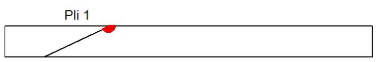
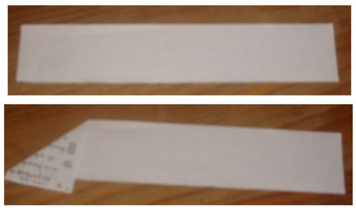
Pliages : géométrie, suite arithmético géométrique et convergence

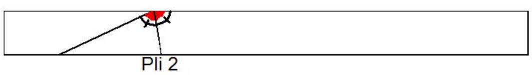
Niveau : Approfondir la Terminale S
Difficulté : Pas de grosse difficulté
Durée : Une à deux heures, suivant la vitesse de pliage
Rubrique(s) : Analyse (Suites, limites)
Géométrie (Géométrie plane, angles)

La petite histoire... Cet exercice est d'abord une histoire de pliage et de convergence. Prenez un ruban de papier et pliez-le. Comme dans la figure ci-dessous, nous vous conseillons de choisir un angle de pliage suffisamment grand.

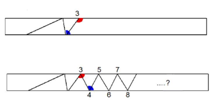
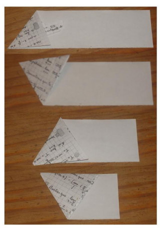




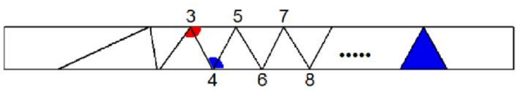
Puis vous pliez à nouveau suivant la bissetrice du nouvel angle, ce qui revient juste à rabattre la partie déjà pliée contre le bord du haut du ruban de la manière suivante.

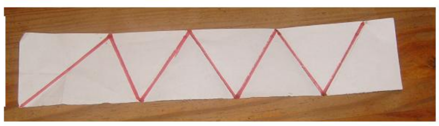


Répétez maintenant cette opération en pliant à chaque fois suivant la bissetrice du nouvel angle :

Que se passe-t-il ? Quel genre de triangle semble se dessiner ?





N'hésitez pas à utiliser un ruban plus grand pour voir la limite apparaître, ou utilisez votre rapporteur pour deviner la valeur de l'angle limite.
Mais de toute façon, nous allons maintenant mettre tout cela « en équation » et démontrer que, quel que soit le pli initial, ces pliages conduisent toujours au même angle limite, qui ne nous est pas inconnu...
Les exercices qui suivent vont répondre formellement à ces questions : le premier exercice est l'étude de la suite qui se cache derrière ce problème de pliage, le deuxième propose une généralisation du résultat aux suites appelées *arithmético-géométriques*, et le dernier est la résolution théorique du problème de pliage.

Exercice 1. La suite (u_n) qui décrit les valeurs successives des angles qui apparaissent sur le ruban vérifie :

$$u_0 \in [0, \pi], \qquad u_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} u_n.$$

(Cette affirmation sera démontrée dans le dernier exercice).
Pour trouver sa limite, nous considérons la suite auxiliaire (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$v_n = u_n - \frac{\pi}{3}.$$

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et calculer sa raison.

2) En déduire la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de u_0.

3) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

Indications et Commentaires : 1) On rappelle qu'une suite géométrique de raison r est une suite (u_n) qui satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = r \cdot u_n.$$

2) Commencer par calculer la valeur de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrections.

1) Il suffit d'exprimer v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{u_n}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{u_n}{2} = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{\pi}{3}\right)$$

et donc

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2} v_n,$$

ce qui signifie que (v_n) est une suite géométrique de raison $-1/2$.

2) Nous savons calculer (par récurrence) le terme général des suites géométriques :

$$v_n = -\frac{1}{2} v_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 v_{n-2} = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k} = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0.$$

Donc

$$u_n = v_n + \frac{\pi}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0 + \frac{\pi}{3}$$

Or $v_0 = u_0 - \pi/3$ et on conclut :

$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \pi/3) + \frac{\pi}{3}.$$

3) Lorsque n tend vers l'infini, $(-1/2)^n$ tend vers 0 (divisez une part de gâteau par deux, jour après jour, et vous verrez qu'il ne reste par grand chose...) et donc $(-1/2)^n(u_0 - \pi/3)$ tend aussi vers 0 et (u_n) tend vers $\pi/3$. $\square$

Exercice 2 (Suites arithmético-géométriques). Soient $u_0, a \in \mathbb{R}$ et $b \neq 1$. Considérons la suite (u_n) définie par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_{n+1} = a + b u_n.$$

Comme $b \neq 1$, nous pouvons définir le nombre réel ℓ tel que :

$$\ell = a + b\ell.$$

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$v_n = u_n - \ell.$$

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison b.

2) Calculer la valeur de u_n pour tout entier naturel n en fonction de u_0, a et b.

3) Déterminer la limite de la suite (u_n) quand elle existe.

Indications et Commentaires : 3) Il y a cinq cas à distinguer : $b \in]-1, 1[$, $b = 1$, $b = -1$, $b > 1$ et $b < -1$.
Si vous ne vous rappelez plus de la méthode pour calculer ces suites géométriques, vous pouvez retenir le rôle du point fixe $\ell = a + b\ell$. C'est le réel qui apparaît naturellement à la limite, et qui permet de récupérer une suite géométrique $u_n - \ell$. En effet, s'il existe $r > 0$ tel que $v_{n+1} = rv_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $a + bu_n - \ell = ru_n - r\ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est vrai lorsque $b = r$ et $a - \ell = -r\ell$, c'est-à-dire $\ell = a + b\ell$.

Corrections.

1) Nous cherchons donc à exprimer v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l = a + bu_n - \ell = a + bu_n - (a + b\ell) = b(u_n - \ell) = bv_n,$$

et donc (v_n) est une suite géométrique de raison b.

2) Nous savons calculer la valeur d'une suite géométrique de raison b au rang n :

$$v_n = b^n v_0.$$

Nous en déduisons la valeur de u_n :

$$u_n = v_n + \ell = b^n v_0 + \ell.$$

Nous devons encore remplacer v_0 et ℓ, en utilisant

$$\ell = a + b\ell \quad \Rightarrow \quad \ell(1 - b) = a \quad \Rightarrow \quad \text{si } b \neq 1, \ell = \frac{a}{1 - b}; \quad v_0 = u_0 - \ell = u_0 - \frac{a}{1 - b}.$$

Ainsi, si $b \neq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = b^n \left(u_0 - \frac{a}{1 - b} \right) + \frac{a}{1 - b}.$$

3) Tout dépend du comportement de la suite (b^n) et celui-ci dépend de la valeur de b :

- Si $b \in]-1, 1[$, alors (b^n) tend vers 0, donc $(b^n (u_0 - a/(1 - b)))$ tend vers 0 et u_n tend vers $a/(1 - b)$.
- Si $b = 1$, on ne peut pas utiliser le résultat de la question précédente, mais d'après la définition de la suite (u_n), on a $u_{n+1} = a + u_n$. La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de raison a. Ainsi, pour tout n, $u_n = u_0 + na$. Donc u_n tend respectivement vers $+\infty$, $-\infty$ ou u_0 suivant que a est strictement positif, strictement négatif ou nul.
- Si $b = -1$, la suite $((-1)^n)$ oscille entre 1 et -1 (un coup la suite vaut 1, le coup suivant -1, et ainsi de suite...). Donc (u_n) oscille entre u_0 et $2a/(1 - b) - u_0 = a - u_0$. Donc elle est bornée mais ne converge pas, sauf (et seulement sauf) si

  $$u_0 = a - u_0, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad u_0 = \frac{a}{2}.$$

  En effet, dans ce dernier cas, la suite (u_n) est constante égale à $u_0 = a/(1 - b)$.
- Si $b > 1$, b^n tend vers l'infini. Donc u_n tend respectivement vers $+\infty$, $-\infty$ et $u_0 = a/(1 - b)$ suivant que $(u_0 - a/(1 - b))$ est strictement positif, strictement négatif ou nul.

– Si $b < -1$, b^n « oscille entre des valeurs tendant vers plus et moins l'infini ».
  Si $u_0 - a/(1-b)$ est non nul, alors (u_n) oscille également entre plus et moins l'infini.
  Si $u_0 = a/(1-b)$ alors la suite est constante et donc convergente vers $u_0 = a/(1-b)$.

$\square$

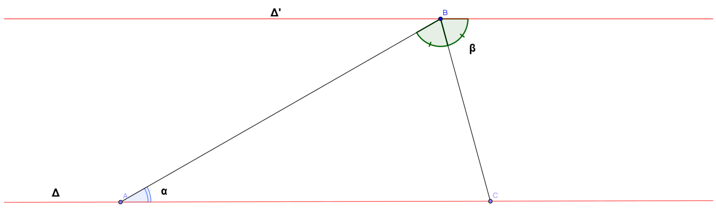
Exercice 3. Nous allons ici résoudre le problème de pliage décrit au début, c'est-à-dire montrer que les pliages successifs conduisent à former un triangle équilatéral, c'est-à-dire un triangle dont tous les angles ont pour valeur $\pi/3$.
Tracez deux droites parallèles Δ et Δ' pour représenter le ruban. Soient $A \in \Delta$ et $B \in \Delta'$. Notons α l'angle aigu entre Δ et (AB). Tracer la bissectrice de l'angle obtus entre (AB) et Δ' et noter β l'angle entre cette bissectrice et Δ'.

1) Faites un dessin et exprimer la valeur de β en fonction de α.

2) Expliquez alors pourquoi les pliages successifs conduisent à la limite à la formation d'un angle de $\pi/3$, c'est-à-dire des triangles équilatéraux.

3) Justifiez pourquoi le fait de plier selon la bissetrice revient bien à rabattre le papier sur le bord du haut pour le premier pliage, c'est-à-dire à rabattre le segment $[AB]$ sur la droite Δ'.

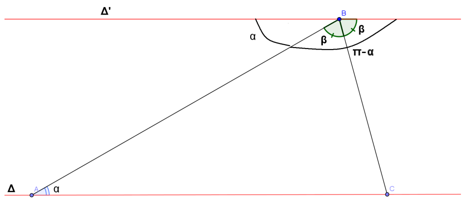
Indications et Commentaires : Voilà la figure correspondant au pliage :



1) Utilisez les angles alternes-internes.

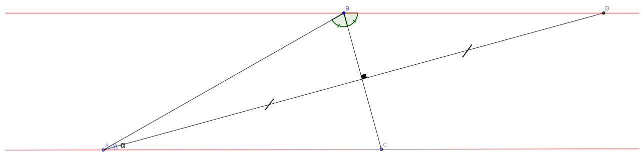
Corrections.

1) L'angle aigu entre (AB) et Δ' vaut également α car Δ et Δ' sont parallèles et on utilise les angles alternes-internes. L'angle entre (AB) et Δ vaut donc $\pi - \alpha$ et en prenant la bissectrice, on obtient un angle $\beta = \pi/2 - \alpha/2$.



2) L'angle initial valait α et le premier pliage donne un nouvel angle de $\pi/2 - \alpha/2$. En répétant le pliage, on transforme donc à chaque fois l'angle u_n de l'étape n en l'angle $\pi/2 - u_n/2$. Le premier exercice permet de prédire ce qui se passe : l'angle u_n converge vers $\pi/3$. Donc au bout d'un grand nombre d'étapes, l'angle de pliage est proche de $\pi/3$ et les triangles ressemblent de plus en plus à des triangles équilatéraux.

3) Suivons le dessin ci-dessous : en pliant suivant la bissectrice, on envoie le point A sur son symétrique orthogonal par rapport à cette bissectrice. Comme cette droite est la bissectrice entre (AB) et Δ', le symétrique orthogonal du point A appartient à Δ'. Le point B lui ne bouge pas au cours du pliage. Ainsi en pliant suivant la bissectrice, on rabat bien le segment $[AB]$ sur Δ'.



$\square$