothèse de récurrence

$$\mathcal{P}(n): \quad u_n = v_n, \quad u_{n+1} = v_{n+1}.$$

Initialisation. $u_0 = u_1 = 1$ et $v_0 = v_1 = 1$ donc $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, i.e. $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$. Or

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \qquad v_{n+2} = v_{n+1} + v_n,$$

d'où $u_{n+2} = v_{n+2}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
La récurrence est achevée.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $v_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. $v_0 = v_1 = 1$ si et seulement si

$$\begin{cases} v_0 = 1 = \alpha + \beta, \\ v_1 = 1 = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

On résout ce système en α et β. On remplace la deuxième ligne par $(1-\sqrt{5})/2$ fois la première moins la deuxième, ce qui donne

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ 0\alpha + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1. \end{cases}$$

En simplifiant, on arrive à

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -\sqrt{5}\beta = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Finalement, on obtient $\beta = \frac{\sqrt{5}+5}{10}$ et $\alpha = 1 - \beta = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+5}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

d) On effectue une récurrence. On a bien $v_0 = v_1 = 1$. Soit n un entier naturel. Notons $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On rappelle que φ et ψ ont été étudiées à la question précédente et qu'ils sont solutions de l'équation $X^2 - X - 1 = 0$. Ainsi, $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$. Soit,

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= \alpha\psi^{n+2} + \beta\varphi^{n+2} \\ &= \alpha\psi^n \cdot \psi^2 + \beta\varphi^n\varphi^2 \\ &= \alpha\psi^n(\psi+1) + \beta\varphi^n(\varphi+1) \\ &= \alpha\psi^{n+1} + \alpha\psi^n + \beta\varphi^{n+1} + \beta\varphi^n \\ &= \alpha\psi^{n+1} + \beta\varphi^{n+1} + \alpha\psi^n + \beta\varphi^n \\ &= v_{n+1} + v_n. \end{aligned}$$

e) On remarque que, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et que $u_0 = u_1 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$ (c'est le nombre de lapins au bout de n mois...).
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+5}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ est un entier naturel, ce qui n'est pas évident à première vue !!

f) On calcule le rapport en mettant en valeur la quantité $\rho = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n$, qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini car $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} \\ &= \frac{\alpha\frac{1-\sqrt{5}}{2}\rho^n + \beta\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\alpha\rho^n + \beta}. \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\beta} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

$\square$

Exercice 2 (Comment approcher le nombre d'or : 30min à 1h). On rappelle que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer l'encadrement $\frac{3}{2} \leqslant a_n \leqslant 2$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, montrer l'inégalité $|a_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{4}{9}|a_n - \varphi|$.

c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$|a_n - \varphi| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

d) Que dire du comportement de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

2) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $c_{n+1} = \frac{c_n^2+1}{2c_n-1}$. On note f la fonction définie pour tout $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}.$$

a) Étudier les variations de f sur son intervalle de définition.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $\varphi \leqslant c_{n+1} \leqslant c_n \leqslant 2$.

c) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $c_{n+1} - \varphi \leqslant \frac{1}{2}(c_n - \varphi)^2$.

e) En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'inégalité

$$c_n - \varphi \leqslant 2^{-\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k}.$$

f) Quelle est la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Indications et Commentaires : **1.a)** Une petite récurrence !

1.b) Utiliser la question précédente.

1.d) Se rappeler le théorème des gendarmes.

2. Utiliser les mêmes méthodes qu'à la question précédente. Se rappeler le théorème de convergence des suites monotones.

Corrections.

1.a) On commence par remarquer que par une récurrence immédiate, on a $a_n > 0$. On montre alors la propriété $\frac{3}{2} \leqslant a_n \leqslant 2$ par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, on a bien $\frac{3}{2} \leqslant a_0 = 2 \leqslant 2$.
- Soit $n \geqslant 0$. On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n. On a alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{array}{ccccc} \frac{3}{2} & \leqslant & a_n & \leqslant & 2 \\ \frac{1}{2} & \leqslant & \frac{1}{a_n} & \leqslant & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & \leqslant & 1+\frac{1}{a_n} & \leqslant & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \leqslant & a_{n+1} & \leqslant & 2. \end{array}$$

  Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

- Finalement, en utilisant le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 0$

$$\frac{3}{2} \leqslant a_n \leqslant 2.$$

b) Soit $n \geqslant 1$. En utilisant la définition de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$, on a

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - \varphi| &= \left|1 + \frac{1}{a_n} - 1 - \frac{1}{\varphi}\right| \\ &= \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\varphi}\right| \\ &= \frac{|a_n - \varphi|}{a_n \varphi} \\ &\leqslant \frac{4}{9}\,|a_n - \varphi| \end{aligned}$$

car $a_n \geqslant \frac{3}{2}$ et $\varphi \geqslant \frac{3}{2}$.

c) On montre la propriété $|a_n - \varphi| \leqslant (\frac{4}{9})^n$ par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, $|a_1 - \varphi| = \frac{\sqrt{5}-2}{2} \leqslant \frac{4}{9}$, car $\sqrt{5} \leqslant \frac{26}{9}$.
- Soit $n \geqslant 0$. On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n. On a alors, en utilisant la question précédente et l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - \varphi| &\leqslant \frac{4}{9}\,|a_n - \varphi| \\ &\leqslant \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n \\ &\leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

  Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.
- Finalement, en utilisant le principe de récurrence, on a pour tout $n \geqslant 0$,

$$|a_n - \varphi| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

d) Comme $\frac{4}{9} < 1$, $(\frac{4}{9})^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Ainsi, en utilisant le théorème des gendarmes on obtient que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge et

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \varphi.$$

2.a) La fonction f est la composée de fonctions dérivables sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$, donc elle est dérivable. De plus, pour tout $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(2x-1) - 2(x^2+1)}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 2}{(2x-1)^2} \\ &= 2\frac{x^2 - x - 1}{(2x-1)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est décroissante sur $]\frac{1}{2}; \varphi]$ puis croissante sur $[\varphi; +\infty[$.

b) On montre par récurrence la propriété $\varphi \leqslant c_{n+1} \leqslant c_n \leqslant 2$.

- Pour $n = 0$, on a bien $\varphi \leqslant a_1 = \frac{5}{3} \leqslant a_0 = 2 \leqslant 2$.
- Soit $n \geqslant 0$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. La fonction f étant croissante sur l'intervalle $[\varphi; +\infty[$, on a en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi & \leqslant & c_{n+1} & \leqslant & c_n & \leqslant & 2 \\ f(\varphi) & \leqslant & f(c_{n+1}) & \leqslant & f(c_n) & \leqslant & f(2) \\ \frac{\varphi^2+1}{2\varphi-1} & \leqslant & c_{n+2} & \leqslant & c_{n+1} & \leqslant & \frac{5}{3} \\ \varphi & \leqslant & c_{n+2} & \leqslant & c_{n+1} & \leqslant & 2, \end{array}$$

  où nous avons utilisé la question 1.c) de l'exercice 1 sur les propriétés de φ. La propriété est ainsi vraie à l'ordre $n + 1$.

– Finalement, en utilisant le principe de récurrence, on a bien pour tout $n \geqslant 0$,

$$\varphi \leqslant c_{n+1} \leqslant c_n \leqslant 2.$$

c) D'après la question précédente, la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée, donc elle converge.

d) Soit $n \geqslant 0$. En utilisant la définition de la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$, on a

$$\begin{aligned} c_{n+1} - \varphi &= \frac{c_n^2+1}{2c_n-1} - \varphi \\ &= \frac{c_n^2 - 2c_n\varphi + \varphi + 1}{2c_n - 1} \\ &= \frac{c_n^2 - 2c_n\varphi + \varphi^2}{2c_n - 1} \\ &= \frac{(c_n-\varphi)^2}{2c_n-1} \\ &\leqslant \frac{1}{2}(c_n-\varphi)^2, \end{aligned}$$

car $\varphi \leqslant c_n$, soit encore $2 \leqslant 2\varphi - 1 = \sqrt{5} \leqslant 2c_n - 1$.

e) On montre par récurrence la propriété $c_n - \varphi \leqslant 2^{-\sum_{k=1}^n 2^k}$.

– Pour $n = 0$, on a bien $c_0 - \varphi = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{1}{2}$.

– Soit $n \geqslant 0$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. En utilisant la question précédente et l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$\begin{aligned} c_{n+1} - \varphi &\leqslant 2^{-1}(c_n-\varphi)^2 \\ &\leqslant 2^{-1}2^{-2\sum_{k=1}^n 2^k} \\ &\leqslant 2^{-1}2^{-\sum_{k=1}^n 2^{k+1}} \\ &\leqslant 2^{-1-\sum_{k=2}^{n+1} 2^k} \\ &\leqslant 2^{-\sum_{k=1}^{n+1} 2^k}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

– Finalement, en utilisant le principe de récurrence, on a bien pour tout $n \geqslant 0$

$$c_n - \varphi \leqslant 2^{-\sum_{k=1}^n 2^k}.$$

f) Comme $c_n - \varphi \geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^n 2^k = 2\frac{2^n-1}{2-1} \to +\infty$, le théorème des gendarmes nous donne que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \varphi.$$

□