Méthodes algébriques : une inégalité, un système

V. Bansaye

Niveau : Terminale

Difficulté : Moyenne

Durée : Moins d'une heure

Rubrique(s) : Analyse (Inégalité, Etude de fonctions)
Algèbre (Polynôme du second degré, Système linéaire à deux inconnues)

Exercice 1. Une maman a 21 ans de plus que son fils. Dans 6 ans, elle aura 5 fois l'âge de son fils.
Où se trouve le fils ? Quelle est sa taille ? Sa forme ?

Indications et Commentaires : Appelez x l'âge du fils et y l'âge de la mère et résoudre le système pour trouver x.

Corrections. Si x désigne l'âge du fils et y l'âge de la mère, $y = x+21$ puique la mère a 21 ans de plus que le fils.
Dans 6 ans, l'âge du fils sera égal à $x+6$ et celui la mère à $y+6$, donc $y+6 = 5(x+6)$. D'où :

$$\left\{\begin{array}{ll} y & = x+21, \\ y+6 & = 5x+30 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{ll} y & = x+21, \\ x+21+6 & = 5x+30 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{ll} y & = x+21, \\ 4x & = -3, \end{array}\right.$$

Donc l'âge du fils est $x = -3/4$ an. On a dû vous dire de faire attention à ce que vos réponses aient un sens. $-3/4$ d'année, comme âge, qu'est-ce que cela veut dire ? Et bien, cela correspond à -9 mois ; autrement dit nous sommes 9 mois avant la naissance du fils. Ra grossesse dure environ 9 mois et nous sommes donc près du moment de la fécondation. Le fils est donc a priori dans le ventre de sa mère, au stade d'ovule ou de cellule œuf : il a une forme spéhrique et n'est pas bien grand, environ $0,15$ mm.

$\square$

Exercice 2. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$x+1 < \sqrt{x+3}.$$

Puis proposer une résolution graphique.

Indications et Commentaires : Commencer par préciser l'ensemble de définition.
L'exerice consiste à trouver les réels x tels que $x+1 < \sqrt{x+3}$, c'est à dire déterminer

$$\{x \in \mathbb{R} : x+1 < \sqrt{x+3}\}.$$

Cela signifie que l'on cherche des réels satisfaisant cette inégalité, et qu'on ne veut pas en oublier. Cette question n'est pas si facile : faite sans précautions, elle provoque beaucoup d'erreurs. Notamment soyez prudents au moment de *passer au carré*.

Corrections. Les réels x pour lesquels cette inégalité est bien définie sont ceux pour lesquels on peut prendre la racine carrée de $x+3$, c'est à dire $x \geqslant 3$. L'ensemble de définition est donc

$$\mathcal{D} = [-3, \infty[.$$

Nous travaillerons maintenant toujours sur cet ensemble.
Pour résoudre cette inégalité, nous avons bien sur envie de l'élever au carré. Pour cela, nous devons distinguer les cas où les membres de gauche et droite sont
-deux nombres positifs (et l'ingalité conservera le même sens), c'est le 1er cas.
-ou bien deux nombres négatifs (mais ce cas ne peut se produire ici car une racine est positive).
-ou bien un nombre négatif et un nombre positif (et alors on ne peut pas *passerau carré*), c'est le deuxième cas.
1er cas : $x+1 \geqslant 0$, $\sqrt{x+3} \geqslant 0$. Et bien sûr $x \in \mathcal{D}$. C'est à dire qu'ici nous travaillons avec $x \in [-1, \infty[$.
Puisque les deux nombres sont positifs, on peut utiliser la stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $[0, \infty[$ pour *passer l'inégalité stricte au carré* et on obtient

$$\begin{array}{rcl} (x+1)^2 & < & (x+3) \\ x^2+2x+1 & < & x+3 \\ x^2+x-2 & < & 0. \end{array}$$

Nous devons donc étudier le signe du polynôme de degré 2 : x^2+x-2. Pour cela, nous cherchons ses racines et ici il y a comme racine évidente 1. Alors comme le terme x^2 fait que le signe est positif à l'exterieur des racines :

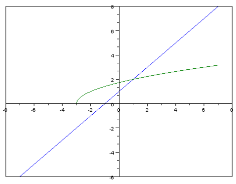
$$x^2+x-2 = (x-1)(x+2).$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc les x que nous cherchons sont ceux qui appartiennent à $]-2, 1[$. Mais nous travaillons ici sur $[-1, \infty[$, donc les solutions dans ce premier cas sont les réels de l'ensemble $[-1, 1[$.
2ème cas : $x+1 < 0$ et $\sqrt{x+3} \geqslant 0$. Et bien sûr $x \in \mathcal{D}$. C'est à dire que nous travaillons avec les réels $x \in [-3, -1[$. Mais alors

$$x+1 < 0 \leqslant \sqrt{x+3}$$

et l'inégalité (stricte) est forcement vérifiée. Donc les solutions dans ce deuxième cas sont les réels de l'ensemble $[-3, -1[$.
CONCLUSION : L'ensemble des solutions est $[-3, -1[\cup [-1, 1[= [-3, 1[$.
Pour la résolution graphique de cette inégalité, on cherche les abscisses pour lesquelles la courbe verte (qui représente la fonction $x \mapsto \sqrt{x+3}$) est strictement au dessus de la courbe bleue (qui représente la fonction $x \mapsto x+1$)



L'ensemble des solutions est bien donné par $[-3, 1[$. □