Achille, la Tortue et Riemann

A. Camanes, V. Bansaye

Niveau : Approfondir la Terminale S
Difficulté : Moyenne
Durée : au moins 1h
Rubrique(s) : Analyse (Suites)

La petite histoire... Le paradoxe de Zénon sur Achille et la tortue est connu depuis l'Antiquité. Lors d'un tournoi, Achille décide de courir contre une tortue. Se sachant supérieur, Achille décide de laisser 10 mètres d'avance à la tortue. Au n-ème pas, Achille se rapproche de la tortue d'une certaine valeur u_n. Ainsi, la distance entre Achille et la tortue au bout de 100 pas vaut $10 - u_1 - u_2 - \cdots - u_{100}$, et au bout de n pas $10 - u_1 - u_2 - \cdots - u_n$. La question est de savoir si Achille va finalement rattraper la tortue...

A l'originie, le pardoxe de Zénon est le suivant. Si à chaque pas Achille divise par deux la moitié de la distance qui le sépare de la tortue, il s'en rapproche indéfiniment sans jamais la rattraper ; il parcourt alors $u_n = 10/2^n$ mètres au pas n.
Mais, si on imagine qu'à chaque pas, Achille se rapproche de 1 m de la tortue, alors il la rattape forcément (en 10 pas d'ailleurs).
Bref, si les u_n sont suffisamment grands, Achille rattrape la tortue, sinon non. On va préciser ici quand les u_n sont suffisamment grands sur des exemples moins simples ...

Exercice 1 (Des sommes qui explosent, Constante d'Euler).

1) On suppose que la suite (u_n) est égale à une constante positive α. Que pensez-vous qu'il va se passer pour Achille et la tortue ?

2) On suppose qu'il existe un constante positive α telle que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \geqslant \alpha$. Montrer qu'Achille dépasse la tortue.

3) On suppose maintenant que, pour tout entier n non nul, $u_n = \frac{1}{n}$. On va montrer qu'Achille dépasse encore la tortue, bien qu'il s'en rapproche de moins en moins rapidemement.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on notera $H_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n}$. La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est appelée la *série harmonique.*

a) Soit k un entier naturel non nul. Montrer que pour tout $x \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}.$$

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}.$$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}.$$

d) En déduire que la suite $(10 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers $-\infty$ et qu'ainsi, Achille finit par dépasser la tortue.

4) Nous allons maintenant voir que $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ se comporte comme $\ln(n)$ et montrer que la distance entre ces deux nombres tend vers une constante, notée γ et appelée *constante d'Euler*.

a) En utilisant les questions précédentes, montrer que pour tout entier n plus grand que 1,

$$\frac{1}{n} \leqslant H_n - \ln n \leqslant 1.$$

En déduire que $H_n/\ln(n)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

b) Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite décroissante.

c) Conclure.

d) À l'aide de votre calculatrice, proposer une valeur approchée de γ.

Indications et Commentaires : 4.b) Montrer que $f : x \in [1, +\infty[\;\; \mapsto \frac{1}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est négative en étudiant ses variations.

Corrections.

1) On remarque que pour tout entier naturel n non nul, $u_1 + \cdots + u_n = n\alpha$. Ainsi, à l'instant n, la distance entre Achille et la tortue vaut $10 - n\alpha$. Cette distance tend vers $-\infty$ donc Achille rejoint la tortue, la dépasse puis s'en éloigne de plus en plus.

2) Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $u_k \geqslant \alpha$, $u_1 + \cdots + u_n \geqslant n\alpha$. Ainsi, à l'instant n, la distance entre Achille et la tortue est inférieure à $10 - n\alpha$. Cette distance tend vers $-\infty$ donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite $(10 - u_1 - \cdots - u_n)$ tend vers $-\infty$ et Achille rejoint la tortue, la dépasse puis s'en éloigne de plus en plus.

3.a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [k, k+1]$. Ainsi, $k \leqslant x \leqslant k+1$. Comme la fonction inverse est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$.

b) D'après les propriétés de l'intégrale, l'inégalité précédente,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi, k étant indépendante de la variable d'intégration,

$$\frac{1}{k+1}(k+1-k) \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}(k+1-k),$$

et on obtient bien l'encadrement demandé.

c) En sommant les inégalités précédentes et en utilisant la relation de Chasles, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{array}{lclcl}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}x & \leqslant & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} & \leqslant & \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & \leqslant & \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\
H_n - 1 & \leqslant & \ln(n) & \leqslant & H_n - \frac{1}{n}.
\end{array}$$

d) Comme la suite $(\ln(n))$ tend vers $+\infty$, la suite $(\ln(n) + \frac{1}{n})$ tend vers $+\infty$ et d'après le théorème d'encadrement, la suite (H_n) tend vers $+\infty$. Ainsi, $(10 - H_n)$ tend vers $-\infty$ et, inexorablement, Achille rattrape la tortue et la dépasse !

4.a) Utiliser seulement l'encadrement trouvé à la question 3.c) pour obtenir

$$\frac{1}{n} \leqslant H_n - \ln n \leqslant 1.$$

On en déduit

$$1 + \frac{1}{n \ln n} \leqslant \frac{H_n}{\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Or $1 + \frac{1}{n \ln n}$ et $1 + \frac{1}{\ln n}$ tendent vers 1 quand n tend vers l'infini, donc $\frac{H_n}{\ln n}$ tend vers 1 par le théorème des gendarmes.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En posant $u_n = H_n - \ln n$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Pour connaître les variations de u_n, on est donc ramené à connaître le signe de la fonction $f : x \in]0, +\infty[\ \mapsto \frac{1}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Pour cela, on regarde les variations de f. Calculons donc sa dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{-1/x^2}{1+1/x} \\ &= -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{-1}{x^2+1} \\ &= \frac{-(x^2+1) + (1+x)^2}{(1+x)^2(x^2+1)} \\ &= \frac{+2x}{(1+x)^2(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Elle est donc positive sur $]0, +\infty[$ et la fonction f est croissante. Comme la limite de f en $+\infty$ est égale à zéro, f est négative. Donc $u_{n+1} - u_n = f(n) \leqslant 0$ et et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite réelle décroissante et minorée (par 0) donc convergente. On notera γ sa limite.

d) On obtient $\gamma \simeq 0,577$ pour $n = 700$. Il suffit pour cela de faire un petit programme sur la calculatrice pour trouver H_{700}. On pourrait alors étudier la rapidité de convergence... □

Exercice 2 (Sommes de Riemann). Dans cette question, on suppose que $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, où α est un réel. Les suites $(1 + \cdots + \frac{1}{n^\alpha})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont appelées *sommes de Riemann*. Dans la suite, on notera $(S_n^{(\alpha)})_{n\in\mathbb{N}^\star} = (1 + \cdots + \frac{1}{n^\alpha})_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

1) Montrer que si $\alpha \leqslant 0$, la suite $(S_n^{(\alpha)})$ tend vers $+\infty$.

2) Montrer que si $\alpha \in [0, 1]$, la suite $(S_n^{(\alpha)})$ tend vers $+\infty$.

3) On suppose ici que $\alpha > 1$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

b) En déduire que la suite $(S_n^{(\alpha)})$ converge vers une limite que l'on note c_α.

4) Proposons deux petites « applications » pour voir l'importance de la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Achille part avec un retard de x_0 mètres sur la tortue et à chaque pas n, il la rattrappe de $u_n = 1/n^\alpha$ mètres. Pour quelles valeurs de x_0 Achille rattrape-t-il la tortue ?

b) Hector stocke dans une réserve le surplus de nourriture que les paysans de son royaume lui apportent chaque jour. La quantité qu'on lui amène chaque jour s'amenuise et tend vers 0. Si au jour n, on lui apporte un volume $u_n = 1/n^\alpha$ de nourriture, peut-il prévoir une réserve suffisamment grande pour stocker indéfiniment ce qu'on lui apporte ?

Indications et Commentaires : Remarquez que plus α est grand, plus la somme de Riemann est petite.
2) Utiliser la question 3) de l'exercice précédent.
4.a) Il faut discuter suivant la valeur de α et distinguer $\alpha > 1$ et $\alpha \leqslant 1$.
On développe ici une méthode très utile pour évaluer des sommes : on compare ces sommes à une intégrale que l'on sait évaluer, ici l'intégrale de $1/x^\alpha$.

Corrections.

1) Soit $\alpha \leqslant 0$. La fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $k \geqslant 1$, $k^{-\alpha} \geqslant 1$. On suit maintenant la question 2) de l'exercice précédent. En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n, on obtient

$$S_n^{(\alpha)} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} \geqslant 1 + 1 + ... + 1 = n.$$

Et le théorème d'encadrement entraîne que $S_n^{(\alpha)}$ tend vers l'infini.

2) Soit $\alpha \in [0, 1]$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $n^\alpha \leqslant n$, on a $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$ et en sommant cette inégalité, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $H_n \leqslant S_n^{(\alpha)}$. Ainsi, d'après l'exercice précédent et le théorème d'encadrement, la suite $(S_n^{(\alpha)})$ tend vers $+\infty$.

3.a) On suppose que $\alpha > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, pour tout $x \in [n, n+1]$,

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

En intégrant cet encadrement sur $[n, n+1]$, on obtient, comme dans l'exercice précédent,

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

b) En utilisant la relation de Chasles et en sommant l'encadrement précédent entre 1 et $n-1$, on obtient

$$S_n^{(\alpha)} - 1 \leqslant \int_1^n x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \leqslant S_n^{(\alpha)} - \frac{1}{n^\alpha}.$$

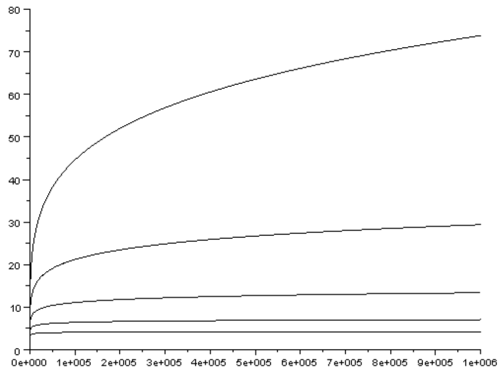
Ainsi, en n'utilisant que la première inégalité,

$$S_n^{(\alpha)} \leqslant 1 + \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, la suite $(n^{1-\alpha})$ est décroissante et $n^{1-\alpha} \leqslant 1^{1-\alpha} = 1$. Ainsi, elle est bornée et la suite $S_n^{(\alpha)}$ est majorée. Comme la suite $S_n^{(\alpha)}$ est aussi croissante, elle est convergente vers une constante notée c_α.
De plus, en utilisant l'encadrement précédent, $c_\alpha \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$.

4.a) Si $\alpha \leqslant 1$, $S_n^{(\alpha)}$ tend vers l'infini, donc pour tout x_0, la distance $x_0 - S_n^{(\alpha)}$ tend vers $-\infty$. En particulier, elle devient négative à partir d'un certain rang et Achille rejoint la tortue (quel que soit le retard qu'il a au début).
Par contre, si $\alpha > 1$, $S_n^{(\alpha)}$ tend vers c_α. Donc la distance entre Achille et la tortue va tendre vers $x_0 - c_\alpha$. Si cette distance reste positive strictement, c'est-à-dire si $x_0 > c_\alpha$, Achille ne rejoint pas la tortue. A contrario, si $x_0 \leqslant c_\alpha$, Achille rejoint la tortue.

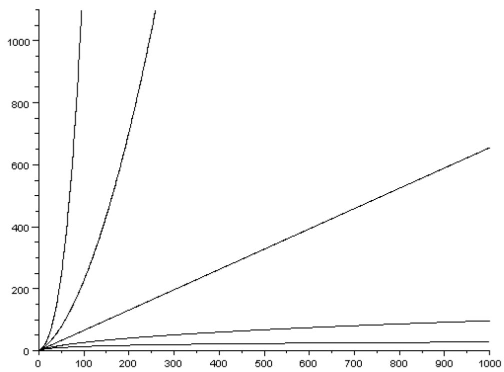
b) Le volume que Hector doit stocker au bout de n jours est égal à $S_n^{(\alpha)}$. Si $\alpha \leqslant 1$, ce volume tend vers l'infini et aucune réserve ne pourra tout contenir (quel que soit le volume de la réserve, un jour, il ne sera plus suffisant). Si $\alpha > 1$, le volume à stocker croît maintenant vers une limite finie c_α, et il suffit à Hector de prévoir une réserve de volume supérieur ou égal à c_α.
Le graphique ci-dessous présente les valeurs des sommes de Riemann autour de la valeur critique $\alpha = 1$. Plus précisement, on a tracé pour n allant de 1 à 10000 les valeurs de $S_n^{(\alpha)}$ avec α valant successivement $1,2$; 1,1 ; 1 ; 0,9 ; 0,8 (les graphes successifs apparaissent les uns au-dessus des autres).



D'après l'exercice, on est supposé voir un changement de comportement pour $\alpha = 1$. En effet tant que $\alpha > 1$, la courbe doit rester bornée, tandis que pour $\alpha \leqslant 1$, elle doit tendre vers l'infini.
Cela ne s'observe pas très bien ici. Mais ce n'est pas suprenant puisque l'on a vu dans l'exercice 1 que pour $\alpha = 1$, la somme de Riemann se comportait comme $\ln n$, et donc elle tend très doucement vers l'infini (rappel $\ln(10^9) = 9\ln(10)$ qui n'est pas bien grand). Et ce n'est pas facile à distinguer de ne pas tendre vers l'infini du tout sur un graphique.
Pour voir les choses apparaître plus franchement, on passe à l'échelle exponentielle, c'est-à-dire que l'on trace maintenant

$$n \mapsto \exp(S_n^{(\alpha)})$$

pour α valant successivement $1,2$; 1,1 ; 1 ; 0,9 ; 0,8. On se limite à $n = 1000$ pour voir quelque chose :



Maintenant on observe bien un changement de comportement au milieu (*i.e.* $\alpha = 1$) : en deçà de cette valeur, la courbe semble rester bornée, tandis qu'au-delà, elle « explose ». □

Exercice 3 (Une généralisation de la comparaison somme / intégrale). Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est une fonction continue et décroissante.

1) Soit n un entier naturel. On va découper l'intervalle $[0, 1]$ en n petits intervalles. En encadrant la courbe représentative de f entre deux rectangles et en utilisant l'interprétation des intégrales comme aire sous la courbe, montrer que pour tout $k < n$,

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\, dt \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

3.a) Écrire un programme sous Scilab qui permette de calculer une valeur approchée de l'intégrale de f, où pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$, pour $n = 100$.

b) Modifier le code pour écrire une fonction qui prenne en argument le nombre n et donne la valeur approchée de l'intégrale correspondante.

Indications et Commentaires : **1.** Rappelez-vous que l'aire d'un rectangle est égale au produit de la longueur de la base par la hauteur.

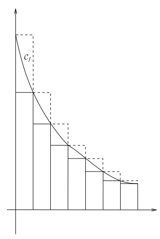
2. Il suffit de sommer !

On montre de manière identique que si f est une fonction décroissante :

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(x)dx.$$

Et l'étude de la suite $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ peut s'appuyer sur l'étude la primitive de f. C'est ce que l'on a utilisé dans les exercices précédents avec $f(x) = 1/x^\alpha$.

Corrections. Tout repose sur le dessin suivant.



1) L'aire comprise sous la courbe de f entre les points d'abscisse $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ vaut $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt$. Or, cette aire est comprise entre :

– l'aire du rectangle de hauteur $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$, dont l'aire vaut $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k+1}{n}\right)$,

– l'aire du rectangle de hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$, dont l'aire vaut $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)$.

On obtient ainsi l'encadrement souhaité.

2) Il suffit de sommer l'encadrement précédent pour $k = 0 \ldots n-1$.

3)

```
x = [1:1/100:2]; u = x.^(-1); int = 1/100 * sum(u)

function y = integral(n)
  x = [1:1/n:2];
  u = x.^(-1);
  y = 1/n * sum(u);
endfunction
```

□