Raisonnement par récurrence

V. Bansaye

Niveau : Approfondir la Terminale S

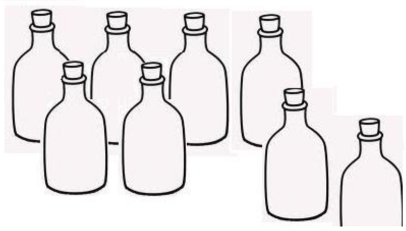
Difficulté : Plutôt facile, un peu technique pour le second.

Durée : 20 min pour le premier, une bonne demi heure pour le second.

Rubrique(s) : Récurrence (Signe somme, étude de fonctions)

La petite histoire... Rodolphe vient d'ouvrir un restaurant qui marche bien. Il stocke les bouteilles vides dans sa cave. Le premier jour une seule bouteille a été consommé, puis trois le deuxième, cinq le troisième, sept le quatrième... et ainsi de suite. Tous les jours, Rodolphe constate qu'il y a deux bouteilles de plus que la veille qui sont consommées !
Évidemment, à un moment ou à un autre, il devra aller jeter les bouteilles. Quand cela se produira-t-il ? Il faudrait savoir combien de bouteilles sont stockées au bout de n jours dans sa cave. C'est à dire calculer la somme des n premiers nombres impairs :

$$u_n = 1 + 3 + 7 + ... + (2n - 1).$$



Rodolphe se dit que ça ne doit vraiment pas être simple. Mais comme il range bien ses bouteilles pour éviter qu'elles ne prennent trop de place, la solution lui apparaît toute seule. Comment ? c'est ce que nous allons voir maintenant. Pour être rigoureux, Rodolphe a fait un raisonnement par récurrence quelque part...

Exercice 1. Nous cherchons à calculer la valeur de la somme des n premiers entiers impairs :

$$u_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 3) + (2n - 1).$$

1.a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
1.b) Conjecturer la valeur de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2.a) Dessiner maintenant les rangements successifs des bouteilles vides de Rodolphe pour les quatre premiers jours en sachant qu'il cherche à les ranger de la façon la plus compacte possible.
2.b) Quelle sera la disposition des bouteilles au temps n ? Pourquoi Rodolphe en est-il convaincu ?

3) Prouver maintenant rigoureusement que $u_n = n^2$ par un calcul utilisant le raisonement par récurrence.

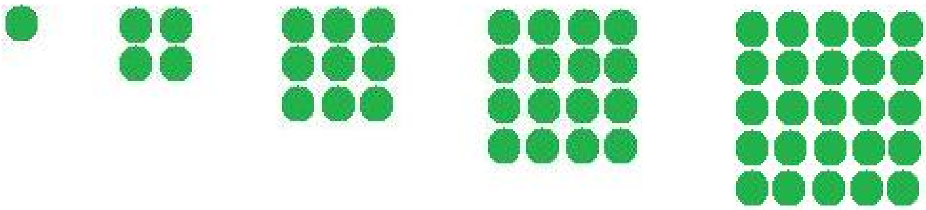
Indications et Commentaires :

Corrections.

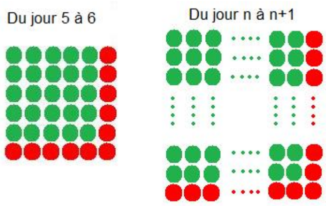
1.a) $u_1 = 1$, $u_2 = 1 + 3 = 4$, $u_3 = 1 + 3 + 5 = 9$, $u_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

1.b) On obtient donc 1, 4, 9, 16 puis 25, 36... c'est à dire des carrés, et même les carrés successifs des entiers. On peut donc conjecturer que $u_n = n^2$.

2.a) Rangeons les bouteilles de manière compacte, c'est à dire « la plus carrée possible ». Il y a donc 1, puis 4, 9 et 16 bouteilles à ranger.



2.b) On a l'impression qu'à chaque fois les bouteilles formeront un carré de côté composé de n bouteilles. Ca marche pour $n = 1, 2, 3, 4\ldots$ et cette propriété géométrique continuera de se vérifier jour après jour. En effet, si au temps n les bouteilles forment un carré de coté n, en ajoutant $2n+1$ bouteilles le jour suivant, on peut naturellement les ranger autour du carré de côté n en plaçant n bouteilles à droite, n devant et 1 en diagonale :



Rodolphe est ainsi convaincu qu'il obtiendra au $n$ième jour un carré de bouteilles de côté n, et donc il y aura n^2 bouteilles. Il fait ici un raisonnement par récurrence, en remarquant une propriété les premiers jours et en s'assurant que celle-ci se vérifiera jour après jour : elle sera donc toujours vraie.

3) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = n^2$.

<u>Initialisation</u> $u_1 = 1$ et $1^2 = 1$, donc $u_1 = 1^2$ et la propriété est vraie au rang 1.

<u>Hérédité</u> Soit $n \geqslant 0$ *(quelconque mais fixé)*. On suppose la propriété vraie au rang n, c'est à dire $u_n = n^2$. Montrons la propriété au rang $n+1$, c'est à dire $u_{n+1} = (n+1)^2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1 + 3 + 5 + \ldots + [2n-1] + [2(n+1)-1] \\ &= u_n + 2n + 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)^2 \qquad \text{par identité remarquable} \end{aligned}$$

et la propriété est bien établie au rang $n+1$.

On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = n^2$. $\square$

Exercice 2.

1) On se propose d'étudier la fonction

$$f \ : \ [0; +\infty[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto (x+1)\ln\frac{x+4}{x+3} - \ln 2.$$

a) Soit $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Montrer que g est positive et illustrer par un dessin.

b) Étudier les variations de la fonction f.

c) Montrer que cette fonction s'annule au moins une fois en un point x_0 appartenant à l'intervalle $[4;5]$. En déduire que pour tout $x \in [5;+\infty[$, on a $0 < f(x)$.

2) On cherche les entiers naturels n tels que

$$(n+3)^n = \sum_{k=3}^{n+2} k^n.$$

a) Cette égalité est-elle vraie pour $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$?

b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que

$$\sum_{k=3}^{n+2} k^{n+1} < (n+3)\sum_{k=3}^{n+2} k^n.$$

c) Pour $n \geqslant 5$, montrer que $(n+3)^n > \sum_{k=3}^{n+2} k^n$.

d) Conclure.

Indications et Commentaires : Cet exercice a été posé au Concours Général de Mathématiques en 1999.

1.b) Dériver deux fois la fonction f.

1.c) On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, qui affirme que si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et que $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés, alors f s'annule (au moins une fois) sur le segment $[a, b]$.

2) Utilisez votre calculatrice pour $n = 4, 5$.

Corrections.

1.a) Il faut montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a $g(x) \geqslant 0$. Soit $x \in [0,+\infty[$ et $y \geqslant x$. Comme la fonction g est décroissante, $g(y) \leqslant g(x)$. De plus, $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y)$. On peut donc passer à la limite dans l'inégalité et $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) \leqslant g(x)$ soit $0 \leqslant g(x)$.

1.b) Pour étudier les variations de f, nous allons calculer sa dérivée f'. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, la quantité $x+3$ est non nulle. Ainsi la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ par opération et composition des fonctions dérivables. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln\frac{x+4}{x+3} + (x+1)\frac{\frac{x+3-x-4}{(x+3)^2}}{\frac{x+4}{x+3}}. \\ &= \ln\frac{x+4}{x+3} - \frac{x+1}{(x+3)(x+4)}, \end{aligned}$$

Mais il semble difficile de déterminer le signe de f'. Même la recherche des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ est un problème compliqué. Ceci est dû au fait que f' est la somme de deux fonctions de nature différente (une fonction logarithme et une fraction rationnelle). On va donc étudier les variations de f' pouvoir obtenir des informations sur f'. Nous allons donc dériver f', que l'on appelle dérivée seconde de f et que l'on note f''. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{(x+3)(x+4)} - \frac{1}{(x+3)(x+4)} + (x+1)\frac{2x+7}{(x+3)^2(x+4)^2} \\ &= \frac{(x+1)(2x+7) - 2(x+3)(x+4)}{(x+3)^2(x+4)^2} \\ &= -\frac{5x+17}{(x+3)^2(x+4)^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a les inégalités $0 < 5x + 17$ et $0 < (x+3)^2(x+4)^2$ et donc $f''(x) < 0$ Ainsi, la fonction f' est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. De plus, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ et donc grâce à la question précédente, on a pour tout

$$x \in [0, +\infty[, \ f'(x) \geqslant 0.$$

Ainsi, f est croissante sur $[0; +\infty[$.

1.c) On remarque que $f(4) = 5.\ln(8/7) - \ln 2 = -0,025... < 0$ et $f(5) = 6.\ln(9/8) - \ln 2 = 0,013 > 0$. Comme f est continue sur $[4; 5]$, on peut donc trouver grâce au théorème des valeurs intermédiaires un $x_0 \in [4, 5]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Soit $x \in [5; +\infty[$ quelconque fixé. Par croissance de f, on a $0 < 0,013 = f(5) \leqslant f(x)$.

2.a) On commence par étudier ce qui se passe lorsque n est petit.

- $n = 1 : 4 \neq 3$.
- $n = 2 : 5^2 = 25 = 3^2 + 4^2$.
- $n = 3 : 6^3 = 216 = 3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125$.
- $n = 4 : 7^4 = 2401 \neq 2258 = 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 81 + 256 + 625 + 1296$.
- $n = 5 : 8^5 = 32768 > 28975 = 3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 = 243 + 1024 + 3125 + 7776 + 16807$.

2.b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme pour tout $k \in \{1, \dots, n+2\}$, $k < n+3$, on a bien

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n+2} k^{n+1} &= \sum_{k=3}^{n+2} k \cdot k^n \\
&< \sum_{k=3}^{n+2} (n+3) \cdot k^n \\
&< (n+3) \sum_{k=3}^{n+2} k^n.
\end{aligned}$$

2.c) On va donc montrer que pour tout $n \geqslant 5$,

$$(n+3)^n > \sum_{k=3}^{n+2} k^n.$$

Montrons cette propriété par récurrence sur n.

<u>Initialisation.</u> Pour $n = 5$, la propriété est vraie puisque $(3+5)^3 > \sum_{k=3}^{5+2} k^n$ d'après le dernier calcul de la question 2.a).

<u>Hérédité</u> Soit $n \geqslant 5$ fixé. On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{(n+1)+2} k^{n+1} &= \sum_{k=3}^{n+3} k^{n+1} \\
&= (n+3)^{n+1} + \sum_{k=3}^{n+2} k \cdot k^n \\
&< (n+3)^{n+1} + (n+3) \sum_{k=3}^{n+2} k^n \\
&< 2(n+3)^{n+1},
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi, il nous suffit de montrer maintenant que

$$2(n+3)^{n+1} < (n+4)^{n+1},$$

ce qui est équivalent, par stricte croissance de la fonction ln, à

$$\ln\left(2(n+3)^{n+1}\right) < \ln\left((n+4)^{n+1}\right),$$

ce qui équivaut à

$$0 < \ln\left(\frac{(n+4)^{n+1}}{2(n+3)^{n+1}}\right),$$

ce qui équivaut à

$$0 < \ln\left(\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n+1}\right) - \ln 2,$$

ce qui équivaut à

$$0 < (n+1)\ln\frac{n+4}{n+3} - \ln 2.$$

Cette inégalité est vraie lorsque $n \geqslant 5$ car $f(n) > 0$ d'après la question 1.c). Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$. Donc, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 5$,

$$(n+3)^n > \sum_{k=3}^{n+2} k^n.$$

(i) À noter que cette démonstration ne s'applique pas au cas $n = 4\ldots$

(ii) Il est absolument indispensable de préciser que la fonction logarithme est strictement croissante et pas seulement croissante. En effet une fonction croissante qui n'est pas strictement croissante peut transformer une inégalité $<$ en une inégalité $\leqslant$.

2.d) Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{2,\ 3\}.$$

$\square$